

SOLUSI EKSAK GELOMBANG SOLITON: PERSAMAAN SCHRODINGER NONLINEAR NONLOKAL (NNLS)

Riski Nur Istiqomah Dinnullah

Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Kanjuruhan Malang

Email: ky2_zahra@yahoo.com

ABSTRAK

Pada penelitian ini dimodelkan perambatan gelombang optik pada medium nonlinear Kerr nonlokal dengan menggunakan persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal (NNLS). Persamaan NNLS tersebut diperoleh dari metode penurunan persamaan Helmholtz nonlinear dengan penambahan suatu parameter nonlokal. Dengan cara ini ditentukan solusi eksak dari persamaan NNLS yang berupa gelombang soliton. Solusi eksak yang diperoleh merupakan fungsi implisit. Selanjutnya solusi eksak tersebut diplot dengan menggunakan aplikasi Matlab untuk melihat perambatan gelombang soliton. Hasil plot gambar menunjukkan bahwa lebar soliton dipengaruhi oleh nilai maksimum pada pusat soliton dan parameter nonlokal. Jika nilai maksimum pada pusat atau nilai parameter nonlokalnya diperbesar, maka soliton yang terjadi akan semakin lebar.

Kata kunci: soliton, medium nonlinear Kerr nonlokal, persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal, persamaan Helmholtz nonlinear.

PENDAHULUAN

Di era global saat ini, teknologi serat optik telah banyak dipelajari dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan terutama dalam bidang komunikasi optik. Dengan menggunakan laser berintensitas tinggi, serat optik telah menjadi lahan penelitian yang menarik dan memiliki potensi besar untuk dimanfaatkan sebagai media transmisi.

Pada tahun 1988, Linn F. Mollenauer mempelopori penggunaan soliton untuk sistem komunikasi optik. Soliton adalah sebuah gelombang soliter atau gelombang tunggal yang memiliki sifat terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan. Pada sistem komunikasi optik, informasi (data) dapat ditransfer dalam kapasitas yang besar pada jarak yang sangat jauh dan memiliki kecepatan transmisi yang sangat tinggi. Sistem komunikasi optik yang berbasis soliton ini menjadi salah satu teknologi penting dalam pengembangan serat optik yang mampu memberikan peluang besar untuk merevolusi dunia telekomunikasi dan teknologi komputer. Beberapa desain soliton sangat potensial untuk diaplikasikan sebagai *all-optical switching*, *all-optical logic gates*, *all-optical processing*, dan lain sebagainya [1].

Studi perambatan soliton banyak sekali dilakukan pada medium nonlinear Kerr. Pada medium ini, efek nonlinear Kerr dari medium dapat muncul ketika cahaya yang berintensitas tinggi mengenai medium sehingga menyebabkan

adanya perubahan indeks bias. Pengaruh nonlinearitas ini bersifat lokal. Namun pada eksperimen yang meneliti kristal fotorefraktif sebagai medium nonlinear telah dibuktikan bahwa respon nonlinear dari suatu medium dapat bersifat nonlokal [2]. Pada medium nonlinear nonlokal, gelombang yang terlokalisasi pada daerah yang sempit dapat memberikan respon yang sangat lebar. Hal ini terjadi karena respon nonlokal dari suatu medium tidak hanya dipengaruhi oleh perubahan intensitas gelombang pada suatu daerah tertentu, tetapi juga dipengaruhi oleh intensitas gelombang di sekitar daerah tersebut [3].

Perambatan gelombang optik pada medium nonlinear Kerr nonlokal dimodelkan oleh persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal (NNLS). Persamaan NNLS merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear yang solusi eksaknya secara umum sulit untuk diperoleh sehingga diperlukan metode pendekatan, misalnya pendekatan numerik. Namun, pada beberapa fenomena gelombang nonlinear solusi eksaknya dapat dicari secara analitik dalam bentuk fungsi implisit.

Pada penelitian ini ditentukan solusi eksak gelombang soliton pada medium nonlinear Kerr nonlokal dari persamaan NNLS. Solusi eksak soliton dapat digunakan untuk mengetahui sifat-sifat perambatan soliton pada medium nonlinear Kerr nonlokal [4]. Perubahan respon nonlokal pada suatu medium dapat dipengaruhi oleh sifat-sifat perambatan soliton. Dengan melihat sifat-sifat perambatan soliton pada medium nonlinear

nonlokal, memungkinkan soliton dapat diaplikasikan untuk membuat desain peralatan komunikasi optik seperti self-optical switching ataupun self-optical routing [5]. Oleh karena itu, penelitian ini penting dilakukan untuk memahami respon nonlinear nonlokal pada gelombang soliton.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Persamaan Maxwell

Teori propagasi cahaya pada medium dielektrik yang melibatkan medan elektrik dan medan magnetik dikembangkan pertama kali oleh Maxwell pada tahun 1860. Dalam notasi vektor, persamaan Maxwell dapat ditulis sebagai

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

dengan \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{j} dan ρ berturut-turut adalah medan elektrik, medan magnetik, rapat fluks elektrik, rapat fluks magnetik, rapat arus, dan rapat muatan elektrik. Pembahasan dibatasi untuk material nonmagnetik, tanpa muatan dan arus elektrik, yaitu:

$$\vec{j} = 0 \text{ dan } \rho = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

dengan ϵ_0 , μ_0 dan \vec{P} berturut-turut adalah permitivitas ruang hampa, permeabilitas ruang hampa, dan polarisasi elektrik. Persamaan Maxwell dapat digunakan untuk memperoleh persamaan Schrodinger yang menggambarkan perambatan cahaya dalam medium nonmagnetik [6].

2. Persamaan Helmholtz Nonlinear

Dalam pembahasan ini, diasumsikan bahwa medium perambatan gelombang adalah material nonlinear Kerr, sehingga rapat fluks elektrik akan berbentuk

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \right) \vec{E} \quad (3)$$

dengan χ adalah konstanta.

Dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), persamaan Maxwell (1) dapat direduksi menjadi $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \right) \vec{E} = 0$.

(4)

Menurut Suryanto (2004), persamaan (4) merupakan persamaan gelombang elektromagnetik dimana persamaan tersebut melibatkan vektor kompleks dimensi tiga. Permasalahan tersebut dapat disederhanakan dengan mengasumsikan bahwa medium berbentuk lempengan (*slab waveguide*), sedemikian sehingga ketergantungan medan elektrik dan magnetik terhadap salah satu dimensi dapat diabaikan. Persamaan gelombang elektromagnetik tersebut dapat disederhanakan dengan mempertimbangkan dua tipe solusi yaitu gelombang *transverse electric mode* (TE) dan gelombang *transverse magnetic mode* (TM). Pada kasus ini pembahasan hanya dibatasi pada gelombang TE yaitu vektor medan listrik tegak lurus dengan arah perambatan. Arah perambatan dipilih searah dengan sumbu z , sehingga vektor medan listrik dan magnetik berturut-turut adalah

$$\vec{E} = [0, E_y(x, z, t), 0] \quad (5)$$

$$\vec{H} = [H_x(x, z, t), 0, H_z(x, z, t)]. \quad (6)$$

Oleh karena itu,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial y} E_y(x, z, t) = 0 \quad (7)$$

Dengan demikian persamaan (4) dapat ditulis sebagai persamaan skalar yaitu

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |E_y|^2 \right) E_y = 0 \quad (8)$$

dengan $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ adalah kecepatan cahaya di ruang hampa. Berdasarkan asumsi bahwa gelombang yang dipancarkan dalam material Kerr mempunyai frekuensi tunggal atau gelombang monokromatik, yaitu

$$E_y(x, z, t) = E(x, z) e^{i\omega t}, \quad (9)$$

Sedemikian sehingga persamaan (9) menjadi persamaan Helmholtz nonlinear

$$\vec{\nabla}^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 E = 0, \quad (10)$$

dimana n adalah indeks bias nonlinear Kerr.

Berdasarkan asumsi bahwa $n_2 \ll 1$ maka n^2 dapat diaproksimasi menjadi

$$n^2 \approx n_0^2 + 2n_0 n_2 |\vec{E}|^2 \quad (11)$$

dengan $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ adalah indeks bias linear dan $n_2 = \frac{\chi^{(3)}}{2n_0}$ adalah koefisien indeks bias nonlinear kerr. Dengan demikian perubahan indeks bias Δn akibat pengaruh nonlinearitas adalah

$$\Delta n = n_2 |\vec{E}|^2 \quad [6]. \quad (12)$$

3. Persamaan Schrodinger Nonlinear (NLS)

Persamaan Helmholtz nonlinear (10) merupakan persamaan diferensial parsial yang secara umum sangat sulit untuk diselesaikan. Berdasarkan persamaan tersebut akan diturunkan persamaan Schrodinger nonlinear. Sebelumnya, akan dicari terlebih dahulu solusi E dari persamaan (10) yang berbentuk

$$E(x, z) = A(x, z) e^{ik_0 z}, \quad (13)$$

dengan $A(x, z)$ adalah selubung gelombang yang diasumsikan berubah secara lambat sepanjang arah perambatan dan k_0 adalah bilangan gelombang yang memenuhi hubungan $k_0 = \frac{\omega n_0}{c}$.

Berdasarkan persamaan (13), setelah dibagi dengan $2k_0^2 e^{ik_0 z}$ maka persamaan Helmholtz nonlinear dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{n_2}{n_0} |A|^2 A = 0. \quad (14)$$

Tergantung pada material Kerr, koefisien indeks bias n_2 akan bernilai positif pada material *self-focusing* dan bernilai negatif pada material *self-defocusing*. Oleh karena itu persamaan (2.36) ditulis menjadi

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \text{sign}(n_2) \frac{n_2}{n_0} |A|^2 A = 0, \quad (15)$$

$$\text{dengan } \text{sign}(n_2) = \begin{cases} 1, & n_2 \geq 0 \\ -1, & n_2 < 0 \end{cases}$$

Untuk menormalkan bentuk persamaan maka didefinisikan suatu parameter kecil κ , $0 < \kappa \leq 1$. Kemudian diasumsikan bahwa selubung gelombang berubah secara lambat sepanjang arah perambatan z . Untuk melihat perubahan selubung gelombang pada jarak perambatan yang cukup jauh tetapi masih berhingga jaraknya maka didefinisikan variabel lambat dan sangat lambat, yaitu

$$X = \kappa k_0 x \quad (16)$$

$$Z = \kappa^2 k_0 z, \quad (17)$$

Dan menskala Selubung gelombang sebagai

$$A(X, Z) = \kappa \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} B(X, Z). \quad (18)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (14), maka diperoleh persamaan Schrodinger nonlinear (NLS) sebagai berikut

$$i \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \text{sign}(n_2) |B|^2 B = 0 \quad [6]. \quad (19)$$

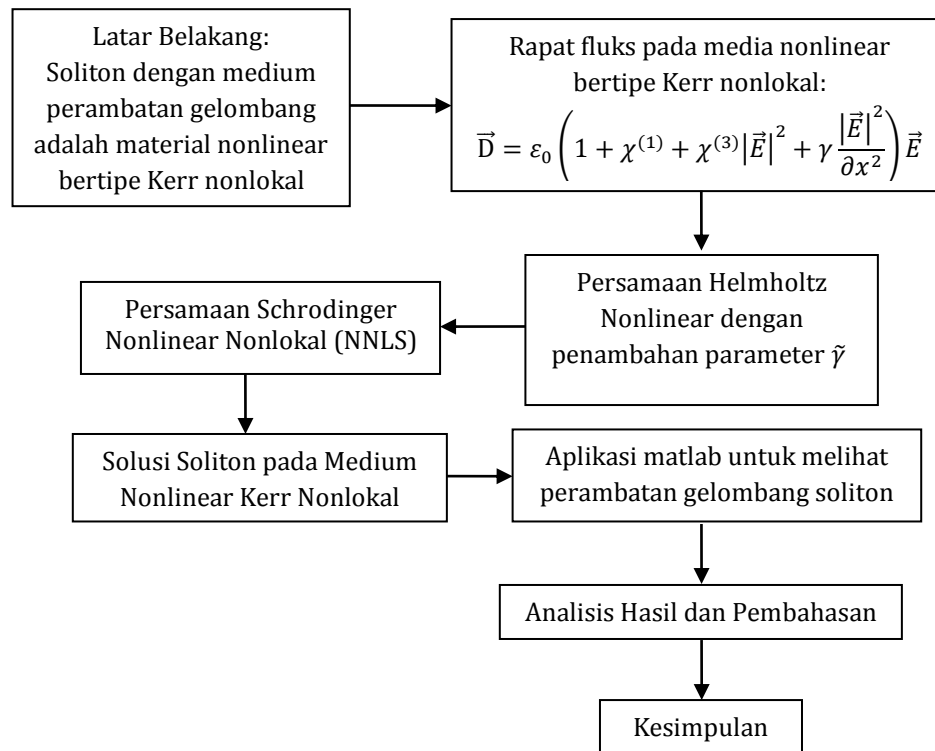
4. Gelombang Soliton

Gelombang soliton adalah gelombang soliter (gelombang tunggal) yang memiliki sifat-sifat terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk dan kecepatan. Gelombang ini memiliki sifat seperti partikel, yaitu jika gelombang soliton bertumbukan dengan gelombang soliton yang lain, profil dan kecepatannya tidak mengalami perubahan setelah tumbukan.

Fenomena soliton tidak hanya diprediksi secara teori tetapi juga telah dibuktikan secara eksperimen. Pengamatan pertama dilakukan pada tahun 1844 oleh ilmuwan Skotlandia, John Scott-Russel (1808-1882). Pada tahun 1834, Russel mengamati fenomena gelombang air di kanal Eidenberg-Glaslow. Russel menyebut ini sebagai gelombang besar translasi. Gelombang air tersebut menjalar dengan bentuk yang tidak berubah sepanjang kanal dalam rentang waktu yang relatif lama [2].

METODOLOGI PENELITIAN

Pada penelitian ini, persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal (NNLS) diturunkan dari persamaan Helmholtz nonlinear dengan penambahan suatu parameter nonlokal $\tilde{\gamma}$. Selanjutnya, melalui persamaan NNLS tersebut akan ditentukan solusi eksak dari gelombang soliton yang berupa fungsi implisit. Alur kerangka pemikiran dari penelitian ini diberikan dalam gambar 1, yaitu sebagai berikut:



Gambar 1. Alur Kerangka Pemikiran

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Metode Penurunan Persamaan Schrodinger Nonlinier Nonlokal (NNLS)

Persamaan Helmholtz Nonlinear

Diasumsikan bahwa medium perambatan gelombang adalah material nonlinear bertipe Kerr nonlokal, sehingga rapat fluks elektrik akan berbentuk

$$\vec{D} = \epsilon_0 \left(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 + \gamma \frac{|\vec{E}|^2}{\partial x^2} \right) \vec{E} \quad (20)$$

Dengan menggunakan penurunan persamaan Helmholtz nonlinear yang sama, maka diperoleh

$$\vec{\nabla}^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 E = 0. \quad (21)$$

Indeks bias nonlinear Kerr nonlokal dapat ditulis sebagai

$$n = n_0 + n_2 |\vec{E}|^2 + \frac{\gamma}{2n_0} \frac{|\vec{E}|^2}{\partial x^2} \quad (22)$$

dengan $n_2 = \frac{\chi^{(3)}}{2n_0}$ adalah koefisien indeks bias nonlinear Kerr. Jika (22) dikuadratkan maka diperoleh

$$n^2 = \left(n_0 + n_2 |\vec{E}|^2 + \frac{\gamma}{2n_0} \frac{|\vec{E}|^2}{\partial x^2} \right)^2 \quad (23)$$

Berdasarkan asumsi bahwa $n_2 \ll 1$ dan $\gamma \ll 1$ maka n^2 dapat diaproksimasi menjadi

$$n^2 \approx n_0^2 + 2n_0 n_2 |\vec{E}|^2 + \gamma \frac{\partial^2 |\vec{E}|^2}{\partial x^2}. \quad (24)$$

Dengan demikian perubahan indeks bias Δn akibat pengaruh nonlinearitas adalah

$$\Delta n = n_2 |\vec{E}|^2 + \gamma \frac{\partial^2 |\vec{E}|^2}{\partial x^2}. \quad (25)$$

Persamaan Schrodinger Nonlinear Nonlokal (NNLS)

Berdasarkan persamaan Helmholtz nonlinear (21) akan diturunkan persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal. Dalam hal ini dicari terlebih dahulu solusi E dari persamaan yang berbentuk

$$E(x, z) = A(x, z) e^{ik_0 z}, \quad (26)$$

Pada pembahasan ini diasumsikan bahwa n_2 bernilai positif. Dengan menggunakan langkah yang sama untuk menemukan persamaan Schrodinger nonlinear.

Selanjutnya diasumsikan juga bahwa γ bernilai positif, sehingga diperoleh

$$i \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + |B|^2 B + \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 |B|^2}{\partial x^2} B = 0. \quad (27)$$

Karena nilai κ^2 sangat kecil maka nilai κ^2 dan suku yang memuat turunan kedua terhadap Z dapat diabaikan, sehingga persamaan (27) dapat ditulis menjadi

$$i \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + |B|^2 B + \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 |B|^2}{\partial x^2} B = 0. \quad (28)$$

Persamaan (28) merupakan persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal (NNLS).

2. Solusi Soliton pada Medium Nonlinear Kerr Nonlokal

Asumsikan bahwa selubung gelombang berbentuk

$$B(X, Z) = U(X)e^{i\Gamma z}, \tag{29}$$

Jika persamaan (29) di substitusikan ke persamaan (28), maka diperoleh persamaan

$$-2U\Gamma + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2U^3 + 2\tilde{\gamma} \frac{\partial^2 |U|^2}{\partial X^2} U = 0. \tag{30}$$

Jika persamaan (30) dikali dengan $\frac{\partial U}{\partial X}$ dan diintegrasikan terhadap X , maka diperoleh

$$(1 + 4\tilde{\gamma}U^2) \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + (U^2 - 2\Gamma)U^2 = C, \tag{31}$$

dengan C adalah konstanta integrasi.

Kemudian diasumsikan bahwa U dan $\frac{\partial U}{\partial X}$ bernilai 0 pada $X \rightarrow \pm\infty$ sehingga diperoleh nilai konstanta $C = 0$ dan persamaan (31) dapat dituliskan sebagai berikut

$$(1 + 4\tilde{\gamma}U^2) \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + (U^2 - 2\Gamma)U^2 = 0. \tag{32}$$

Selain itu, diasumsikan juga bahwa soliton berpusat di $X = 0$ sehingga $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$ pada saat $X = 0$. Dengan menggunakan asumsi tersebut dapat diketahui bahwa hubungan antara konstanta propagasi Γ dan amplitudo U_0 adalah sebagai

Untuk kasus $\tilde{\gamma} < 0$, solusi (35) ada jika dan hanya jika intensitas puncak $U_0^2 = \rho_0$ memiliki nilai lebih kecil dari nilai kritis $(U_{cr})^2 = \frac{1}{|4\tilde{\gamma}|} = \rho_{cr}$. Nilai kritis tersebut diperoleh dari $1 + 4\tilde{\gamma}U^2$ yang nilainya selalu positif, namun karena $\tilde{\gamma} < 0$ maka

$$1 + 4\tilde{\gamma}U^2 > 0$$

$$\rho_{cr} = \frac{1}{|4\tilde{\gamma}|}$$

dengan $U^2 = \rho$ adalah intensitas soliton.

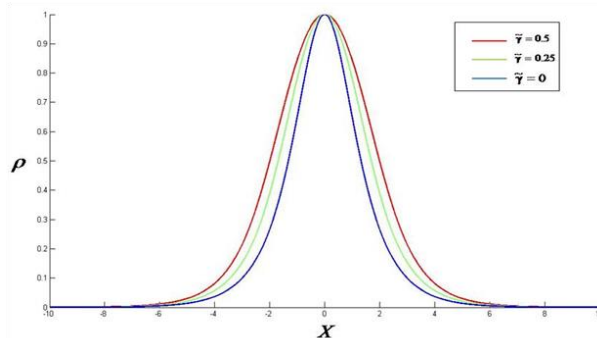
Selanjutnya persamaan (34) diintegrasikan terhadap X , sehingga diperoleh

$$\pm X = \frac{1}{U_0} \tanh^{-1} \left(\frac{\sigma}{U_0}\right) + \sqrt{4\tilde{\gamma}} \tan^{-1} \sqrt{4\tilde{\gamma}}, \tag{35}$$

$$\text{dengan } \sigma = \sqrt{\frac{U_0^2 - U^2}{1 + 4\tilde{\gamma}U^2}}.$$

Fungsi implisit (35) merupakan solusi dari soliton dalam medium Kerr nonlokal. Jika $\tilde{\gamma} = 0$ maka diperoleh profil $U(X) = U_0 \text{sech}(U_0 X)$ yang merupakan solusi perambatan soliton pada medium lokal. Pusat soliton memiliki intensitas yang tinggi, sedangkan di sekitar pusat tersebut intensitasnya sangat rendah (hampir nol).

Plot soliton untuk parameter nonlokal $\tilde{\gamma}$ yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Plot Gelombang Soliton untuk $U_0 = 1$ dengan $\tilde{\gamma} = 0$, $\tilde{\gamma} = 0.25$ dan $\tilde{\gamma} = 0.5$

berikut

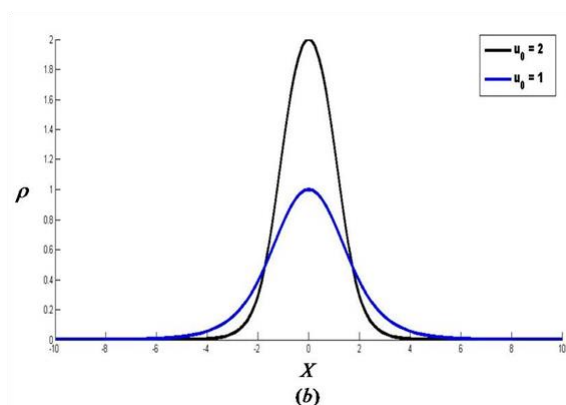
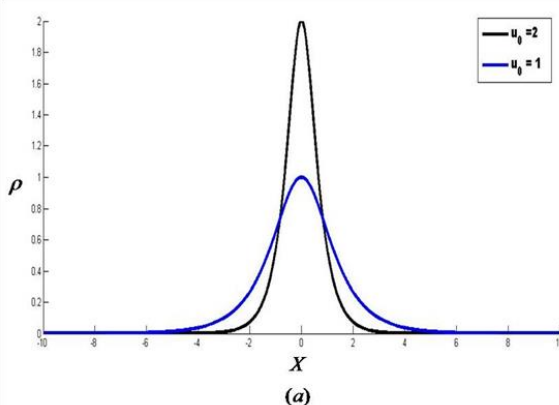
$$U_0^2 = 2\Gamma, \tag{33}$$

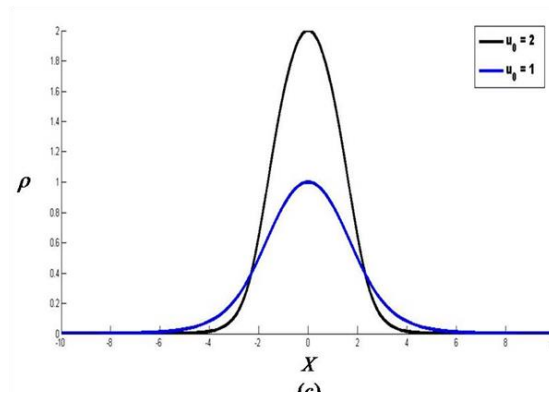
sehingga persamaan (32) dapat disederhanakan menjadi

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 = \frac{(U_0^2 - U^2)U^2}{1 + 4\tilde{\gamma}U^2}. \tag{34}$$

Dari Gambar 2 dapat dilihat dengan jelas bahwa perubahan lebar dari gelombang soliton tergantung pada parameter nonlokal.

Selanjutnya, soliton dengan parameter nonlokal $\tilde{\gamma} = 0$, $\tilde{\gamma} = 0.25$, dan $\tilde{\gamma} = 0.5$ pada $U_0 = 1$ dan $U_0 = 2$ diplot pada gambar 3.





Gambar 3. Plot Soliton untuk (a) $\tilde{\gamma} = 0$, (b) $\tilde{\gamma} = 0.25$, dan (c) $\tilde{\gamma} = 0.5$ dengan $U_0 = 1$ dan $U_0 = 2$

Gambar 3 menunjukkan bahwa gelombang soliton ini memiliki nilai maksimum U_0 pada titik pusat $X = 0$. Perubahan dari nilai U_0 mempengaruhi perubahan lebar dari soliton.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah diuraikan pada hasil dan pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dengan menyelesaikan persamaan Schrodinger nonlinear nonlokal (NNLS) diperoleh solusi eksak gelombang soliton pada medium nonlinear Kerr nonlokal. Solusi tersebut berbentuk fungsi implisit yaitu

$$\pm X = \frac{1}{U_0} \tanh^{-1} \left(\frac{\sigma}{U_0} \right) + \sqrt{4\tilde{\gamma}} \tan^{-1} \sqrt{4\tilde{\gamma}}$$

degan $\sigma = \sqrt{\frac{(U_0^2 - U^2)}{1 + 4\tilde{\gamma}U^2}}$ dan $\tilde{\gamma}$ merupakan parameter nonlokal.

Perubahan parameter nonlokal $\tilde{\gamma}$ dapat mempengaruhi lebar soliton. Semakin besar nilai parameter nonlokal $\tilde{\gamma}$, soliton akan semakin lebar. Sementara itu, gelombang soliton memiliki nilai maksimum U_0 pada titik pusat $X = 0$. Perubahan dari nilai U_0 juga mempengaruhi perubahan lebar soliton. Soliton akan semakin lebar seiring dengan semakin besarnya nilai U_0 .

BIBLIOGRAPHY

- [1] G. P. Agrawal, Application of Nonlinear Fiber Optic, San Diego: Academic Pres Inc., 2001.
- [2] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, Optical Solution: From Fibers to Photonic Crystal, Amsterdam: Academic Press Inc., 2003.
- [3] M. A. Karpierz, A. D. Boardman and G. I. Stegeman, "Nonlocal Soliton," in *Proc. of SPIE*, 2005.
- [4] W. Krolikowski and O. Bang, "Soliton in Nonlocal Nonlinear Media: Exact Result," *Phys. Rev. E.*, p. 63, 2000.
- [5] F. Garzia, C. Sabilia and M. Bertolotti, "New Phase Modulation Technique Based on Spatial Soliton Switching," *IEEE Journal of Lightwave Technology*, pp. 337-338, 2001.
- [6] A. Suryanto, Pemodelan Matematika, Malang: FMIPA Universitas Brawijaya, 2004.