PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINIER ORDE-TINGGI UNTUK AKAR BERGANDA

Mohammad Jamhuri

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
j4m3sh@gmail.com

Abstrak

Dalam paper ini dikembangkan sebuah metode Orde-Empat untuk mencari akar berganda dari persamaan nonlinier. Metode tersebut di dasarkan pada metode Orde-Lima dari Jarrat (untuk akar-akar sederhana) yang hanya memerlukan satu perhitungan fungsi dan tiga kali perhitungan turunan. Efisiensi informasi dari metode tersebut sama dengan metode-metode dengan orde yang lebih rendah. Untuk kasus-kasus akar berganda, telah ditemukan metode-metode yang hanya memerlukan satu kali perhitungan turunan. Sehingga metode-metode tersebut lebih efisien jika dibandingkan dengan metode-metode lainnya.

Kata kunci: *akar berganda, Orde-tinggi, Persamaan Nonlinier.*

1. Pendahuluan

Ada berbagai macam literature untuk masalah penyelesaian persamaan nonlinier dan sistem persamaan nonlinier. Lihat pada contoh Ostrowski (1960), Traub (1964), Neta (1983) dan pada referensi-referensi yang lainnya. Dalam penelitian ini akan dikembangkan sebuah metode titik-tetap Orde-tinggi untuk penyelesaian akar berganda. sebenarnya terdapat banyak metode yang dapat digunakan untuk mencari akar ξ dari m persamaan nonlinier $f(x) = 0$, lihat Neta (1983). Metode Newton hanya salah satu metode orde-satu kecuali yang dimodifikasi sehingga menjadi orde-dua tingkat konvergensinya, lihat Rall (1996) atau Schroder (1996). Untuk memodifikasi diperlukan pengetahuan tentang *multiplicity*. Traub (1964) telah menyarankan penggunaan sebuah metode untuk $f^{(m)}(x)$ atau $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, beberapa metode tersebut memerlukan turunan yang libih tinggi dari pada yang digunakan untuk masalah akar sederhana yang hanya memiliki satu akar. Sehingga yang pertama dari metode-metode tersebut adalah mengetahui *multiplicity* m. Dalam beberapa hal, terdapat metode orde-tinggi yang dikembangkan oleh Hamsen dan Patrick (1977), Victory dan Neta (1987), dan Dong (1987). Karena secara umum tidak dapat diketahui *multiplicity*-nya, Traub (1964) menyarankan sebuah jalan untuk mengaproksimasinya pada saat iterasi.

Sebagai contoh, metode Newton yang dimodifikasi dengan tingkat konvergensi kuadratik adalah

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f_n}{f_n'} \tag{1}$$

Dan metode Halley (1964) dengan tingkat konvergensi kubik adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n}{\frac{m+1}{2m} f_n' - \frac{f_n f_n''}{2f_n'}} \tag{2}$$

Dimana $f_n^{(i)}$ adalah kependekan dari $f_{x_n}^{(i)}$. Metode orde-tiga lainnya telah dikembangkan oleh Victory dan Neta (1987) yang didasarkan metode orde-empat-nya King (1973) untuk akar-akar sederhana.

$$w_n = x_n - \frac{f_n}{f_n'} \tag{3}$$
$$x_{n+1} = w_n - \frac{f(w_n)}{f_n'}\frac{f_n + Af(w_n)}{f_n + Bf(w_n)}$$

Dimana

$$A = \mu^{2m} - \mu^{m+1}$$
$$B = -\frac{\mu^m(m-2)(m-1)+1}{(m-1)^2} \tag{4}$$

Dan

$$\mu = \frac{m}{m-1} \tag{5}$$

Sebelumnya, dua metode orde-tiga telah dikembangkan oleh Dong (1987), keduanya memerlukan informasi yang sama dan keduanya juga didasarkan pada keluarga metode-metode orde-empat (untuk akar-akar sederhana) oleh Jarrat (1966):

$$x_{n+1} = x_n - u_n - \frac{f(x_n)}{\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m+1} f'(x_n - u_n) + \frac{m - m^2 - 1}{(m-1)^2} f'(x_n)} \tag{6}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m}{m+1}u_n - \frac{\frac{m}{m+1}f(x_n)}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m f'\left(x_n - \frac{m}{m+1}u_n\right) - f'(x_n)} \tag{7}$$

Dimana $u_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Langkah awal dari metode yang akan dibentuk disini adalah metode Jarrat (1996) yang diberikan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{a_1 f'(x_n) + a_2 f'(y_n) + a_3 f'(\eta_n)} \tag{8}$$

Dimana u_n seperti diatas dan

$$y_n = x_n - a u_n$$
$$v_n = \frac{f(x_n)}{f'(y_n)} \tag{9}$$
$$\eta_n = x_n - b u_n - c v_n$$

Jarrat (1996) telah menunjukkan bahwa metode ini (untuk akar sederhana) adalah dari orde-lima jika parameter-parameter yang dipilih adalah sebagai berikut:

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{8}, \qquad c = \frac{3}{8}, \qquad a_1 = a_2 = \frac{1}{6}, \qquad a_3 = \frac{2}{3} \tag{10}$$

Metode tersebut memerlukan satu fungsi-dan tiga turunan-untuk setiap langkah perhitungan. Sehingga efisiensi informasi adalah 1.25 (Traub, 1964). Karena Jarrat (1996) tidak memberikan konstanta *error asymptotic*-nya, maka digunakan Redfern (1994) untuk memperolehnya,

$$\frac{1}{24}A_5 + \frac{1}{2}A_4A_2 - \frac{1}{4}A_3^2 + \frac{1}{8}A_2^2A_3 + A_2^4$$

Dimana A_i diberikan oleh (14) dengan $m = 1$.

2. Skema Baru untuk Orde-Tinggi

Untuk memaksimalkan orde-konvergensi untuk sebuah akar ξ dengan perkalian m harus ditentukan enam parameter a, b, c, a_1, a_2, a_3. Misalkan $e_n, \hat{e}_n, \epsilon_n$ adalah *error* pada untuk iterasi ke-n, yaitu:

$$e_n = x_n - \xi$$
$$\hat{e}_n = y_n - \xi$$

$$\epsilon = \eta_n - \xi$$

Jika $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ di expansi menggunakan deret Taylor (setelah dipotong sampai orde ke-N, $N > m$) diperoleh

$$f(x_n) = f(x_n - \xi + \xi) = f(\xi + e_n) \qquad (12)$$
$$= \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\left(e_n^m + \sum_{i=m+1}^{N} A_i e_n^i\right)$$

atau

$$f(x_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} e_n^m \left(1 + \sum_{i=m+1}^{N} B_{i-m} e_n^{i-m}\right) \qquad (13)$$

dimana

$$A_i = \frac{m!\, f^{(i)}(\xi)}{i!\, f^{(m)}(\xi)}, \qquad i > m \qquad (14)$$
$$B_{i-m} = A_i$$

$$f'(x_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!} e_n^{m-1} \left(1 + \sum_{i=m+1}^{N} \frac{i}{m} B_{i-m} e_n^{i-m}\right) \qquad (15)$$

Untuk mengekspansi $f'(y_n)$ dan $f'(\eta_n)$ digunakan manipulasi *symbolic*, seperti Redfern (1994), diperoleh

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!} \hat{e}_n^{m-1} \left(1 + \frac{m+1}{m} B_1 \hat{e}_n + \frac{m+2}{m} B_2 \hat{e}_n^2 + \cdots\right) \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_n &= e_n - a u_n \\ &= \left(1 - \tfrac{a}{m}\right) e_n + \tfrac{a}{m^2} B_1 e_n^2 + \left[\tfrac{2a}{m^2} B_2 - \tfrac{a(m+1)}{m^3} B_1^2\right] e_n^3 + \cdots \\ &= \left(1 - \tfrac{a}{m}\right) e_n + \tfrac{a}{m^2} B_1 e_n^2 + \left[\tfrac{2a}{m^2} B_2 - \tfrac{a(m+1)}{m^3} B_1^2\right] e_n^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2m} B_1 e_n^2 + \frac{1}{m}\left[B_2 - \frac{m+1}{2m} B_1^2\right] e_n^3 + \cdots \end{aligned} \qquad (17)$$

Dimana untuk memudahkan dipilih

$$a = \frac{m}{2} \qquad (18)$$

sehingga

$$f'(y_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!} e_n^{m-1} (c_0 + c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + \cdots) \qquad (19)$$

dimana

$$\begin{aligned} c_0 &= 2^{1-m} \\ c_1 &= \frac{3m-1}{m} 2^{-m} B_1 \\ c_2 &= \left[\frac{4-2m}{m^2} B_1^2 + \frac{3(3m-2)}{2m} B_2\right] 2^{-m} \\ c_3 &= \left[\frac{25m-21}{4m} B_3 + \frac{m^2-21m+34}{2m^2} B_1 B_2 \right. \\ &\qquad \left. - \frac{m^3-12m^2-13m+48}{6m^3} B_1^3\right] 2^{-m} \end{aligned} \qquad (20)$$

Error-nya diberikan oleh

$$\epsilon_n = e_n - bu_n - cv_n = \lambda e_n + \frac{2b + \hat{c}(m-1)}{2m^2} B_1 e_n^2 \tag{21}$$
$$+ \left[\frac{8b + (5m-6)\hat{c}}{4m^2} B_2 - \frac{4b(m+1) - (3m^2-7)\hat{c}}{4m^3} B_1^2\right] e_n^3 + \cdots$$

Dimana

$$\hat{c} = 2^{m-1}c \tag{22}$$
$$\lambda = 1 - \frac{b + \hat{c}}{m}$$

Berikutnya ekspansi $f'(\eta_n)$ dalam bentuk e_n

$$f'(\eta_n) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!} \epsilon_n^{m-1} \left(1 + \frac{m+1}{m} B_1 \epsilon_n + \frac{m+2}{m} B_2 \epsilon_n^2 + \cdots\right)$$
$$= \frac{f^{(m)}(\xi)}{(m-1)!} e_n^{m+1} (d_0 + d_1 e_n + d_2 e_n^2 + \cdots) \tag{23}$$

dimana

$$d_0 = \lambda^{m-1}$$
$$d_1 = \frac{\lambda^{m-2} B_1}{m^3} \Big\{(m^2 + b^2)(m+1) - bm(m+3) + (m+1)\hat{c}^2$$
$$+ \left[2b(m+1) - m\frac{m^2 - 6m - 3}{2}\right] \hat{c}\Big\} \tag{24}$$
$$d_2 = -\frac{\lambda^{m-3}}{32m^5} B_1^2 [\alpha_1 b + \beta_1 \hat{c} + \gamma_1 \hat{c} + \delta_1 \hat{c}^3]$$
$$+ \frac{\lambda^{m-3}}{m^5} B_2 [\alpha_2 + \beta_2 \hat{c} + \gamma_2 \hat{c}^2 + \delta_2 \hat{c}^3 + \gamma_3 \hat{c}^4]$$

Dimana

$$\alpha_1 = 16[2m(m+1)b^2 - m^2(m-7)b + 2m^2(m+1)]$$
$$\beta_1 = 8m[6b^2(m+1)(m+3) + b(m^3 - 15m^2 - m - 1)$$
$$- m(m-1)(m^2 - 2m - 7)]$$
$$\gamma_1 = 4[8bm^2(m+1) + m(m-1)(m^3 - 6m^2 - 3m - 16)$$
$$+ 4m^2(m-1)]$$
$$\delta_1 = 16m^2(m-1)$$
$$\alpha_2 = 32[b^4(m+2) - 4b^3m^2 + 2b^2m(m+4)(2m-1)$$
$$- 2bm^3(m+5) + m^5(m+2)]$$
$$\beta_2 = 8[16b^3(m+2) - 48b^2m(m+2) - bm^2(5m^2 - 51m - 98)$$
$$+ m^3(5m^2 - 27m - 26)]$$
$$\gamma_2 = 8[24b^2(m+2) - 48bm(m+2) - m^2(5m^2 - 35m - 42)]$$
$$\delta_2 = 128[b(m+2) - m(m+1)]$$
$$\gamma_3 = 32(m+2)$$

Berikutnya substitusikan $(13), (15), (19)$ dan (23) kedalam (8) dan expansi kuasi $\frac{f_n}{a_1 f'(x_n) + a_2 f'(y_n) + a_3 f'(\eta_n)}$ menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f_n}{a_1 f'(x_n) + a_2 f'(y_n) + a_3 f'(\eta_n)}$$
$$= C_1^1 e_n + C_2^1 B_1 e_n^2 + (C_3^1 B_1^2 + C_3^2 B_2) e_n^3 + (C_4^1 B_1^3 + C_4^2 B_1 B_2 + \tag{26}$$
$$C_4^3 B_3) e_n^4 + \cdots$$

Dimana koefisien C_i^j tergantung pada parameter-parameter b, c, a_1, a_2, a_3. Kelima parameter tersebut dapat digunakan untuk menghilangkan koefisien e_n, e_n^2, e_n^3 dan e_n^4. Sehingga orde dari metode tersebut adalah $p = 4$. Sebenarnya, kecuali untuk $m = 2$, digunakan $b = a = \frac{m}{2}$ dan sehingga hanya 4 parameter yang di gunakan. Ini merupakan syarat perlu untuk memperoleh metode orde-empat.

TABEL 1. Hasil dari contoh 2

n	x	f	x	f
0	0.8	0.1296	0.6	0.4096
1	1.00074058	0.21954564(−5)	1.02772227	0.31600247(−2)
2			1.00000014	0.750396(−13)

Karena sangat kompleknya persamaan di atas, parameter-parameter yang digunakan untuk $m = 2,3,4,5$ dan 6 diberikan dalam tabel 2 berikut ini. Metode-metode tersebut semuanya memiliki orde-empat.

TABEL 2. Parameter-parameter hasil contoh 2

m	2	2	3	4	5	6
a	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
b	$free$	$free$	$free$	2	$\frac{5}{2}$	3
c	$free$	$\frac{1-b}{3}$	$\frac{3}{5}-\frac{b}{4}$	0.064783	0.021737	0.008212
a_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-2b}{2}$	$\frac{25}{108}b-\frac{43}{72}$	−0.437458	−0.430345	−0.368149
a_2	2	$3(b-1)$	$4-\frac{25}{72}b$	7.904129	18.815436	39.687683
a_3	0	2	$-\frac{125}{72}$	−5.912818	−15.894083	−35.699379
r_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}b-\frac{13}{18}$	$\frac{5b}{1296}-\frac{37}{108}$	−0.236261	−0.164791	−0.120179
r_2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}-\frac{b}{2}$	$\frac{25}{81}-\frac{5b}{972}$	0.154675	0.101387	0.073031
r_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{25}$	0.083527	0.069672	0.057025

Batas kesalahan diberikan oleh

$$e_{n+1} = (r_1 B_1 B_2 + r_2 B_1^3 + r_3 B_3) e_n^4 \tag{27}$$

Dimana r_1, r_2, dan r_3 adalah yang diberikan dalam table diatas untuk setiap m. Untuk $m = 3$, dapat dipilih dengan parameter b dengan bebas untuk menyamakn $a = \frac{3}{2}$.

Ringkasnya, dalam penelitian ini telah dihasilkan metode orde-empat yang menggunakan satu fungsi dan tiga turunan dalam setiap iterasi. Efisiensi informasi pada metode-metode tersebut adalah 1, seperti metode-metode yang telah disebutkan diatas untuk akar-akar yang banyak. Indeks efisiensinya adalah 1.4142 yang lebih rendah daripada metode-metode orde-tiga. Dalam hal $m = 2$ diperoleh sebuah metode yang hanya memerlukan dua perhitungan turunan ($a_3 = 0$) sehingga efisiensi informasinya adalah $4/3$ dan indeks efisiensinya adalah 1.5874.

3. Simulasi Numerik

Dalam contoh pertama ini digunakan sebuah polynomial kuadratik yang mempunyai dua akar pada $\xi = 1$.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad (28)$$

Dalam contoh ini, dimulai dengan $x_0 = 0$, dan kekonvergenannya diperoleh dalam 1 iterasi. Dalam contoh kedua, diambil polynomial yang mempunyai dua akar pada $\xi = \pm 1$.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \qquad (29)$$

Dimulai pada $x_0 = 0.8$, metode ini konvergen dalam 1 iterasi. Jika dimulai dengan $x_0 = 0.6$, metode ini memerlukan 2 kali iterasi. Hasil perhitungannya diberikan dalam table 1.
Hasil yang sama juga diperoleh jika dimulai dengan $x_0 = -0.8$ dan $x = -0.6$ untuk konvergen pada $\xi = -1$.
Contoh berikutnya adalah polinomial dengan 3 akar pada $\xi = 1$.

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6 \qquad (30)$$

Iterasinya dimulai dengan $x_0 = 0$ dan hasilnya diringkas dalam tabel 3. Contoh lainnya dengan 2 akar pada $\xi = 0$ adalah

$$f(x) = x^2 e^x \qquad (31)$$

Dimulai pada $x_0 = 0.1$ metode ini konvergen dalam 1 iterasi, tetapi jika nilai awalnya dimulai pada $x_0 = 0.2$, metode ini konvergen dalam 1 iterasi. Hasil perhitungannya diberikan dalam tabel 4. Contoh terakhir adalah polinomial yang mempunyai akar ganda pada $\xi = 1$

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19 \qquad (32)$$

TABEL 3. Hasil dari contoh 3

n	x	f
0	0	-6
1	0.95239072	$-0.23148417(-3)$
2	0.99999683	$-0.63(-16)$

TABEL 4. Hasil dari contoh 4

n	x	f	x	f
0	0.1	$0.11051709(-1)$	0.2	$0.48856110(-1)$
1	$0.12654311(-4)$	$0.16013361(-9)$	$0.17709827(-3)$	$0.31369352(-7)$
2	$0.3739(-20)$	0	$0.14341725(-15)$	0

TABEL 5. Hasil dari contoh 5

n	x	f
0	0	19
1	1.46056319	9.725126111
2	1.00101187	$0.368806435(-4)$
3	1	0

Daftar Pustaka

Dong, C., (1987), A family of multipoint iterative function for finding multiple zeros of nonlinear equations, *Int. J. Comput. Math*., 21, pp 363-367

Halley, E., (1964), A New, Exact and Easy Method of Finding The Roots of Equations Generally and that without Any Previous Reduction., Phil. *Trans. R. Soc. London*, 18, pp 136-148.

Hansen, E., Patrick, M., (1977), A family of root finding methods, *Numer. Math.*, 27, pp 257-269.

Jarrat, P., (1966), Some Fourth Order Multipoint Methods for Solving Equations, *Math. Comp*., 20, pp 434-437.

Jarrat, P., (1996), Multipoints Iterative Methods for Solving Certain Equations, *Comput. J*., 8, pp 398-400.

King, R.F., (1973), A Family of Fourth Order Methods for Nonlinear Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 10, pp 876-879.

Neta, B., (1983), *Numerical Methods for The* Solution *of Equations*, Net-A-Sof, California.

Ostrowski, A.M., (1960), *Solution of Equations and System of Equations*, Academic Press, New York.

Rall, L.B., (1996), Convergence of The Newton Process to Multiple Solutions, *Numer. Math.*, 9, pp 23-37.

Redfern, D., (1994), *The Maple Handbook*, Springer-Verlag, New York.

Schroder, E., (1996), Uber unendlich viele algorithm zur auflosung der gleichungen, *Math. Ann.*, 2, pp 23-37.

Traub, J.F., (1964), *Iterative Methods for the* Soslution *of Equations*, Prentice Hall, New Jersey.

Victory, H.D., Neta, B., (1987), A higher order method for multiple roots of equations, *Int. J. Comput. Math*., 21, pp 363-367.