

PENJADWALAN JALUR BUS DALAM KOTA DENGAN MODEL PETRINET DAN ALJABAR MAX-PLUS (STUDI KASUS BUSWAY TRANSJAKARTA)

Winarni

Jurusan Matematika FKIP Universitas Adhi Buana Surabaya
email: winarni_its@yahoo.com

ABSTRAK

Jaringan jalur bus dalam kota merupakan salah satu fasilitas transportasi umum yang memegang peranan penting dalam kehidupan masyarakat kota yang mempunyai karakteristik mobilitasnya cukup tinggi. Jaringan bus TransJakarta (Busway) di Jakarta merupakan salah satu contohnya. Jaringan bus tersebut dibangun antara lain sebagai solusi permasalahan di sektor angkutan umum dan memberikan pilihan solusi untuk mengatasi kemacetan lalu lintas di Jakarta. Salah satu masalah penting dalam sistem transportasi tersebut yang menjadi keluhan masyarakat adalah mengenai ketidakpastian waktu tunggu kedatangan bus di tiap-tiap halte, hal ini dimungkinkan antara lain karena belum adanya penjadwalan yang baik pada sistem tersebut. Dalam penelitian ini akan dilakukan penjadwalan keberangkatan bus menggunakan pendekatan aljabar max-plus dengan terlebih dahulu mengkonstruksi model sistem dengan Petrinet. Studi kasus dalam penelitian ini adalah jaringan bus TransJakarta. Dari penelitian ini diharapkan memperoleh desain jadwal keberangkatan bus di tiap halte pada masing-masing koridor.

Kata kunci: jalur bus dalam kota, penjadwalan, aljabar max-plus, Petrinet, busway.

PENDAHULUAN

Karakteristik daerah perkotaan yaitu antara lain padat penduduknya dan masyarakatnya mempunyai mobilitas yang cukup tinggi tersebut menjadikan masyarakat kota sangat bergantung pada kebutuhan transportasi. Tentunya hal ini berdampak besar pada arus lalu lintas di jalan raya, sehingga kepadatan bahkan kemacetan arus lalu lintas pun hampir tidak bisa dihindarkan masyarakat setiap hari. Terlebih lagi dengan semakin meningkatnya taraf perekonomian masyarakat dan semakin mudahnya kredit kendaraan bermotor yang tidak diiringi dengan adanya upaya peningkatan dan perbaikan mutu fasilitas dan regulasi sistem transportasi umum secara optimal mengakibatkan pengguna kendaraan pribadi semakin meningkat. Pemandangan kemacetan arus lalu lintas dan dampaknya antara lain polusi udara, stress, pemborosan bahan bakar minyak (BBM) dan lain-lain adalah hal menyedihkan yang harus dihadapi dan dialami masyarakat hampir setiap hari.

Peningkatan dan perbaikan mutu fasilitas dan regulasi dalam pelayanan transportasi umum secara optimal yang mampu memberikan kepuasan kepada masyarakat, setidaknya dapat memberikan alternatif pada masyarakat untuk lebih memilih menggunakan jasa transportasi umum daripada menggunakan kendaraan pribadi sendiri-sendiri. Jika masyarakat sudah lebih tertarik menggunakan jasa transportasi umum, hal ini berarti penggunaan kendaraan pribadi

berkurang sehingga mengurangi kemacetan arus lalu lintas di jalan raya dan secara tidak langsung ikut memberikan kontribusi pada penghematan BBM.

Saat ini di Jakarta khususnya sedang terus dikembangkan jaringan transportasi TransJakarta dalam upaya untuk mengatasi kemacetan, salah satunya adalah busway. Jika dilihat dari perencanaannya dan terlepas dari kesadaran masyarakat mengenai jalur khusus busway yang relatif masih kurang, sistem tersebut mempunyai peluang besar untuk berhasil, terlebih lagi ketika harga BBM semakin mahal. Mengutip suatu artikel mengenai busway, dikatakan bahwa peranan busway semakin penting ketika harga BBM naik (<http://bataviabusway.blogspot.com>).

Namun, sejauh ini masih banyak keluhan dari pengguna antara lain mengenai ketidakpastian kedatangan bus di tiap-tiap halte, terkadang cepat terkadang cukup lama bahkan ketika bus sudah datang di halte namun bus sudah penuh penumpang. Dengan sistem yang ada saat ini, para pengguna jasa bus TransJakarta seringkali harus menunggu bus dengan ketidakpastian. Meskipun kondisi halte dalam keadaan kosong, tidak menjamin penumpang bisa langsung naik bus yang datang berikutnya, terutama pada jam-jam sibuk (<http://TransJakartainfo.com>). Hal ini dimungkinkan karena belum adanya penjadwalan pada sistem tersebut yang dapat mengoptimalkan alokasi jumlah armada sehingga kebutuhan

pengguna jasa bus TransJakarta dapat terpenuhi selain kendala operasional lainnya.

Kajian yang mengarah pada tujuan memperbaiki sistem transportasi umum perlu terus dikembangkan. Terkait dengan masalah ini, mulai tahun 90an hingga saat ini kajian teori Aljabar Max-Plus untuk pemodelan, analisis dan kontrol antara lain dalam jaringan transportasi, bidang manufaktur, jaringan komunikasi dan sistem komputer terus berkembang.

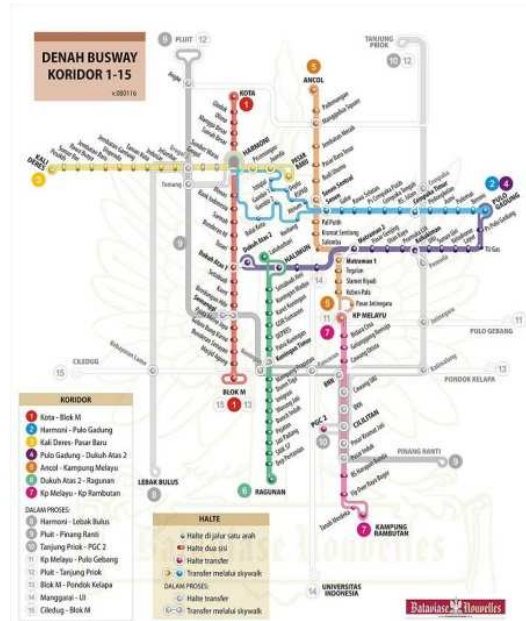
Berdasarkan uraian di atas, dalam penelitian ini dikaji model Petrinet dan model aljabar max-plus untuk mendesaian penjadwalan suatu jaringan transportasi umum dalam hal ini jalur bus dalam kota dengan studi kasus jaringan busway TransJakarta.

SISTEM JARINGAN BUSWAY TRANSJAKARTA

Jakarta adalah salah satu kota termacet di Indonesia. Saat ini, di Jakarta sedang terus dikembangkan jaringan transportasi dalam upaya untuk mengatasi kemacetan, antara lain jaringan busway TransJakarta. Adapun denah jaringan busway TransJakarta baik yang sudah beroperasi atau sedang dalam proses dapat dilihat pada Gambar 1. (<http://bataviabusway.blogspot.com>)

Dalam makalah ini, yang akan dikaji adalah jaringan bus TransJakarta (busway) di Jakarta dengan jumlah koridor yang sudah aktif beroperasi sampai dengan bulan November 2008

yaitu sebanyak 7 koridor seperti dalam Gambar 1. Ada sedikit perubahan pada koridor 6, yaitu rute Ragunan–Halimun menjadi Ragunan–Dukuh Atas 2. Sedangkan jumlah armada maksimum yang dialokasikan untuk tiap-tiap koridor berdasarkan data yang diperoleh dari Kantor Badan Layanan Umum TransJakarta dapat dilihat pada Tabel 1. (untuk hari kerja dari jam 05.00-08.00)



Gambar 1. Denah Busway Koridor 1 s/d 15

Tabel 1. Alokasi Bus Tiap Koridor Busway

Koridor 1 (Blok M -Kota)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Blok M/M.Agung	Kota/H.I
05:00 - 06:00	4,5	20	12	8
06:00 - 07:00	1,8	50	17	13
07:00 - 08:00	1,1	80	18	14
Koridor 2 (Pulo Gadung - Harmoni)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Pulo Gadung/Asmi	Harmoni/Pedongkelan
05:00 - 06:00	5	20	12	8
06:00 - 07:00	2	43	13	10
07:00 - 08:00	2	43	0	0
Koridor 3 (Kalideres - Harmoni - Pasar Baru)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Kalideres	Harmoni
05:00 - 06:00	6	20	8	12
06:00 - 07:00	2,4	46	16	10
07:00 - 08:00	2,4	46	0	0
Koridor 4 (Pulo Gadung - Dukuh Atas 2)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	PuloGadung	Dukuh Atas 2
05:00 - 06:00	5	20	12	8
06:00 - 07:00	3	30	6	4
07:00 - 08:00	3	30	0	0
Koridor 5 (Ancol - Kampung Melayu)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Ancol	Kp. Melayu
05:00 - 06:00	5,6	18	6	12
06:00 - 07:00	4,3	22	2	3
07:00 - 08:00	3,7	27	2	2
Koridor 6 (Ragunan - Dukuh Atas 2)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Ragunan	Dukuh Atas 2
05:00 - 06:00	5	20	12	8
06:00 - 07:00	3	31	7	4
07:00 - 08:00	3	31	0	0

Tabel 1. (lanjutan...)

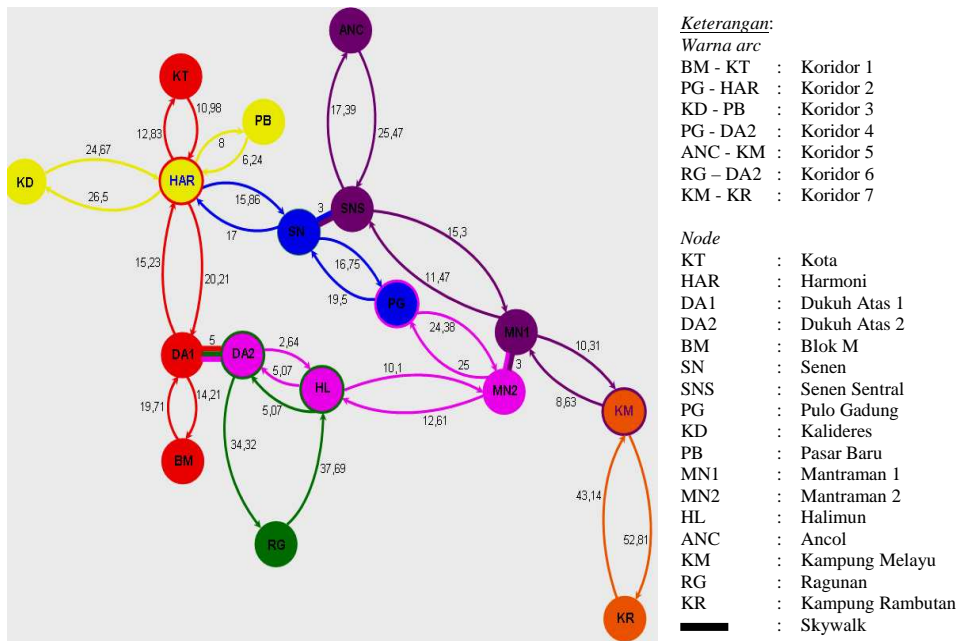
Koridor 7 (Kampung Melayu - Kampung Rambutan)			Pemberangkatan bus dari Pool ke	
Periode	Headway (menit)	Alokasi bus (unit)	Kp. Melayu	Kp. Rambutan
05:00 - 06:00	5	20	8	12
06:00 - 07:00	3,3	30	0	10
07:00 - 08:00	3,3	30	0	0

Ket: Headway adalah interval waktu di ujung koridor antara keberangkatan bus dengan keberangkatan bus sebelumnya.

Adapun data waktu tempuh antar halte di tiap koridor yang diperoleh dari observasi di lapangan selama beberapa hari yaitu tanggal 25–29 Agustus, 21–23 Oktober, dan 12 November 2008. Namun, karena terbatasnya jumlah halaman makalah ini, data tersebut tidak dapat ditampilkan lengkap dalam makalah ini dan

hanya dirangkum dalam tabel 2. Data tersebut selanjutnya diasumsikan tetap.

Berdasarkan data-data di atas dapat disusun graf dari jaringan busway adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Graf Jaringan Busway

MODEL PETRINET

Petrinet dikembangkan pertama kali oleh C.A. Petri pada awal 1960-an. Ini merupakan salah satu alat untuk memodelkan sistem event diskrit. Pada Petrinet, event berkaitan dengan transisi dan keadaan (*state*) berkaitan dengan place. Dalam sistem event diskrit, perubahan keadaan terjadi karena adanya perubahan event. Agar suatu event dapat terjadi, beberapa keadaan harus dipenuhi terlebih dahulu. Place dapat berfungsi sebagai input atau output suatu transisi. Place sebagai input menyatakan keadaan yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Setelah transisi terjadi maka keadaan akan berubah. Place yang menyatakan keadaan tersebut adalah output dari transisi. Berikut ini adalah definisi Petrinet:

Definisi 1. (Cassandras, 1993).
 Petrinet adalah 4-tuple (P, T, A, w) dengan
 P : himpunan berhingga place, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,

T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,
 A : himpunan arc, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
 w : fungsi bobot, $w : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$. □

Petrinet dapat digambarkan sebagai graf berarah. Node dari graf berupa place yang diambil dari himpunan place P atau transisi yang diambil dari himpunan transisi T . Pada graf Petrinet diperbolehkan menggunakan beberapa arc untuk menghubungkan dua node atau ekuivalen dengan memberikan bobot ke setiap arc yang menyatakan jumlah arc. Struktur ini dikenal dengan struktur multigraf. Dalam membahas representasi Petrinet secara grafik akan digunakan notasi $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing-masing menyatakan himpunan place input ke transisi t_j dan output dari transisi t_j . Secara matematis definisi tersebut dapat ditulis menjadi persamaan berikut (Cassandras, 1993)

$$I(t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$$

$$O(t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$$

Dengan istilah lain, $I(t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$ menunjukkan $I(t_j)$ adalah himpunan upstream place untuk transisi t_j dan $O(t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$ menunjukkan $O(t_j)$ himpunan downstream place untuk transisi t_j .

Notasi yang sama dapat digunakan untuk mendeskripsikan input dan output transisi untuk place p_i , yaitu

$$I(p_i) = \{t_j : (t_j, p_i) \in A\}$$

$$O(p_i) = \{t_j : (p_i, t_j) \in A\}$$

$I(p_i) = \{t_j : (t_j, p_i) \in A\}$ menunjukkan $I(p_i)$ adalah himpunan upstream transisi untuk place p_i dan $O(p_i) = \{t_j : (p_i, t_j) \in A\}$ menunjukkan $O(p_i)$ himpunan downstream transisi untuk place p_i .

Grafik Petrinet terdiri dari dua macam node yaitu lingkaran dan garis/persegipanjang kecil. Lingkaran menyatakan place sedangkan garis/persegipanjang kecil menyatakan transisi. Arc disimbolkan dengan panah yang menghubungkan place dan transisi. Pada Petrinet tidak diperkenankan adanya arc antara place dengan place atau antara transisi dengan transisi. Arc yang menghubungkan place p_i ke transisi t_j berarti $p_i \in I(t_j)$. Jika bobot arc dari place p_i ke transisi t_j adalah k ditulis $w(p_i, t_j) = k$, maka terdapat k arc dari place p_i ke transisi t_j atau sebuah arc dengan bobot k . Transisi pada Petrinet menyatakan event pada sistem event diskrit dan place merepresentasikan kondisi agar event dapat terjadi. Token adalah sesuatu yang diletakkan di place yang menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Secara grafik token digambarkan dengan dot dan diletakkan di dalam place. Jika jumlah token banyak maka dituliskan dengan angka.

Definisi 2. (Cassandras, 1993).

Penanda (marking) x pada Petrinet adalah fungsi $x : P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$. □

Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat nonnegatif yang menyatakan jumlah token yaitu

$$X = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T.$$

Jumlah elemen x sama dengan banyak place di Petrinet. Elemen ke- i pada vektor X merupakan jumlah token pada place p_i , $x(p_i) \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definisi 3. (Cassandras, 1993).

Petrinet bertanda (marked) adalah 5-tuple (P, T, A, w, x_0) dimana (P, T, A, w) adalah Petrinet dan X_0 adalah penanda awal. □

Selanjutnya Petrinet bertanda cukup disebut Petrinet dan istilah tanda tersebut disebut token. Seperti pemodelan sistem pada umumnya, maka harus didefinisikan keadaan (state) pada Petrinet. Keadaan pada Petrinet adalah token Petrinet.

Definisi 4. (Cassandras, 1993).

Keadaan (state) Petrinet bertanda adalah

$$X = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T. \quad \square$$

Jumlah token pada place adalah sebarang bilangan bulat nonnegatif, tidak harus terbatas (bounded). Ruang keadaan (state space) X pada Petrinet bertanda dengan n place didefinisikan oleh semua vektor berdimensi n dengan elemen-elemennya adalah bilangan bulat nonnegatif, sehingga $x(p_i) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tetapi, dalam menyusun Petrinet perlu dihindari terjadinya ledakan (blow up) token pada satu atau lebih token, karena hal ini menunjukkan Petrinet tersebut tidak stabil.

Definisi 5. (Cassandras, 1993).

Transisi $t_j \in T$ pada Petrinet bertanda dikatakan enabled jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \quad \forall p_i \in I(t_j) \quad \square$$

Definisi 6. (Cassandras, 1993).

Fungsi perubahan keadaan,

$$f : \{0, 1, 2, \dots\}^n \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}^n$$

pada Petrinet bertanda (P, T, A, w, X_0) terdefinisi untuk transisi $t_j \in T$ jika dan hanya jika

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \quad \forall p_i \in I(t_j)$$

Jika $f(x, t_j)$ terdefinisi maka ditulis $x' = f(x, t_j)$, dimana

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \square$$

Keadaan di mana tidak ada transisi yang enabled disebut keadaan terminal dan Petrinet mengalami *deadlock*. Sistem dikatakan tidak stabil jika terjadi ledakan (blow up) pada nilai variabel keadaannya. Variabel keadaan dari Petrinet adalah jumlah token pada setiap place. Jika jumlah token pada satu atau lebih place bertambah menuju ke tak hingga maka dikatakan Petrinet tidak stabil. Penyusunan Petrinet yang baik diharapkan menghindari terjadinya *deadlock* dan tidak stabil

Untuk menyusun model Petrinet dan model Aljabar Max-Plus yang dibahas dalam penelitian ini, diperlukan spesifikasi fisik sebagai berikut:

- a) Jalur-jalur dalam jaringan busway (koridor), seperti yang sudah dipaparkan di atas.
- b) Jumlah dan distribusi bus di tiap-tiap koridor dapat dilihat pada Tabel 2.
- c) Aturan sinkronisasi antar keberangkatan bus

Berdasarkan data waktu tempuh rata-rata antar halte dan data alokasi bus tiap koridor serta mempertimbangkan kondisi halte ujung dan halte transit, maka diperoleh distribusi bus di tiap lintasan (dengan waktu referensi 07.30) seperti pada Tabel 2 di bawah ini. Data tersebut selanjutnya diasumsikan tetap.

Tabel 2. Waktu Tempuh, Distribusi Bus, dan Pendefinisian Variabel

Koridor	Variabel	Keberangkatan dari	Menuju ke halte	Waktu Tempuh (menit)	Jumlah bus yang beroperasi
1	x_1	Blok M	Dukuh Atas 1	19,71	18
1	x_2	Dukuh Atas 1	Harmoni	15,23	12
1	x_3	Harmoni	Kota	12,83	7
1	x_4	Kota	Harmoni	10,98	9
1	x_5	Harmoni	Dukuh Atas 1	20,21	17
1	x_6	Dukuh Atas 1	Blok M	14,21	5
2	x_7	Pulo Gadung	Senen	19,5	10
2	x_8	Senen	Harmoni	17	9
2	x_9	Harmoni	Senen	15,86	8
2	x_{10}	Senen	Pulo Gadung	16,75	8
3	x_{11}	Kalideres	Harmoni	24,67	10
3	x_{12}	Harmoni	Pasar Baru	8	4
3	x_{13}	Pasar Baru	Harmoni	6,24	2
3	x_{14}	Harmoni	Kalideres	26,5	11
4	x_{15}	Pulo Gadung	Mantraman 2	24,38	9
4	x_{16}	Mantraman 2	Halimun	12,61	4
4	x_{17}	Halimun	Dukuh Atas 2	5,07	2
4	x_{18}	Dukuh Atas 2	Halimun	2,64	1
4	x_{19}	Halimun	Mantraman 2	10,1	3
4	x_{20}	Mantraman 2	Pulo Gadung	25	8
5	x_{21}	Ancol	Sentral Senen	25,47	8
5	x_{22}	Sentral Senen	Mantraman 1	15,3	4
5	x_{23}	Mantraman 1	Kp. Melayu	10,31	2
5	x_{24}	Kp. Melayu	Mantraman 1	8,63	2
5	x_{25}	Mantraman 1	Sentral Senen	11,47	3
5	x_{26}	Sentral Senen	Ancol	17,39	6
6	x_{27}	Ragunan	Halimun	37,69	13
6	x_{28}	Halimun	Dukuh Atas 2	5,07	2
6	x_{29}	Dukuh Atas 2	Ragunan	34,32	11
7	x_{30}	Kp. Melayu	Kp. Rambutan	52,81	16
7	x_{31}	Kp. Rambutan	Kp. Melayu	43,14	13

Berdasarkan observasi di lapangan mengenai kondisi sistem jaringan busway dan berdasarkan hasil perhitungan jumlah bus yang beroperasi pada waktu referensi pukul 07.30 seperti terlihat pada Tabel 2 di atas, maka dapat disusun aturan sinkronisasi pada jaringan busway dengan 7 koridor tersebut sebagai berikut

i) Koridor 1 (BLOK M - KOTA): BM - HAR - DA1 - KT

- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari DA1 menuju HAR (ke arah KT) dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari DA1 menuju BM keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari HL menuju DA2 (yang berasal dari MN2) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari HL menuju DA2 (yang berasal dari RG) menuju DA2 dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari DA2 ke DA1.
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HAR menuju KT dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HAR menuju DA1 (ke arah BM) keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-9)$ dari KD

menuju HAR (ke arah PB), menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari PB menuju HAR (ke arah KD), dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari SN menuju HAR (yang berasal dari PG).

ii) Koridor 2 (PULO GADUNG - HARMONI): PG - SN - HAR

- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari PG menuju SN (ke arah HAR) menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-7)$ dari MN2 menuju PG (yang berasal dari DA2).
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari SN menuju HAR menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-7)$ dari ANC menuju SNS (ke arah KM) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-2)$ dari MN1 menuju SNS (ke arah ANC) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari SNS ke SN. Dan sedikit berbeda dengan lintasan lain, halte-halte yang disinggahi dari SN ke HAR dan dari HAR ke SN berbeda, sehingga keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari SN menuju HAR juga

- menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari HAR menuju SN.
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HAR menuju SN menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-9)$ dari KD menuju HAR (ke arah PB), menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari PB menuju HAR (ke arah KD), menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari KT menuju HAR (ke arah BM) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-11)$ dari DA1 menuju HAR (ke arah KT).
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari SN menuju PG menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-7)$ dari ANC menuju SNS (ke arah KM) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-2)$ dari MN1 menuju SNS (ke arah ANC) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari SNS ke SN.
- iii) Koridor 3 (KALIDERES – PASAR BARU): KD – HAR – PB
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HAR menuju PB dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HAR menuju KD keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari KT menuju HAR (ke arah BM), menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-11)$ dari DA1 menuju HAR (ke arah KT), dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari SN menuju HAR.
- iv) Koridor 4 (PULO GADUNG – DUKUH ATAS 2) : PG – MN2 – HL – DA2
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari PG menuju MN2 (ke arah DA2) menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-7)$ dari SN menuju PG (yang berasal dari HAR).
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari MN2 menuju HL dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari MN2 menuju PG keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-3)$ dari SNS menuju MN1 (ke arah KM) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari KM menuju MN1 (ke arah ANC) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari SNS ke SN.
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari DA2 menuju HL (ke arah PG) menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-17)$ dari BM menuju DA1 (ke arah KT) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-16)$ dari HAR menuju DA1 (ke arah BM) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari DA1 ke DA2.
- v) Koridor 5 (ANCOL – KAMPUNG MELAYU): ANC – SNS – MN1 – KM
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari HL menuju MN2 (ke arah PG) menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-12)$ dari RG menuju HL (ke arah DA2).
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari SNS menuju MN1 (ke arah KM) dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari SNS menuju ANC keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-7)$ dari HAR menuju SN (ke arah PG) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-9)$ dari PG menuju SN (ke arah HAR) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari SN ke SNS.
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari MN1 menuju KM dan keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari MN1 menuju SNS (ke arah ANC) keduanya menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-8)$ dari PG menuju MN2 (ke arah DA2) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-2)$ dari HL menuju MN2 (ke arah PG) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari MN2 ke MN1.
 - Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari KM menuju MN1 (ke arah ANC) menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-12)$ dari KR menuju KM.
- vi) Koridor 6 (RAGUNAN – DUKUH ATAS 2): RG – HL – DA2 / DA2 – RG
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari DA2 menuju RG menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari HL menuju DA2 (yang berasal dari MN2). Selain itu juga menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-17)$ dari BM menuju DA1 (ke arah KT) dan menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-16)$ dari HAR menuju DA1 (ke arah BM) dan masing-masing ditambah waktu tempuh rata-rata untuk berjalan lewat skywalk dari DA1 ke DA2.
- vii) Koridor 7 (KAMPUNG MELAYU – KAMPUNG RAMBUTAN): KM – KR
- Keberangkatan bus yang ke- $(k+1)$ dari KM menuju KR menunggu kedatangan bus yang berangkat ke- $(k-1)$ dari MN1 menuju KM.
- Berdasarkan spesifikasi fisik di atas, maka dapat disusun model Petrinet untuk penjadwalan keberangkatan bus. Selanjutnya dari model

Petrinet berikut, dapat diterjemahkan menjadi model aljabar max-plus (dan sebaliknya).

Pertama, disusun Petrinet untuk tiap koridor, kemudian disinkronisasi berdasarkan aturan sinkronisasi di atas. Petrinet yang disusun berikut ini dimaksudkan untuk menggambarkan sinkronisasi antar keberangkatan bus berdasarkan aturan sinkronisasi yang telah diberikan di atas, namun tidak dimaksudkan untuk menggambarkan pergerakan jaringan bus secara simultan. Dengan pendefinisian Petrinet sebagaimana telah dijelaskan di atas, maka Petrinet yang disusun untuk permasalahan ini adalah Petrinet dengan waktu yang dikarakterisasi oleh P, T, A, w, X_0 , dan T , yaitu sebagai berikut:

P : himpunan berhingga place, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{43}\}$, dengan jumlah token pada place p_1, p_2, \dots, p_{31} menunjukkan jumlah distribusi bus pada masing-masing rute yang bersesuaian, sedangkan token pada $p_{32}, p_{33}, \dots, p_{43}$ tidak menunjukkan jumlah bus, namun dikondisikan untuk menyusun Petrinet yang sesuai untuk permasalahan ini.

T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{31}\}$, dalam hal ini akan digunakan notasi untuk masing-masing transisi adalah x yaitu $T = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{31}\}$. Transisi-transisi tersebut merepresentasikan event keberangkatan bus di halte-halte ujung koridor dan halte transit. Hal ini bertujuan agar sesuai dengan notasi yang digunakan dalam penyusunan model aljabar max-plus.

A : himpunan arc, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, yaitu $A = \{(x_{01}, p_1), (p_1, x_{02}), (x_{02}, p_2), (p_2, x_{03}), (x_{03}, p_3), (p_3, x_{04}), (x_{04}, p_4), (p_4, x_{05}), (x_{05}, p_5), (p_5, x_{06}), (x_{06}, p_6), (p_6, x_{01}), (p_2, x_{14}), (x_{14}, p_2), (p_2, x_{12}), (x_{12}, p_2), (p_2, x_{09}), (x_{09}, p_2), (x_{03}, p_8), (p_8, x_{03}), (x_{03}, p_{11}), (p_{11}, x_{03}), (x_{03}, p_{13}), (p_{13}, x_{03}), (x_{05}, p_{11}), (p_{11}, x_{05}), (x_{05}, p_{13}), (p_{13}, x_{05}), (x_{05}, p_8), (p_8, x_{05}), (x_{07}, p_7), (p_7, x_{08}), (x_{08}, p_8), (p_8, x_{09}), (x_{09}, p_9), (p_9, x_{10}), (x_{10}, p_{10}), (p_{10}, x_{07}), (x_{07}, p_{20}), (p_{20}, x_{07}), (x_{08}, p_9), (p_9, x_{08}), (x_{09}, p_{11}), (p_{11}, x_9), (x_{09}, p_{13}), (p_{13}, x_{09}), (x_{09}, p_4), (p_4, x_{09}), (x_{11}, p_{11}), (p_{11}, x_{12}), (x_{12}, p_{12}), (p_{12}, x_{13}), (x_{13}, p_{13}), (p_{13}, x_{14}), (x_{14}, p_{14}), (p_{14}, x_{11}), (x_{12}, p_4), (p_4, x_{12}), (x_{14}, p_4), (p_4, x_{14}), (x_{12}, p_9), (p_9, x_{12}), (x_{14}, p_9), (p_9, x_{14}), (x_{15}, p_{15}), (p_{15}, x_{16}), (x_{16}, p_{16}), (p_{16}, x_{17}), (x_{17}, p_{17}), (p_{17}, x_{18}), (x_{18}, p_{18}), (p_{18}, x_{19}), (x_{19}, p_{19}), (p_{19}, x_{20}), (x_{20}, p_{20}), (p_{20}, x_{15}), (x_{15}, p_{10}), (p_{10}, x_{15}), (x_{19}, p_{27}), (p_{27}, x_{19}), (x_{21}, p_{21}), (p_{21}, x_{22}), (x_{22}, p_{22}), (p_{22}, x_{23}), (x_{23}, p_{23}), (p_{23}, x_{24}), (x_{24}, p_{24}), (p_{24}, x_{25}), (x_{25}, p_{25}), (p_{25}, x_{26}), (x_{26}, p_{26}), (p_{26}, x_{21}), (x_{24}, p_{31}), (p_{31}, x_{24}), (x_{27}, p_{27}), (p_{27}, x_{28}), (x_{28}, p_{28}), (p_{28}, x_{29}), (x_{29}, p_{29}), (p_{29}, x_{27}), (x_{29}, p_{17}), (p_{17}, x_{29}), (x_{30}, p_{30}), (p_{30}, x_{31}), (x_{31}, p_{31}), (p_{31}, x_{30}), (p_{32}, x_{02}), (p_{32}, x_{06}), (p_{33}, x_{18}), (p_{33}, x_{29}), (p_{34}, x_{08}), (p_{34}, x_{10}), (p_{35}, x_{22}), (p_{35}, x_{26}), (p_{36}, x_{16}), (p_{36}, x_{20}), (p_{37}, x_{23}), (p_{37}, x_{25}), (p_{38}, x_{02}), (p_{38}, x_{06}), (p_{39}, x_{18}), (p_{39}, x_{29}), (p_{40}, x_8), (p_{40}, x_{10}), (p_{41}, x_{22}), (p_{41}, x_{26}), (p_{42}, x_{16}), (p_{42}, x_{20}), (p_{43}, x_{23}), (p_{43}, x_{25}), (x_{17}, p_{32}), (x_{28}, p_{38}), (x_{01}, p_{33}), (x_{05}, p_{39}), (x_{21}, p_{34}), (x_{25}, p_{40}), (x_{07}, p_{35}), (x_{09}, p_{41}), (x_{22}, p_{36}), (x_{24}, p_{42}), (x_{15}, p_{37}), (x_9, p_{43})\}$

$(x_{21}, p_{34}), (x_{25}, p_{40}), (x_{07}, p_{35}), (x_{09}, p_{41}), (x_{22}, p_{36}), (x_{24}, p_{42}), (x_{15}, p_{37}), (x_9, p_{43})\}$

Fungsi bobot, $w : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$, yaitu semua arc dalam himpunan A tersebut bobotnya adalah 1, kecuali $w(x_{17}, p_{32}) = w(x_{28}, p_{38}) = w(x_{01}, p_{33}) = w(x_{05}, p_{39}) = w(x_{21}, p_{34}) = w(x_{25}, p_{40}) = w(x_{07}, p_{35}) = w(x_{09}, p_{41}) = w(x_{22}, p_{36}) = w(x_{24}, p_{42}) = w(x_{15}, p_{37}) = w(x_9, p_{43}) = 2$.

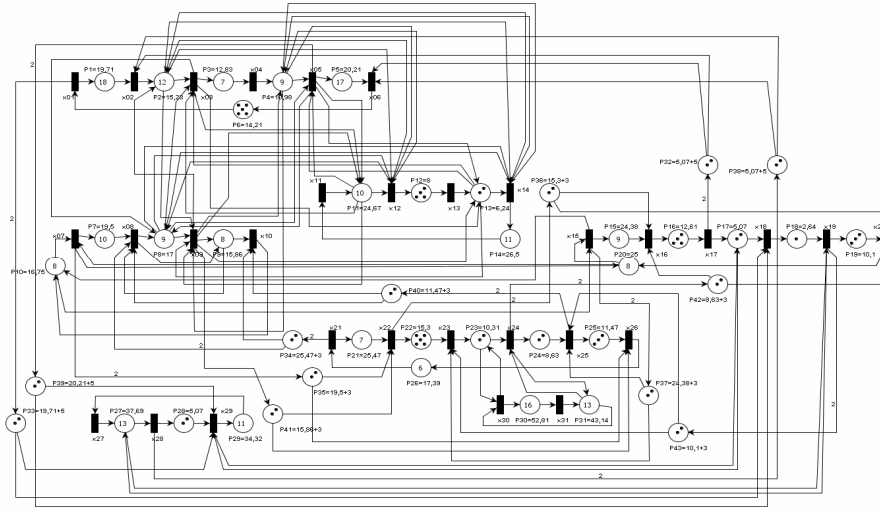
$X_0 = [18 \ 12 \ 7 \ 9 \ 17 \ 5 \ 10 \ 9 \ 8 \ 8 \ 10 \ 4 \ 2 \ 11 \ 9 \ 4 \ 2 \ 1 \ 3 \ 8 \ 7 \ 5 \ 2 \ 2 \ 3 \ 6 \ 13 \ 2 \ 11 \ 16 \ 13 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$, masing-masing menunjukkan jumlah token awal pada p_1, p_2, \dots, p_{43} .

T adalah vektor yang elemen-elemennya merepresentasikan waktu tempuh perjalanan tiap-tiap rute, durasi waktu tersebut disertakan pada setiap place yang, dimana τ_i disertakan pada place p_i , untuk p_1 s/d p_{31} masing-masing disertakan τ_1 s/d τ_{31} yang menunjukkan waktu tempuh perjalanan dengan keberangkatan x_{01} s/d x_{31} , sedangkan untuk p_{32} s/d p_{43} masing-masing disertakan τ_{32} s/d τ_{43} yang menunjukkan waktu tempuh perjalanan yang bersesuaian ditambah waktu tempuh untuk berjalan di skywalk, karena p_{32} s/d p_{43} berkaitan dari kedatangan dan keberangkatan bus di halte-halte yang ada dihubungkan dengan skywalk. Hal ini dapat dilihat lebih lengkap pada Gambar 3.

Inisialisasi X_0 untuk place p_1, p_2, \dots, p_{31} disesuaikan dengan distribusi bus yang beroperasi pada tiap-tiap rute berdasarkan Tabel 2, sedangkan jumlah token pada $p_{32}, p_{33}, \dots, p_{43}$ masing-masing diinisialisasi dengan token sebanyak 2 token. Hal ini dimaksudkan agar downstream transisi dari place $p_{32}, p_{33}, \dots, p_{43}$ enable. Selain itu, semua arc dalam Petrinet ini diberikan bobot 1, kecuali arc $(x_{17}, p_{32}), (x_{28}, p_{38}), (x_{01}, p_{33}), (x_{05}, p_{39}), (x_{21}, p_{34}), (x_{25}, p_{40}), (x_{07}, p_{35}), (x_{09}, p_{41}), (x_{22}, p_{36}), (x_{24}, p_{42}), (x_{15}, p_{37}), (x_9, p_{43})$ diberi bobot 2. Secara fisik, nilai bobot sama dengan 2 dan 2 token pada $p_{32}, p_{33}, \dots, p_{43}$ tersebut maksudnya bahwa kedatangan $x_{17}, x_{28}, x_{01}, x_{05}, x_{21}, x_{25}, x_{07}, x_{09}, x_{22}, x_{24}, x_{15}, x_{19}$, masing-masing ditunggu oleh 2 keberangkatan bus lainnya, sebagai contoh adalah: kedatangan penumpang dari keberangkatan x_{01} (dari Blok M ke Dukuh Atas 1) ditunggu oleh keberangkatan x_{18} (dari Dukuh Atas 2 ke Halimun) dan x_{29} (dari Dukuh Atas 2 ke Ragunan). Hal ini direpresentasikan oleh arc $(x_{01}, p_{33}), (p_{33}, x_{18})$, dan (p_{33}, x_{29}) , perlu diperhatikan pula bahwa durasi waktu yang tertera pada place adalah p_{33} adalah $19,71 + 5$, ini menunjukkan 19,71 menit adalah waktu yang diperlukan untuk perjalanan dengan keberangkatan x_{01} dan 5 menit adalah waktu yang diperlukan untuk berjalan melalui skywalk dari Dukuh Atas 1 ke Dukuh Atas 2. Hal ini dimaksudkan untuk menjamin sinkronisasi koridor 4 dengan koridor 1, bahwa penumpang

dari koridor 1 dapat transit ke koridor 4 melalui skywalk Dukuh Atas. Demikian halnya representasi arc (x_{05}, p_{39}) , (p_{39}, x_{18}) , dan (p_{39}, x_{29}) dimaksudkan untuk menjamin sinkronisasi koridor 6 dengan koridor 1, bahwa penumpang dari koridor 1 dapat transit ke koridor 6 melalui skywalk Dukuh Atas. Sehingga, x_{18} (dari Dukuh

Atas 2 ke Halimun) dan x_{29} (dari Dukuh Atas 2 ke Ragunan) keduanya harus menunggu kedatangan bus x_{01} dan x_{05} . Hal tersebut dimaksudkan untuk menjamin adanya sinkronisasi antara koridor 1 dan 6 sebagaimana aturan sinkronisasi yang telah diberikan di atas. Berikut ini Petrinet untuk keberangkatan bus pada jaringan busway.



Gambar 3. Petrinet untuk Jaringan Busway

MODEL ALJABAR MAX-PLUS

Sistem transportasi dapat dikatakan sebagai Sistem Dinamik Event Diskrit (SDED) sama halnya sebagai sistem manufaktur, Kedinamikan dari sistem tersebut digambarkan sebagai evolusi perlakuan sistem selama diberikan waktu periodenya. Sistem transportasi dinamik diatur dengan sinkronisasi, paralelisasi dan kejadian yang serentak/concurrency (Nait-Sidi-Moh, A., dkk., 2008).

Penggunaan pendekatan aljabar max-plus dalam sistem even diskrit dinamik adalah karena aljabar max-plus dapat menangani dengan mudah proses sinkronisasi (Braker, 1990). Pendekatan dengan aljabar max-plus terkenal dengan kemampuannya untuk diadaptasikan pada masalah yang dapat dimodelkan dengan event-graph (Nait-Sidi-Moh, A., dkk., 2008). Aljabar max-plus dapat dilihat penerapannya dalam sistem manufaktur dan pada masalah-masalah yang berkaitan dengan jaringan transportasi yang sering berasal dari kejadian seperti sinkronisasi antara resources dan konflik yang terjadi ketika distribusi resources diperlukan (Nait-Sidi-Moh, A., dkk., 2008).

Sebelum, menyusun model aljabar max-plus, berikut diberikan konsep dasar mengenai struktur aljabar R_{max} oleh Baccelli, dkk (1992) sebagai berikut:

R_{max} menotasikan himpunan bilangan real $R \cup \{ \varepsilon = -\infty \}$ dengan dua operasi biner max dan

plus yang masing-masing dinotasikan dengan \oplus dan \otimes . Untuk setiap $a, b \in R_{max}$, didefinisikan operasi \oplus dan \otimes dengan

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

Elemen netral untuk operasi \oplus adalah $\varepsilon = -\infty$ dan elemen netral untuk operasi \otimes adalah $e = 0$. Operasi \oplus dibaca *o-plus* dan operasi \otimes dibaca *o-times*. Himpunan R_{max} dengan operasi \oplus dan \otimes disebut aljabar max-plus dan didefinisikan sebagai $\mathfrak{R}_{max} = \{ R_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e \}$.

Adapun bentuk umum model aljabar max-plus adalah sebagai berikut:

Suatu barisan $(x(k) : k \in N)$ dapat dibangun oleh

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \tag{1}$$

untuk $k \geq 0$, di mana $A \in R_{max}^{n \times n}$, $x \in R^n$ dan $x(0) = x_0$ adalah kondisi awal. Secara ekivalen barisan $x(k)$ dapat ditulis

$$x(k) = A^{\otimes k} \otimes x_0 \tag{2}$$

untuk semua $k \geq 0$. (Heidergott, B., dkk, 2006) Dalam hal ini, $x(k)$ adalah waktu keberangkatan bus yang ke- k di suatu halte.

Berdasarkan data di Tabel 1 dan Tabel 2, dan berdasarkan model Petrinet masing-masing koridor sebelum sinkronisasi, maka dapat disusun model aljabar max-plus sebelum sinkronisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= 14,21 \otimes x_6(k-4) & x_{17}(k+1) &= 12,61 \otimes x_{16}(k-3) \\
 x_2(k+1) &= 19,71 \otimes x_1(k-17) & x_{18}(k+1) &= 5,01 \otimes x_{17}(k-1) \\
 x_3(k+1) &= 15,23 \otimes x_2(k-11) & x_{19}(k+1) &= 2,64 \otimes x_{18}(k) \\
 x_4(k+1) &= 12,83 \otimes x_3(k-6) & x_{20}(k+1) &= 10,1 \otimes x_{19}(k-2) \\
 x_5(k+1) &= 10,98 \otimes x_4(k-8) & x_{21}(k+1) &= 17,39 \otimes x_{26}(k-5) \\
 x_6(k+1) &= 20,21 \otimes x_5(k-16) & x_{22}(k+1) &= 25,47 \otimes x_{21}(k-7) \\
 x_7(k+1) &= 16,75 \otimes x_{10}(k-7) & x_{23}(k+1) &= 15,3 \otimes x_{22}(k-3) \\
 x_8(k+1) &= 19,5 \otimes x_7(k-9) & x_{24}(k+1) &= 10,31 \otimes x_{23}(k-1) \\
 x_9(k+1) &= 17 \otimes x_8(k-8) & x_{25}(k+1) &= 8,63 \otimes x_{24}(k-1) \\
 x_{10}(k+1) &= 15,86 \otimes x_9(k-7) & x_{26}(k+1) &= 11,47 \otimes x_{25}(k-2) \\
 x_{11}(k+1) &= 26,5 \otimes x_{14}(k-10) & x_{27}(k+1) &= 34,32 \otimes x_{29}(k-10) \\
 x_{12}(k+1) &= 24,67 \otimes x_{11}(k-9) & x_{28}(k+1) &= 37,69 \otimes x_{27}(k-12) \\
 x_{13}(k+1) &= 8 \otimes x_{12}(k-3) & x_{29}(k+1) &= 5,07 \otimes x_{28}(k-1) \\
 x_{14}(k+1) &= 6,24 \otimes x_{13}(k-1) & x_{30}(k+1) &= 43,14 \otimes x_{31}(k-12) \\
 x_{15}(k+1) &= 25 \otimes x_{20}(k-7) & x_{31}(k+1) &= 52,81 \otimes x_{30}(k-15) \\
 x_{16}(k+1) &= 24,38 \otimes x_{15}(k-8) & &
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Dengan aturan sinkronisasi yang sudah dijelaskan pada bagian sebelumnya, maka model aljabar max-plus (3) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= 14,21 \otimes x_6(k-4) \\
 x_2(k+1) &= (19,71 \otimes x_1(k-17)) \oplus (5 \otimes 5 \otimes x_{17}(k-1)) \oplus (5 \otimes 5 \otimes x_{28}(k-1)) \\
 x_3(k+1) &= (15,23 \otimes x_2(k-11)) \oplus (24,67 \otimes x_{11}(k-9)) \oplus (6,24 \otimes x_{13}(k-1)) \oplus (17 \otimes x_8(k-8)) \\
 x_4(k+1) &= 12,83 \otimes x_3(k-6) \\
 x_5(k+1) &= (10,98 \otimes x_4(k-8)) \oplus (24,67 \otimes x_{11}(k-9)) \oplus (6,24 \otimes x_{13}(k-1)) \oplus (17 \otimes x_8(k-8)) \\
 x_6(k+1) &= (20,21 \otimes x_5(k-16)) \oplus (5 \otimes 5 \otimes x_{17}(k-1)) \oplus (5 \otimes 5 \otimes x_{28}(k-1)) \\
 x_7(k+1) &= (16,75 \otimes x_{10}(k-7)) \oplus (25 \otimes x_{20}(k-7)) \\
 x_8(k+1) &= (19,5 \otimes x_7(k-9)) \oplus (15,86 \otimes x_9(k-7)) \oplus (3 \otimes 25,47 \otimes x_{21}(k-7)) \oplus (3 \otimes 11,47 \otimes x_{25}(k-2)) \\
 x_9(k+1) &= (17 \otimes x_8(k-8)) \oplus (15,23 \otimes x_2(k-11)) \oplus (24,67 \otimes x_{11}(k-9)) \oplus (6,24 \otimes x_{13}(k-1)) \oplus (10,98 \otimes x_4(k-8)) \\
 x_{10}(k+1) &= (15,86 \otimes x_9(k-7)) \oplus (3 \otimes 25,47 \otimes x_{21}(k-7)) \oplus (3 \otimes 11,47 \otimes x_{25}(k-2)) \\
 x_{11}(k+1) &= 26,5 \otimes x_{14}(k-10) \\
 x_{12}(k+1) &= 24,67 \otimes x_{11}(k-9) \oplus (15,23 \otimes x_2(k-11)) \oplus (10,98 \otimes x_4(k-8)) \oplus (17 \otimes x_8(k-8)) \\
 x_{13}(k+1) &= 8 \otimes x_{12}(k-3) \\
 x_{14}(k+1) &= (6,24 \otimes x_{13}(k-1)) \oplus (15,23 \otimes x_2(k-11)) \oplus (10,98 \otimes x_4(k-8)) \oplus (17 \otimes x_8(k-8)) \\
 x_{15}(k+1) &= (25 \otimes x_{20}(k-7)) \oplus (16,75 \otimes x_{10}(k-7)) \\
 x_{16}(k+1) &= (24,38 \otimes x_{15}(k-8)) \oplus (3 \otimes 15,3 \otimes x_{22}(k-3)) \oplus (3 \otimes 8,63 \otimes x_{24}(k-1)) \\
 x_{17}(k+1) &= 12,61 \otimes x_{16}(k-3) \\
 x_{18}(k+1) &= (5,01 \otimes x_{17}(k-1)) \oplus (5 \otimes 19,71 \otimes x_1(k-17)) \oplus (5 \otimes 19,71 \otimes x_5(k-16)) \\
 x_{19}(k+1) &= (2,64 \otimes x_{18}(k)) \oplus (37,69 \otimes x_{27}(k-12)) \\
 x_{20}(k+1) &= (10,1 \otimes x_{19}(k-2)) \oplus (3 \otimes 15,3 \otimes x_{22}(k-3)) \oplus (3 \otimes 8,63 \otimes x_{24}(k-1)) \\
 x_{21}(k+1) &= 17,39 \otimes x_{26}(k-5) \\
 x_{22}(k+1) &= (25,47 \otimes x_{21}(k-7)) \oplus (3 \otimes 19,5 \otimes x_7(k-9)) \oplus (3 \otimes 15,86 \otimes x_9(k-7)) \\
 x_{23}(k+1) &= (15,3 \otimes x_{22}(k-3)) \oplus (3 \otimes 24,38 \otimes x_{15}(k-8)) \oplus (3 \otimes 10,1 \otimes x_{19}(k-2)) \\
 x_{24}(k+1) &= (10,31 \otimes x_{23}(k-1)) \oplus (43,14 \otimes x_{31}(k-12)) \\
 x_{25}(k+1) &= (8,63 \otimes x_{24}(k-1)) \oplus (3 \otimes 24,38 \otimes x_{15}(k-8)) \oplus (3 \otimes 10,1 \otimes x_{19}(k-2)) \\
 x_{26}(k+1) &= (11,47 \otimes x_{25}(k-2)) \oplus (3 \otimes 19,5 \otimes x_7(k-9)) \oplus (3 \otimes 15,86 \otimes x_9(k-7)) \\
 x_{27}(k+1) &= 34,32 \otimes x_{29}(k-10) \\
 x_{28}(k+1) &= 37,69 \otimes x_{27}(k-12) \\
 x_{29}(k+1) &= (5,07 \otimes x_{28}(k-1)) \oplus (5 \otimes 19,71 \otimes x_1(k-17)) \oplus (5 \otimes 20,21 \otimes x_5(k-16)) \oplus (5,07 \otimes x_{17}(k-1)) \\
 x_{30}(k+1) &= (43,14 \otimes x_{31}(k-12)) \oplus (10,31 \otimes x_{23}(k-1)) \\
 x_{31}(k+1) &= 52,81 \otimes x_{30}(k-16)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Selanjutnya, model (4) dapat dinyatakan dalam bentuk umum model aljabar max-plus pada persamaan (1), yaitu sebagai berikut:

$$x(k+1) = \bigoplus_{p=1}^M (A_p \otimes x(k+1-p)) \tag{5}$$

dengan A_p adalah matriks berukuran $n \times n$ dan n adalah jumlah variabel. Matriks A_p adalah matriks yang berkaitan dengan $x(k+1-p)$. Dan M dalam hal ini adalah jumlah bus maksimum di antara semua lintasan dalam grap pada Gambar 2. Berdasarkan Tabel 2 di atas, maka n adalah 31

dan M adalah 18 yaitu pada koridor 1 lintasan Blok M menuju Dukuh Atas 1. Sehingga, nantinya ada 18 buah matriks yaitu A_1 sampai dengan A_{18} .

Dalam hal ini, model pada (4) dapat dinyatakan dalam bentuk umum model max-plus pada persamaan (1) menjadi

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \otimes \bar{x}(k) \tag{6}$$

dengan $\bar{x}(k)$ vektor berdimensi nM , yang didefinisikan sebagai

$$\bar{x}(k) = \left(x_1(k) \ \dots \ x_n(k) \ x_1(k-1) \ \dots \ x_n(k-1) \ \dots \ x_1(k+1-M) \ \dots \ x_n(k+1-M) \right)^T \tag{7}$$

di mana notasi T pada persamaan di atas menunjukkan transpose dan \bar{A} matriks berukuran $(nM) \times (nM)$ yaitu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{M-1} & A_M \\ I_{\max} & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & I_{\max} & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & I_{\max} & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & I_{\max} & \varepsilon \end{pmatrix}$$

dimana I_{\max} adalah matriks $n \times n$ dengan elemen diagonalnya adalah e dan elemen lainnya adalah ε , dan e dalam matriks \bar{A} di atas adalah matriks $n \times n$ dengan semua elemennya adalah ε . Dan $\bar{x}(k)$ seperti pada persamaan (7). Dalam permasalahan ini, vektor $\bar{x}(k)$ berdimensi 558 dan matriks \bar{A} berukuran 558×558

Dengan Scilab dan Max-Plus Toolbox diperoleh bahwa nilai karakteristik matriks \bar{A} tersebut adalah 3.9542857 ($\lambda = 3.9542857$) dan eigen vektor dari matriks \bar{A} yaitu v_x . Nilai karakteristik ini menunjukkan performa dari sistem penjadwalan keberangkatan bus, maksudnya bahwa setiap 3.9542857 menit sekali terjadi pemberangkatan bus di tiap-tiap halte atau dengan kata lain periode keberangkatan bus di tiap-tiap halte adalah 3.9542857 menit.

Jika jadwal keberangkatan bus adalah periodik dan diberikan waktu keberangkatan awal $\bar{x}(0)$ dengan jumlah bus yang beroperasi sama seperti pada Tabel 2, maka dapat disusun jadwal keberangkatan bus untuk keberangkatan-keberangkatan selanjutnya, dengan evolusi

$$\bar{x}(k+1) = \lambda^{\otimes(k+1)} \otimes \bar{x}(0) \tag{8}$$

Nilai dalam vektor v_x adalah mewakili menit, karena keterbatasan halaman vector v_x tidak dituliskan dalam makalah ini, hal ini dapat dilihat selengkapnya pada (Winarni, 2009). Misalkan jaringan beroperasi pada pagi hari dimulai pukul 05.00, berarti yang berangkat pertama kali pada jaringan tersebut adalah x_3 yaitu pukul 05:00, keberangkatan $x_1(0)$ adalah pukul 05:30,001429, $x_2(0)$ pukul 05:34,932857,

dan seterusnya. Periode antar keberangkatan di masing-masing halte adalah sebesar eigenvalue yaitu 3,9542857.

Diperoleh pula bahwa critical circuit pada jaringan tersebut adalah Halte Dukuh Atas 2 - Halimun - Mantraman 2 - Mantraman 1 - Kp Melayu - Mantraman 1 - Mantraman 2 - Halimun - Dukuh Atas 2 karena bobot rata-rata circuit tersebut adalah sama dengan 3,9542857, yaitu maksimum dari bobot rata-rata semua circuit dalam jaringan (eigenvalue). Total waktu tempuh circuit tersebut adalah 55.36 menit dengan jumlah bus yang beroperasi pada circuit tersebut adalah 14 bus.

Semua pembahasan di atas adalah dengan mempertimbangkan halte-halte ujung koridor dan halte transit, belum memperhitungkan halte-halte 'kecil' yaitu halte-halte di sepanjang koridor selain halte ujung koridor dan halte transit. Untuk keberangkatan di halte-halte tersebut cukup ditambahkan waktu tempuh antara halte sebelumnya menuju halte tersebut. Sehingga desain jadwal keberangkatan bus untuk seluruh halte pada jaringan busway dengan 7 koridor dapat dilihat pada Tabel 3 di bagian lampiran.

PENUTUP

Kesimpulan

1. Dalam penelitian ini telah disusun model Petrinet dan model aljabar max-plus untuk mendesain jadwal keberangkatan jaringan TransJakarta Busway. Petrinet yang dimaksudkan dapat dilihat pada Gambar 3 dan model aljabar max-plus dapat dilihat model (4). Dari model Petrinet dapat diterjemahkan menjadi model aljabar max-plus dan juga sebaliknya.
2. Model (4) dapat dinyatakan dalam bentuk umum model aljabar max-plus yaitu $\bar{x}(k+1) = \bar{A} \otimes \bar{x}(k)$ di mana matriks \bar{A} berukuran 558×558 . Dengan Scilab dan *Max-plus Algebra Toolbox* (Subiono, 2008) diperoleh eigenvalue dari matriks \bar{A} sama dengan $\lambda(\bar{A}) = 3,9542857$. Eigenvalue ini menunjukkan bahwa setiap 3,9542857 menit sekali terjadi pemberangkatan bus di tiap-tiap halte atau dengan kata lain periode keberangkatan bus di tiap-tiap halte adalah 3,9542857 menit. Dengan mengambil eigenvektor matriks \bar{A} sebagai $x(0)$ maka akan dapat ditentukan waktu keberangkatan bus di tiap-tiap halte ujung koridor dan halte transit yang ke- $(k+1)$, untuk $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ dengan $\bar{x}(k+1) = \lambda^{\otimes(k+1)} \otimes \bar{x}(0)$

3. Desain jadwal keseluruhan halte pada jaringan tersebut dapat dilihat pada Tabel 3 .
4. Diperoleh bahwa critical circuit pada jaringan tersebut adalah Halte Dukuh Atas 2 – Halimun – Mantraman 2 – Mantraman 1 – Kp Melayu – Mantraman 1 – Mantraman 2 – Halimun – Dukuh Atas 2 karena bobot rata-rata circuit tersebut adalah sama dengan 3,9542857, yaitu maksimum dari bobot rata-rata semua circuit dalam jaringan (eigenvalue). Total waktu tempuh circuit tersebut adalah 55.36 menit dengan jumlah bus yang beroperasi pada circuit tersebut adalah 14 bus.

Saran

1. Observasi lapangan yang lebih lama dan pengumpulan data waktu tempuh yang lebih lengkap.
2. Melakukan reduksi matriks untuk efisiensi secara komputasi.
3. Dilakukan analisa lebih detail lagi pada Petrinet yang telah disusun tersebut.
4. Melakukan analisa jadwal jika terjadi keterlambatan.
5. Melakukan re-alokasi jumlah bus yang beroperasi pada jaringan, sehingga lebih optimal, misalnya dengan mengurangi alokasi bus pada circuit yang minimum dan menambahkannya pada critical circuit dan dengan mengoptimalkan alokasi bus yang disediakan pengelola.
6. Jika 8 koridor berikutnya (koridor 9 sampai dengan koridor 15) sudah terealisasi, penelitian ini dapat dikembangkan untuk seluruh koridor TransJakarta Busway.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., dan Quadrat, J. P., (1992), *Synchronisation and Linearity, Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [2] Batavia Busway, (16 Juni 2008, tanggal akses: 7 Agustus 2008), *Diskusi Busway di Veteran*, <http://www.bataviabusway.blogspot.com>.
- [3] Batavia Busway, (tanggal akses: 24 Juli 2008), *Denah-Busway-v080116.jpg*, <http://www.bataviabusway.blogspot.com>.
- [4] BLU TransJakarta Busway, (2007), *Company profile TransJakarta Busway*, Edisi3.
- [5] Braker, J.-G., (1991), "Max-algebra modelling and analysis of time-table dependent transportation networks". *Proceedings of the First European Control Conference (ECC'91)*, Grenoble, France, hal. 1831–1836.
- [6] Cassandras, C.G., (1993), *Discrete Event Systems: Modelling and Performance Analysis*, Richard D. Irwin, Inc, and Aksent Associates Inc., Amherst.
- [7] Dieky, A., (2008), *Petrinet Toolbox*, Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [8] Heidergott, B., Olsder G. J., dan Woude, J. V. D., (2006), *Max Plus at Work Modeling and Analysis of Synchronisation Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Application*, Princeton University Press, New Jersey.
- [9] Nait-Sidi-Moh, A., Manier, M. A., El Moudni, A., (2008), "Spectral analysis for performance evaluation in a bus network", *European Journal of Operational Research*, <http://www.sciencedirect.com>.
- [10] Suaratransjakarta, (20 Juni 2008, tanggal akses: 1 Agustus 2008), *Ketidakpastian menunggu bus*, <http://www.TransJakartaInfo.com>.
- [11] Subiono, (2000), *On classes of min-max-plus systems and their application*, Thesis Ph.D., Technische Universiteit Delft, Delft.
- [12] Subiono, Dieky, A., (2008), *Max-plus Algebra Toolbox*, Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [13] Winarni, (2009), *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota Dengan Aljabar Max-Plus*, Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

LAMPIRAN

Tabel 3. Desain Jadwal Periodik Keberangkatan Busway

No.	Variabel	Halte Keberangkatan	Halte Tujuan	Kendala
1	x_1	Blok-M	Masjid Agung	$14.21 + x_6$ atau $4.73 + x_{6,7}$
2	$x_{1,1}$	Masjid Agung	Bundaran Senayan	$8.75 + x_1$
3	$x_{1,2}$	Bundaran Senayan	Gelora Bung Karno	$3.10 + x_{1,1}$
4	$x_{1,3}$	Gelora Bung Karno	Polda Metro	$1.02 + x_{1,2}$
5	$x_{1,4}$	Polda Metro	Bendungan Hilir	$1.17 + x_{1,3}$
6	$x_{1,5}$	Bendungan Hilir	Karet	$1.74 + x_{1,4}$
7	$x_{1,6}$	Karet	Setia budi	$1.37 + x_{1,5}$

8	$x_{1,7}$	Setia budi	Dukuh Atas 1	$1.07 + x_{1,6}$
9	x_2	Dukuh Atas 1	Tosari	$19,71 + x_1, 10,07 + x_{17}, 10,07 + x_{28}$ atau $1.5 + x_{1,7}, 10,07 + x_{17}, 10,07 + x_{28}$
10	$x_{2,1}$	Tosari	Bunderan HI	$1.47 + x_2$
11	$x_{2,2}$	Bunderan HI	Sarinah	$1.67 + x_{2,1}$
12	$x_{2,3}$	Sarinah	Bank Indonesia	$1.41 + x_{2,2}$
13	$x_{2,4}$	Bank Indonesia	Monumen Nasional	$3.07 + x_{2,3}$
14	$x_{2,5}$	Monumen Nasional	Harmoni	$1.59 + x_{2,4}$
15	x_3	Harmoni	Sawah Besar	$15.23 + x_2, 17 + x_8, 24.67 + x_{11}, 6.24 + x_{13}$ atau $6.02 + x_{2,5}, 8 + x_{8,7}, 1.5 + x_{11,11}, 3.58 + x_{13,2}$
16	$x_{3,1}$	Sawah Besar	Mangga Besar	$4.76 + x_3$
17	$x_{3,2}$	Mangga Besar	Olimo	$2.57 + x_{3,1}$
18	$x_{3,3}$	Olimo	Glodok	$1.05 + x_{3,2}$
19	$x_{3,4}$	Glodok	Kota	$1.35 + x_{3,3}$
20	x_4	Kota	Glodok	$12.83 + x_3$ atau $3.11 + x_{3,4}$
21	$x_{4,1}$	Glodok	Olimo	$3.30 + x_4$
22	$x_{4,2}$	Olimo	Mangga Besar	$1.34 + x_{4,1}$
23	$x_{4,3}$	Mangga Besar	Sawah Besar	$1.26 + x_{4,2}$
24	$x_{4,4}$	Sawah Besar	Harmoni	$2.53 + x_{4,3}$
25	x_5	Harmoni	Monumen Nasional	$10.98 + x_4, 17 + x_8, 24.67 + x_{11}, 6.24 + x_{13}$ atau $2.54 + x_{4,4}, 8 + x_{8,7}, 1.5 + x_{11,11}, 3.58 + x_{13,2}$
26	$x_{5,1}$	Monumen Nasional	Bank Indonesia	$5.77 + x_5$
27	$x_{5,2}$	Bank Indonesia	Sarinah	$4.82 + x_{5,1}$
28	$x_{5,3}$	Sarinah	Bunderan HI	$2.33 + x_{5,2}$
29	$x_{5,4}$	Bunderan HI	Tosari	$1.29 + x_{5,3}$
30	$x_{5,5}$	Tosari	Dukuh Atas 1	$3.08 + x_{5,4}$
31	x_6	Dukuh Atas 1	Setia Budi	$20.21 + x_5, 10.07 + x_{17}, 10.07 + x_{28}$ atau $2.92 + x_{5,5}, 10.07 + x_{17}, 10.07 + x_{28}$
32	$x_{6,1}$	Setia Budi	Karet	$0.94 + x_6$
33	$x_{6,2}$	Karet	Bendungan Hilir	$1.23 + x_{6,1}$
34	$x_{6,3}$	Bendungan Hilir	Polda Metro Jaya	$1.04 + x_{6,2}$
35	$x_{6,4}$	Polda Metro Jaya	Gelora Bung Karno	$1.46 + x_{6,3}$
36	$x_{6,5}$	Gelora Bung Karno	Bundaran Senayan	$1.08 + x_{6,4}$
37	$x_{6,6}$	Bundaran Senayan	Masjid Agung	$1.39 + x_{6,5}$
38	$x_{6,7}$	Masjid Agung	Blok M	$2.33 + x_{6,6}$
39	x_7	Pulo Gadung	Bermis	$16.75 + x_{10}, 25 + x_{20}$ atau $3.15 + x_{10,10}, 11 + x_{20,9}$
40	$x_{7,1}$	Bermis	Pulo Mas	$3 + x_7$
41	$x_{7,2}$	Pulo Mas	ASMI	$2.5 + x_{7,1}$
42	$x_{7,3}$	ASMI	Pedongkelan	$1 + x_{7,2}$
43	$x_{7,4}$	Pedongkelan	Cempaka Timur	$3 + x_{7,3}$
44	$x_{7,5}$	Cempaka Timur	RS Islam	$3 + x_{7,4}$
45	$x_{7,6}$	RS Islam	Cempaka Tengah	$1 + x_{7,5}$
46	$x_{7,7}$	Cempaka Tengah	Ps. Cempaka Putih	$1 + x_{7,6}$
47	$x_{7,8}$	Ps. Cempaka Putih	Rawa Selatan	$0.75 + x_{7,7}$
48	$x_{7,9}$	Rawa Selatan	Galur	$0.75 + x_{7,8}$
49	$x_{7,10}$	Galur	Senen	$1 + x_{7,9}$
50	x_8	Senen	Atrium	$19.5 + x_7, 15.86 + x_9, 28.47 + x_{21}, 14.47 + x_{25}$ atau $3,5 + x_{7,10}, 3.53 + x_{9,3}, 12.82 + x_{21,4}, 9.58 + x_{25,3}$
51	$x_{8,1}$	Atrium	RSPAD	$1 + x_8$
52	$x_{8,2}$	RSPAD	DEPLU	$1 + x_{8,1}$
53	$x_{8,3}$	DEPLU	Gambir 1	$1 + x_{8,2}$
54	$x_{8,4}$	Gambir 1	Istiqlal	$2 + x_{8,3}$
55	$x_{8,5}$	Istiqlal	Juanda	$2 + x_{8,4}$
56	$x_{8,6}$	Juanda	Pecenongan	$1 + x_{8,5}$
57	$x_{8,7}$	Pecenongan	Harmoni	$1 + x_{8,6}$
58	x_9	Harmoni	Balai Kota	$17 + x_8, 15.23 + x_2, 10.98 + x_4, 24.67 + x_{11}, 6.24 + x_{13}$ atau $8 + x_{8,7}, 6.02 + x_{2,5}, 2.54 + x_{4,4}, 1.5 + x_{11,11}, 3.58 + x_{13,2}$
59	$x_{9,1}$	Balai Kota	Gambir 2	$7.57 + x_9$
60	$x_{9,2}$	Gambir 2	Kwitang	$2.10 + x_{9,1}$
61	$x_{9,3}$	Kwitang	Senen	$2.66 + x_{9,2}$
62	x_{10}	Senen	Galur	$15.86 + x_9, 28.47 + x_{21}, 14.47 + x_{25}$ atau $3.53 + x_{9,3}, 12.82 + x_{21,4}, 9.58 + x_{25,3}$
63	$x_{10,1}$	Galur	Rawa Selatan	$2.11 + x_{10}$
64	$x_{10,2}$	Rawa Selatan	Ps. Cempaka Putih	$1 + x_{10,1}$
65	$x_{10,3}$	Ps. Cempaka Putih	Cempaka Tengah	$1.17 + x_{10,2}$
66	$x_{10,4}$	Cempaka Tengah	RS Islam	$0.95 + x_{10,3}$
67	$x_{10,5}$	RS Islam	Cempaka Timur	$1.01 + x_{10,4}$
68	$x_{10,6}$	Cempaka Timur	Pedongkelan	$1.15 + x_{10,5}$
69	$x_{10,7}$	Pedongkelan	ASMI	$1.81 + x_{10,6}$

70	$x_{10,8}$	ASMI	Pulo Mas	$1.27 + x_{10,7}$
71	$x_{10,9}$	Pulo Mas	Bermis	$1.03 + x_{10,8}$
72	$x_{10,10}$	Bermis	Pulo Gadung	$2.10 + x_{10,9}$
73	x_{11}	Kalideres	Pesakih	$26.5 + x_{14}$ atau $4.05 + x_{14,11}$
74	$x_{11,1}$	Pesakih	Sumur Bor	$2.64 + x_{11}$
75	$x_{11,2}$	Sumur Bor	Rawa Buaya	$0.84 + x_{11,1}$
76	$x_{11,3}$	Rawa Buaya	Jembatan Baru	$1.64 + x_{11,2}$
77	$x_{11,4}$	Jembatan Baru	Dispenda	$1.36 + x_{11,3}$
78	$x_{11,5}$	Dispenda	Jembatan Gantung	$1.71 + x_{11,4}$
79	$x_{11,6}$	Jembatan Gantung	Taman Kota	$1.6 + x_{11,5}$
80	$x_{11,7}$	Taman Kota	Indosiar	$1.71 + x_{11,6}$
81	$x_{11,8}$	Indosiar	Jelambar	$3.3 + x_{11,7}$
82	$x_{11,9}$	Jelambar	Grogol TriSakti	$4.32 + x_{11,8}$
83	$x_{11,10}$	Grogol TriSakti	Rs.Sumber Waras	$2.55 + x_{11,9}$
84	$x_{11,11}$	Rs.Sumber Waras	Harmoni	$1.50 + x_{11,10}$
85	x_{12}	Harmoni	Pecenongan	$24.67 + x_{11}, 15.23 + x_2, 10.98 + x_4, 17 + x_8$ atau $1.5 + x_{11,11}, 6.02 + x_{2,5}, 2.54 + x_{4,4}, 8 + x_{8,7}$
86	$x_{12,1}$	Pecenongan	Juanda	$3.68 + x_{12}$
87	$x_{12,2}$	Juanda	Pasar Baru	$2.93 + x_{12,1}$
88	x_{13}	Pasar Baru	Juanda	$8 + x_{12}$ atau $1.38 + x_{12,2}$
89	$x_{13,1}$	Juanda	Pecenongan	$1.68 + x_{13}$
90	$x_{13,2}$	Pecenongan	Harmoni	$0.98 + x_{13,1}$
91	x_{14}	Harmoni	Rs.Sumber Waras	$6.24 + x_{13}, 15.23 + x_2, 10.98 + x_4, 17 + x_8$ atau $3.58 + x_{13,2}, 6.02 + x_{2,5}, 2.54 + x_{4,4}, 8 + x_{8,7}$
92	$x_{14,1}$	Rs.Sumber Waras	Grogol TriSakti	$4 + x_{14}$
93	$x_{14,2}$	Grogol TriSakti	Jelambar	$1.5 + x_{14,1}$
94	$x_{14,3}$	Jelambar	Indosiar	$2 + x_{14,2}$
95	$x_{14,4}$	Indosiar	Taman Kota	$2 + x_{14,3}$
96	$x_{14,5}$	Taman Kota	Jembatan Gantung	$3.47 + x_{14,4}$
97	$x_{14,6}$	Jembatan Gantung	Dispenda	$1.03 + x_{14,5}$
98	$x_{14,7}$	Dispenda	Jembatan Baru	$2.5 + x_{14,6}$
99	$x_{14,8}$	Jembatan Baru	Rawa Buaya	$1.5 + x_{14,7}$
100	$x_{14,9}$	Rawa Buaya	Sumur Bor	$2 + x_{14,8}$
101	$x_{14,10}$	Sumur Bor	Pesakih	$1 + x_{14,9}$
102	$x_{14,11}$	Pesakih	Kalideres	$1.45 + x_{14,10}$
103	x_{15}	Pulo Gadung	Pasar Pulo Gadung	$25 + x_{20}, 16.75 + x_{10}$ atau $11 + x_{20,9}, 3.15 + x_{10,10}$
104	$x_{15,1}$	Pasar Pulo Gadung	TU Gas	$8.17 + x_{15}$
105	$x_{15,2}$	TU Gas	Layur	$3.18 + x_{15,1}$
106	$x_{15,3}$	Layur	Velodrome	$1.32 + x_{15,2}$
107	$x_{15,4}$	Velodrome	Sunan Giri	$2.92 + x_{15,3}$
108	$x_{15,5}$	Sunan Giri	UNJ	$1.43 + x_{15,4}$
109	$x_{15,6}$	UNJ	Pramuka LIA	$1 + x_{15,5}$
110	$x_{15,7}$	Pramuka LIA	Utan Kayu	$3.24 + x_{15,6}$
111	$x_{15,8}$	Utan Kayu	Pasar Genjing	$0.99 + x_{15,7}$
112	$x_{15,9}$	Pasar Genjing	Mantraman 2	$0.88 + x_{15,8}$
113	x_{16}	Mantraman 2	Manggarai	$24.38 + x_{15}, 18.3 + x_{22}, 11.63 + x_{24}$ atau $1.25 + x_{15}, 8.28 + x_{22,3}, 5.18 + x_{24,3}$
114	$x_{16,1}$	Manggarai	Pasar Rumput	$6.69 + x_{16}$
115	$x_{16,2}$	Pasar Rumput	Halimun	$4.12 + x_{16,1}$
116	x_{17}	Halimun	Dukuh Atas 2	$12.61 + x_{16}$ atau $1.8 + x_{16,2}$
117	x_{18}	Dukuh Atas 2	Halimun	$5.07 + x_{17}, 24.71 + x_1, 25.21 + x_5$ atau $5.07 + x_{17}, 6.5 + x_{1,7}, 7.92 + x_{5,5}$
118	x_{19}	Halimun	Pasar Rumput	$2.64 + x_{18}, 37.69 + x_{27}$ atau $2.64 + x_{18}, 4.83 + x_{27,17}$
119	$x_{19,1}$	Pasar Rumput	Manggarai	$2.43 + x_{19}$
120	$x_{19,2}$	Manggarai	Mantraman 2	$1.73 + x_{19,1}$
121	x_{20}	Mantraman 2	Pasar Genjing	$10.1 + x_{19}, 18.3 + x_{22}, 11.63 + x_{24}$ atau $5.93 + x_{19,2}, 8.28 + x_{22,3}, 5.18 + x_{24,3}$
122	$x_{20,1}$	Pasar Genjing	Utan Kayu	$2 + x_{20}$
123	$x_{20,2}$	Utan Kayu	Pramuka LIA	$1 + x_{20,1}$
124	$x_{20,3}$	Pramuka LIA	UNJ	$1 + x_{20,2}$
125	$x_{20,4}$	UNJ	Sunan Giri	$3 + x_{20,3}$
126	$x_{20,5}$	Sunan Giri	Velodrome	$1 + x_{20,4}$
127	$x_{20,6}$	Velodrome	Layur	$1 + x_{20,5}$
128	$x_{20,7}$	Layur	TU Gas	$3 + x_{20,6}$
129	$x_{20,8}$	TU Gas	Pasar Pulo Gadung	$1 + x_{20,7}$
130	$x_{20,9}$	Pasar Pulo Gadung	Pulo Gadung	$1 + x_{20,8}$
131	x_{21}	Ancol	Pademangan	$17.39 + x_{26}$ atau $3 + x_{26,4}$
132	$x_{21,1}$	Pademangan	Jembatan Merah	$4 + x_{21}$
133	$x_{21,2}$	Jembatan Merah	Pasar Baru Timur	$4.96 + x_{21,1}$
134	$x_{21,3}$	Pasar Baru Timur	Budi Utomo	$5.05 + x_{21,2}$

135	$X_{21,4}$	Budi Utomo	Senen Sentral	$1.65 + X_{21,3}$
136	X_{22}	Senen Sentral	Pal Putih	$25.47 + X_{21}, 22.5 + X_7, 18.86 + X_9$ atau $9.82 + X_{21,4}, 6.5 + X_{7,10}, 6.53 + X_{9,3}$
137	$X_{22,1}$	Pal Putih	Kramat Sentiong	$5.42 + X_{22}$
138	$X_{22,2}$	Kramat Sentiong	Salemba UI	$1.58 + X_{22,1}$
139	$X_{22,3}$	Salemba UI	Mantraman 1	$3.02 + X_{22,2}$
140	X_{23}	Mantraman 1	Tegalán	$15.3 + X_{22}, 27.38 + X_{15}, 13.1 + X_{19}$ atau $5.28 + X_{22,3}, 4.25 + X_{15,9}, 8.93 + X_{19,2}$
141	$X_{23,1}$	Tegalán	Slamet Riyadi	$1.3 + X_{23}$
142	$X_{23,2}$	Slamet Riyadi	Kebon Pala	$1.08 + X_{23,1}$
143	$X_{23,3}$	Kebon Pala	Pasar Jatinegara	$1.66 + X_{23,2}$
144	$X_{23,4}$	Pasar Jatinegara	Kampung Melayu	$2.48 + X_{23,3}$
145	X_{24}	Kampung Melayu	Kebon Pala	$10.31 + X_{23}, 43.14 + X_{31}$ atau $3.8 + X_{23,4}, 4.29 + X_{31,12}$
146	$X_{24,1}$	Kebon Pala	Slamet Riyadi	$3.78 + X_{24}$
147	$X_{24,2}$	Slamet Riyadi	Tegalán	$1.61 + X_{24,1}$
148	$X_{24,3}$	Tegalán	Mantraman 1	$1.05 + X_{24,2}$
149	X_{25}	Mantraman 1	Salemba UI	$8.63 + X_{24}, 27.38 + X_{15}, 13.1 + X_{19}$ atau $2.18 + X_{24,3}, 4.25 + X_{15,9}, 8.93 + X_{19,2}$
150	$X_{25,1}$	Salemba UI	Kramat Sentiong	$2 + X_{25}$
151	$X_{25,2}$	Kramat Sentiong	Pal Putih	$1.58 + X_{25,1}$
152	$X_{25,3}$	Pal Putih	Senen Sentral	$1.30 + X_{25,2}$
153	X_{26}	Senen Sentral	Budi Utomo	$11.47 + X_{25}, 22.5 + X_7, 18.86 + X_9$ atau $6.58 + X_{25,3}, 6.5 + X_{7,10}, 6.53 + X_{9,3}$
154	$X_{26,1}$	Budi Utomo	Pasar Baru Timur	$3.28 + X_{26}$
155	$X_{26,2}$	Pasar Baru Timur	Jembatan Merah	$1.83 + X_{26,1}$
156	$X_{26,3}$	Jembatan Merah	Pademangan	$3.6 + X_{26,2}$
157	$X_{26,4}$	Pademangan	Ancol	$5.69 + X_{26,3}$
158	X_{27}	Ragunan	Dep. Pertanian	$34.32 + X_{29}$ atau $3.13 + X_{29,16}$
159	$X_{27,1}$	Dep. Pertanian	SMK 57	$2.86 + X_{27}$
160	$X_{27,2}$	SMK 57	Jati Padang	$2.32 + X_{27,1}$
161	$X_{27,3}$	Jati Padang	Pejaten	$1.48 + X_{27,2}$
162	$X_{27,4}$	Pejaten	Buncit Indah	$2.27 + X_{27,3}$
163	$X_{27,5}$	Buncit Indah	Warung Jati	$1.16 + X_{27,4}$
164	$X_{27,6}$	Warung Jati	Imigrasi	$2.34 + X_{27,5}$
165	$X_{27,7}$	Imigrasi	Duren Tiga	$2.38 + X_{27,6}$
166	$X_{27,8}$	Duren Tiga	Mampang Prapatan	$1.72 + X_{27,7}$
167	$X_{27,9}$	Mampang Prapatan	Kuningan Timur	$2.91 + X_{27,8}$
168	$X_{27,10}$	Kuningan Timur	Patra Kuningan	$3.12 + X_{27,9}$
169	$X_{27,11}$	Patra Kuningan	DepKes	$1.23 + X_{27,10}$
170	$X_{27,12}$	DepKes	GOR Sumantri	$1.37 + X_{27,11}$
171	$X_{27,13}$	GOR Sumantri	Karet Kuningan	$1.87 + X_{27,12}$
172	$X_{27,14}$	Karet Kuningan	Kuningan Madya A	$1.29 + X_{27,13}$
173	$X_{27,15}$	Kuningan Madya Ai	Setia Budi Utara	$0.96 + X_{27,14}$
174	$X_{27,16}$	Setia Budi Utara	Latuharhari	$1.09 + X_{27,15}$
175	$X_{27,17}$	Latuharhari	Halimun	$2.48 + X_{27,16}$
176	X_{28}	Halimun	Dukuh Atas 2	$37.69 + X_{27}$ atau $4.83 + X_{27,16}$
177	X_{29}	Dukuh Atas 2	Setia Budi Utara	$5.07 + X_{28}, 24.71 + X_1, 25.21 + X_5, 5.07 + X_{17}$ atau $5.07 + X_{28}, 6.5 + X_{1,7}, 7.92 + X_{5,5}, 5.07 + X_{17}$
178	$X_{29,1}$	Setia Budi Utara	Kuningan Madya A	$3.59 + X_{29}$
179	$X_{29,2}$	Kuningan Madya A	Karet Kuningan	$1.27 + X_{29,1}$
180	$X_{29,3}$	Karet Kuningan	GOR Sumantri	$1.08 + X_{29,2}$
181	$X_{29,4}$	GOR Sumantri	DepKes	$1.27 + X_{29,3}$
182	$X_{29,5}$	DepKes	Patra Kuningan	$2.07 + X_{29,4}$
183	$X_{29,6}$	Patra Kuningan	Kuningan Timur	$1.36 + X_{29,5}$
184	$X_{29,7}$	Kuningan Timur	Mampang Prapatan	$1.34 + X_{29,6}$
185	$X_{29,8}$	Mampang Prapatan	Duren Tiga	$4.03 + X_{29,7}$
186	$X_{29,9}$	Duren Tiga	Imigrasi	$2.29 + X_{29,8}$
187	$X_{29,10}$	Imigrasi	Warung Jati	$1.93 + X_{29,9}$
188	$X_{29,11}$	Warung Jati	Buncit Indah	$1.33 + X_{29,10}$
189	$X_{29,12}$	Buncit Indah	Pejaten	$2.89 + X_{29,11}$
190	$X_{29,13}$	Pejaten	Jati Padang	$1.02 + X_{29,12}$
191	$X_{29,14}$	Jati Padang	SMK 57	$2 + X_{29,13}$
192	$X_{29,15}$	SMK 57	Dep Pertanian	$2.11 + X_{29,14}$
193	$X_{29,16}$	Dep Pertanian	Ragunan	$1.62 + X_{29,15}$
194	X_{30}	Kampung Melayu	Bidara Cina	$43.14 + X_{31}, 10.31 + X_{23}$ atau $4.29 + X_{31,12}, 3.8 + X_{23,4}$
195	$X_{30,1}$	Bidara Cina	Gelanggang Rmj	$2.65 + X_{30}$
196	$X_{30,2}$	Gelanggang Rmj	Cawang Otista	$3.07 + X_{30,1}$
197	$X_{30,3}$	Cawang Otista	BNN	$2.87 + X_{30,2}$
198	$X_{30,4}$	BNN	Cawang UKI	$1.4 + X_{30,3}$
199	$X_{30,5}$	Cawang UKI	BKN	$3.11 + X_{30,4}$

200	$X_{30,6}$	BKN	PGC (Cililitan)	$2.46 + X_{30,5}$
201	$X_{30,7}$	PGC (Cililitan)	Pasar Kramat Jati	$2.4 + X_{30,6}$
202	$X_{30,8}$	Pasar Kramat Jati	Pasar Induk	$6.43 + X_{30,7}$
203	$X_{30,9}$	Pasar Induk	RS. Har. Bunda	$11.03 + X_{30,8}$
204	$X_{30,10}$	RS. Har. Bunda	Fly Over Ry Bogor	$2.7 + X_{30,9}$
205	$X_{30,11}$	Fly Over Ry Bogor	Kamp.Rambutan	$2.65 + X_{30,10}$
206	X_{31}	Kamp. Rambutan	Tanah Merdeka	$52.81 + X_{30}$ atau $12.06 + X_{30,11}$
207	$X_{31,1}$	Tanah Merdeka	Fly Over Ry Bogor	$3.5 + X_{31}$
208	$X_{31,2}$	Fly Over Ry Bogor	RS. Har.Bunda	$2.25 + X_{31,1}$
209	$X_{31,3}$	RS. Har. Bunda	Pasar Induk	$3.08 + X_{31,2}$
210	$X_{31,4}$	Pasar Induk	Pasar Kramat Jati	$2.71 + X_{31,3}$
211	$X_{31,5}$	Pasar Kramat Jati	PGC (Cililitan)	$12.02 + X_{31,4}$
212	$X_{31,6}$	PGC (Cililitan)	BKN	$3.44 + X_{31,5}$
213	$X_{31,7}$	BKN	Cawang UKI	$1.92 + X_{31,6}$
214	$X_{31,8}$	Cawang UKI	BNN	$2.21 + X_{31,7}$
215	$X_{31,9}$	BNN	Cawang Otista	$2.05 + X_{31,8}$
216	$X_{31,10}$	Cawang Otista	Gelanggang Rmj	$2.02 + X_{31,9}$
217	$X_{31,11}$	Gelanggang Rmj	Bidara Cina	$2.48 + X_{31,10}$
218	$X_{31,12}$	Bidara Cina	Kampung Melayu	$1.18 + X_{31,11}$