DIMENSI METRIK GRAF $K_r + mK_s$, $m, r, s \in N$

Hindayani

Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
email: day_ihda@yahoo.co.id

ABSTRACT

The concept of minimum resolving set has proved to be useful and or related to a variety of fields such as Chemistry, Robotic Navigation, and Combinatorial Search and Optimization. So that, this thesis explains the metric dimension of graph $K_r + mK_s, m, r, s \in N$. Resolving set of a graph G is a subset of $V(G)$ that its distance representation is distinct to all vertices of graph G. Resolving set with minimum cardinality is called minimum resolving set, and cardinal states metric dimension of G and noted with $dim(G)$. By drawing the graph, it will be found the resolving set, minimum resolving set and the metric dimension easily. After that, formulate those metric dimensions into a theorem. This research search for the metric dimension of $K_r + mK_s, m \geq 2, m, r, s \in N$ and its outcome are $dim(K_r + mK_1) = m + (r-2)$ and $dim(K_r + mK_s) = m(s-1) + (r-1)$. This research can be continued for determining the metric dimension of another graph, by changing the operation of its graph or partition graph.

Keywords: *distance, resolving set, metric dimension, graph $K_r + mK_s$*

PENDAHULUAN

Dimensi Metrik menjadi menarik untuk dibahas karena konsep himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna dan atau terpakai untuk pembahasan pada bidang lain seperti Kimia (berdasarkan jurnal *Chartrand, dkk, Boundary vertices in Graph and Poisson and Zhang, The Metric Dimension of unicyclic graphs*), Navigasi Robot dan Pencarian (berdasarkan jurnal *Khuller, Raghavachari, and Rosenfeld, Landmarks in graphs*) dan Optimasi Kombinasi (berdasarkan jurnal *Sebo and Tannier, On Metric generator of graphs*) (Hernando, dkk, 1).

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan vertex $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010:736).

Kajian tentang dimensi metrik pada graf ini merupakan kajian yang sedang marak dibicarakan. Terbukti dengan adanya banyak jurnal dan penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini, misalnya *Graphs with Metric Dimension Two- A Characterization* (Sudhakara dan Herman, 2009), *On the Metric Dimension of Grassmann graphs* (Robert dan Karen, 2010), *On the Metric Dimension of Some Families of Graphs* (Jose dan Mari, 2010), Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010), *On the Metric Dimension of Corona Product Graphs* (Yero, dkk, 2010) dan lain sebagainya. Semuanya membahas tentang dimensi metrik pada graf. Penelitian ini sendiri sebenarnya merupakan pengembangan dari penelitian tentang dimensi metrik graf yang telah diteliti oleh peneliti sebelumnya, yaitu Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$.

Graf Kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* mK_2 dengan sebuah *vertex* pusat. Peneliti ingin mengembangkan penelitian ini pada graf $K_r + mK_s$. Oleh sebab itu, peneliti memilih "**Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s, m, r, s \in N$**" sebagai pokok bahasan pada penelitian ini.

KAJIAN TEORI

Graf

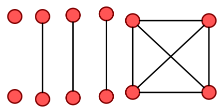
Suatu graf G adalah suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G

dilambangkan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Suatu sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), begitu juga dengan v dan e (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).

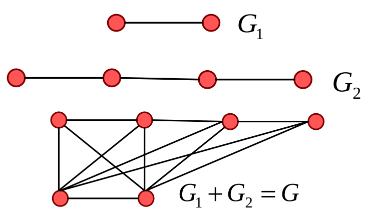
Contoh:



Gambar 1. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$

Definisi operasi jumlah dari graf G_1 dan G_2 ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan himpunan *vertex* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan *edge*-nya $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v) | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).

Contoh dari operasi penjumlahan pada graf dapat dilihat di bawah ini;



Gambar 2. Graf $G = G_1 + G_2$

Jarak, Eksentrisitas, dan Diameter Graf

Jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang minimum dari lintasan yang menghubungkan $u - v$ pada graf G jika ada, jika tidak ada $d(u, v) = \infty$ (Harary, 1969:14).

Eksentrisitas titik u di graf G dinotasikan dengan $e(u)$ adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. Jadi,

$$e(u) = max\{d(u, v) | v \in V(G)\}$$

Jika u dan v adalah titik pada G sehingga $e(u) = d(u, v)$, maka v disebut titik eksentrik dari u. Dengan kata lain, titik v disebut titik eksentrik dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u.

Diameter dari graf G dinotasikan dengan diam (G), adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G. Jadi,

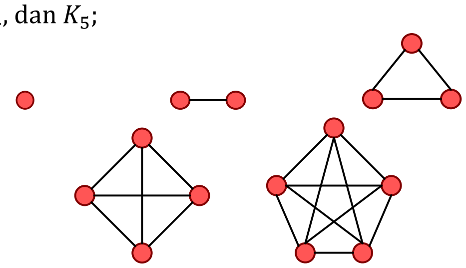
$$diam\ (G) = max\{e(v) | v \in V\}$$

(Abdussakir, dkk, 2009:56-57).

Jenis Graf

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan *order* n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $(n - 1)$ dengan *order* $p = n$ dan *size* $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

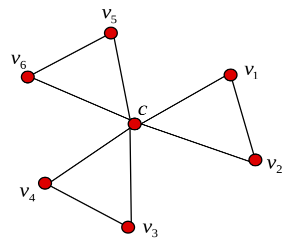
Berikut ini adalah gambar graf K_1, K_2, K_3, K_4, dan K_5;



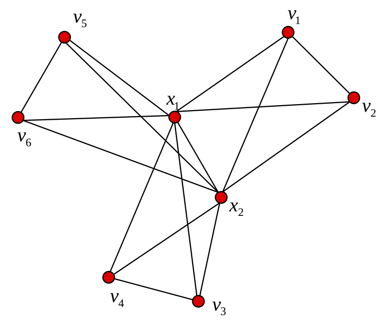
Gambar 3. Graf Komplit $K_1, K_2, K_3, K_4, dan\ K_5$

Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* $mK_2 = \underbrace{K_2 \cup K_2 \ldots \cup K_2}_{m}$ dengan sebuah *vertex* yang disebut *vertex* pusat *c*. Secara matematis graf kincir dituliskan dengan $W_2^m = K_1 + mK_2$. *Vertex* pusat dalam graf kincir diberi nama *c*, sedangkan v_i untuk dua *vertex* luar di bilah i dimana $1 \leq i \leq m$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010: 736).

Berikut adalah contoh dari graf kincir dengan 3-bilah;



Gambar 4. Graf Kincir dengan 3 bilah W_2^3



Gambar 5. Graf dengan Pola $K_2 + 3K_2$

Pengembangan dari graf kincir adalah graf $K_2 + mK_2$ yaitu graf kincir yang memiliki dua titik pusat. Graf dengan pola $K_2 + mK_2$ ini didefinisikan sebagai graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* mK_2 dengan dua buah *vertex* yang disebut *vertex* pusat x_1 dan x_2 yang saling terhubung. Dua *vertex* pusat dalam graf tersebut diberi nama x_1 dan x_2, sedangkan v_i untuk dua *vertex* luar di bilah *i* dimana $1 \leq i \leq m$. Contoh dari graf dengan pola $K_2 + mK_2$ dengan 3-bilah dapat dilihat pada Gambar 5.

Dimensi Metrik

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan *vertex* $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010: 736).

Lemma 1

Graf G dan H saling lepas dan ber-*order* minimum 2, berlaku:

$$\dim(G + H) \geq \dim(G) + \dim(H)$$

Bukti:

Misal S adalah himpunan pemisah di $G + H$. Diameter dari $G + H$ paling banyak 2. Karena itu, jarak di $G + H$ antara sebuah titik di $V(G)$ dan sebuah anggota himpunan $S \cap V(G)$ adalah 0, 1, atau 2 tergantung pada apakah v di S, terhubung langsung pada sebuah anggota himpunan $S \cap V(G)$, atau yang lain. Jarak di G antara sebuah titik $v \in V(G)$ dengan sebuah titik $u \in S \cap V(G)$ adalah 0, 1 atau paling tidak 2 tergantung dari apakah $d_{G+H}(v, u)$ adalah 0,1, atau tepat 2.

Cara yang sama berlaku pada graf H, yaitu antara graf H dengan $S \cap V(H)$. Karena $S \cap V(G)$ adalah himpunan pemisah untuk graf G maka $S \cap V(H)$ adalah himpunan pemisah untuk graf H (Glenn, dkk. 2005:5).

Lemma 2

Misal G dan H graf dengan *order* minimum 2, G dan H saling lepas, dan misal

$$\dim(G) = d_1 \text{ dan } \dim(H) = d_2$$

maka

$$\dim(G \cup H) = \dim(G) + \dim(H)$$

Bukti:

$\dim(G) = d_1$, berarti G mempunyai himpunan pemisah minimum yang kardinalitasnya d_1, sebut $S_G = \{v_1, v_2, \dots, v_{d_1}\}$. $\dim(H) = d_2$, berarti H mempunyai himpunan pemisah minimum dengan kardinalitas d_2 sebut $S_H = \{u_1, u_2, \dots, u_{d_2}\}$.

Ambil $x, y \in V(G \cup H)$ maka ada beberapa kemungkinan:

a. $x, y \in G$ maka representasi jarak S_G berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1$.
b. $x, y \in H$ maka representasi jarak S_H berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_2$.
c. $x \in G$ dan $y \in H$ maka representasi jarak antara $x\ dan\ y$ adalah tak hingga. Oleh karena itu, $S_G\ dan\ S_H$ memuat anggota himpunan ∞. Jadi representasi jarak $S_G\ dan\ S_H$ yang memuat ∞ berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1 + d_2$.
d. $x \in H$ dan $y \in G$ maka representasi jarak antara $x\ dan\ y$ adalah tak hingga. Oleh karena itu, $S_G\ dan\ S_H$ memuat anggota himpunan ∞. Jadi representasi jarak $S_G\ dan\ S_H$ yang memuat ∞ berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1 + d_2$.

sehingga terbukti bahwa:

$$\dim(G \cup H) = \dim(G) + \dim(H)$$

Lemma 3

Jika $K_s, s \geq 2$ dan $mK_s = \underbrace{K_s \cup K_s \cup K_s \cup \dots \cup K_s}_{m}$,

maka:

$$\dim(mK_s) = m \dim(K_s)$$

Bukti:

Akan dibuktikan dengan induksi matematika;

Untuk $m = 1$, $\dim(K_s) = \dim(K_s)$, benar

Untuk $m = 2$, $\dim(2K_s) = \dim(K_s \cup K_s)$

$= \dim(K_s) + \dim(K_s)$

$= 2\dim(K_s)$, *benar*

Diasumsikan benar untuk $m = k$, maka

$$\dim(kK_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \dots \cup K_s}_{k}\right)$$

$$\dim(kK_s) = \underbrace{\dim(K_s) + \dim(K_s) + \dots + \dim(K_s)}_{k}$$

$$\dim(kK_s) = k \dim(K_s)$$

Akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$

$$\dim((k+1)K_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \dots \cup K_s}_{k+1}\right)$$

$$\dim((k+1)K_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \dots \cup K_s}_{k} \cup K_s\right)$$

Misal $G = \underbrace{K_s \cup K_s \cup \dots \cup K_s}_{k}$, maka

$\dim((k+1)K_s) = \dim(G \cup K_s)$

$\dim((k+1)K_s) = \dim(G) + \dim(K_s)$

$\dim((k+1)K_s) = k\dim(K_s) + \dim(K_s)$

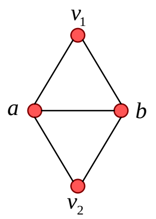
$\dim((k+1)K_s) = (k+1)\dim(K_s)$

Jadi, terbukti bahwa

$$\dim(mK_s) = m\dim(K_s)\ dengan\ s \geq 2.$$

Contoh:

Diberikan graf $K_2 + 2K_1$ seperti Gambar 6, akan ditunjukkan bahwa $\dim(K_2 + 2K_1) = 2$



Gambar 6. Graf $K_2 + 2K_1$

Bukti:

Ambil $S = \{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$$r(v_1|S) = (0)\ ;\ r(v_2|S) = (2)$$
$$r(a \mid S) = (1)\ ;\ r(b \mid S) = (1)$$

karena $r(a|S) = r(b|S) = (1)$ maka $S = \{v_1\}$ bukan himpunan pemisah dan juga bukan merupakan basis metrik. Sehingga banyaknya anggota $S = \{v_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik. Oleh karena itu, ambil S yang lain.

Ambil $S = \{v_1, a\}$, representasi jaraknya adalah:

$$r(v_1|S) = (0{,}1)\ ;\ r(v_2|S) = (2{,}1)$$
$$r(a \mid S) = (1{,}0)\ ;\ r(b \mid S) = (1{,}1)$$

karena tidak ada satupun representasi jarak yang sama untuk $S = \{v_1, a\}$, maka $S = \{v_1, a\}$ merupakan himpunan pemisah dan basis metrik. Selain itu, banyaknya anggota basis ini merupakan yang paling minimum sehingga banyaknya anggota $S = \{v_1, a\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi metrik dari graf dengan pola $K_2 + 2K_1$. Jadi, $\dim(K_2 + 2K_1) = 2$.

PEMBAHASAN

Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s$

Lemma 4

Untuk graf $K_r + mK_s$ dengan $m, r, s \in N$ berlaku;

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 \ jika\ u = v \\ 1 \ jika\ u \ \ dan \ \ v \ pada\ daun\ atau\ bilah\ yang\ sama \\ atau\ \ jika\ \ u\ \ atau\ \ v\ \ adalah\ \ titik\ \ di\ \ K_r \\ 2\ \ jika\ \ u\ \ dan\ \ v\ berada\ pada\ daun\ atau\ bilah\ yang\ berbeda \end{cases}$$

Bukti:

Jika $u\ dan\ v$ pada satu bilah yang sama dan graf yang digunakan pada bilahnya adalah graf komplit maka jarak dari setiap titik ke titik lainnya adalah 1, karena setiap titik dihubungkan oleh satu sisi. Sedang titik yang terletak pada bilah yang berbeda akan terpisah oleh titik pusatnya sehingga jaraknya adalah 2. Dan titik pusat dengan titik yang ada pada daun atau bilahnya mempunyai jarak 1.

Lemma 5

Basis metrik dari graf $K_r + mK_s$, dengan $m, s \geq 2$ dan $m, r, s \in N$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $(r-1)$ titik yang ada pada K_r ke dalam subhimpunan S.

Bukti:

Menurut Lemma 4, diperoleh bahwa jarak titik daun terhadap pusat (K_r) adalah 1, sehingga jika tidak ada titik dari K_r yang masuk ke dalam subhimpunan S, maka representasi jaraknya akan sama untuk masing-masing titik pada K_r terhadap subhimpunan yang diambil. Sehingga harusnya hanya ada satu titik dari K_r yang tidak masuk dalam subhimpunan S.

Lemma 6

Untuk graf $K_2 + mK_{s,}$ dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(K_2 + mK_s) = \begin{cases} m & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + 1 & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

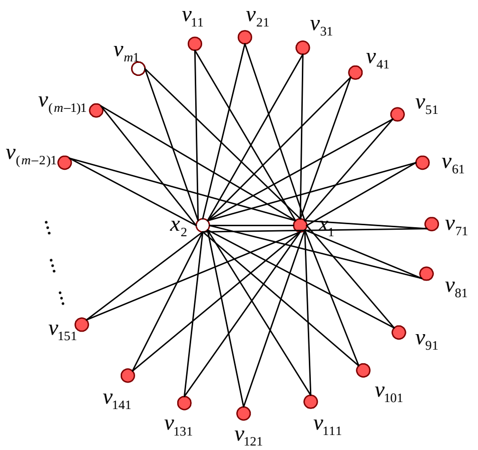
1. Untuk $s = 1, m \geq 2$ akan dibuktikan bahwa $dim(K_2 + mK_1) = m.$

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_2 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_2 + mK_1$ tersebut.

   a. Untuk menemukan batas atas

   Ambil $S = \{x_1, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \ldots, v_{(m-1)1}\}$.

   Graf $K_2 + mK_1$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 6. Graf $K_2 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_2 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_2 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m$, yang diperoleh dari sebanyak $(m-1)$ titik pada daun dan 1 titik pada K_2. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_2 + mK_1) \leq m$.

   b. Untuk menemukan batas bawah,

   Ambil $|S| = m - 1$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_2 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil

$S = \{x_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{(m-2)1}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_2 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S, yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_2, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_2 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m \leq \dim(K_2 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_2 + mK_1)$ adalah $m \leq \dim(K_2 + mK_1) \leq m$ maka $\dim(K_2 + mK_1) = m$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_2 + mK_s) = m$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $s \geq 2, m \geq 2$ akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_2 + mK_s) = 1 + m(s-1)$$

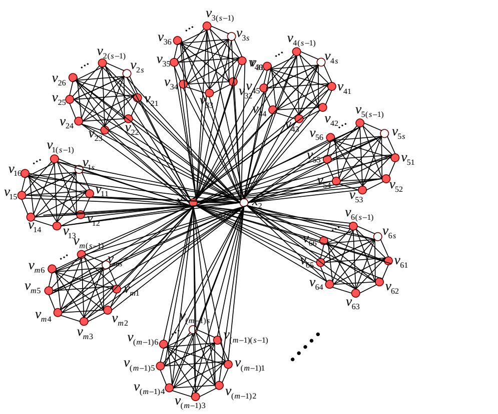
Menurut Lemma 1, diperoleh:

$$\dim(K_2 + mK_s) \geq \dim(K_2) + \dim(mK_s)$$
$$\dim(K_2 + mK_s) \geq 1 + m(s-1)$$

Ambil

$S = \{x_1, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2(s-1)}, \ldots, v_{m1}, v_{m2}, \ldots, v_{m(s-1)}\}$

Berikut adalah gambar graf $K_2 + mK_s$ dengan pengambilan S;



Gambar 7. Graf $K_2 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S memiliki representasi jarak yang berbeda maka S ini adalah himpunan pemisah. Misal B adalah basis metrik berlaku:

$$|B| \leq |S|$$
$$\dim(K_2 + mK_1) \leq |S|$$

$|S|$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s-1)$ titik di daun dan 1 titik graf K_2, maka $|S| = m(s-1) + 1$, sehingga diperoleh:

$$\dim(K_2 + mK_1) \leq 1 + m(s-1)$$

Kesimpulannya,

$\dim(K_2 + mK_1) \geq 1 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_2 + mK_1) \leq 1 + m(s-1)$

Jadi terbukti bahwa:

$$\dim(K_2 + mK_1) = 1 + m(s-1)$$

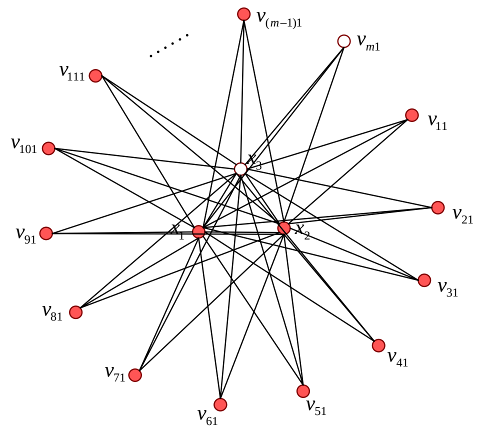
Lemma 7

Untuk graf $K_3 + mK_s$, dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(K_3 + mK_s) = \begin{cases} m+1 & \text{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + 2 & \text{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$, akan dibuktikan $\dim(K_3 + mK_1) = m + 1$.
   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_3 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_3 + mK_1$ tersebut.
   a. Untuk menemukan batas atas
   Ambil $S = \{x_1, x_2, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \ldots, v_{(m-1)1}\}$. Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_3 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_3 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 1$, yaitu sebanyak $m - 1$ titik di bilah dan 2 titik yang ada di graf K_3. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_3 + mK_1) \leq m + 1$.
   Graf $K_3 + mK_1$ dapat dilihat pada gambar di bawah ini;

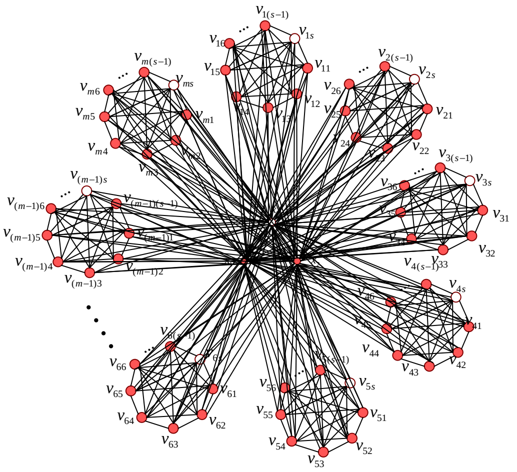


Gambar 8. Graf $K_3 + mK_1$ dengan pengambilan S

   b. Untuk menemukan batas bawah
   Ambil $|S| = m$ Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya

dua titik pada graf $K_3 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_3 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_3, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_3 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 1 \le |S|$ atau dapat dituliskan $m + 1 \le \dim(K_3 + mK_1)$.
Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_3 + mK_1)$ adalah $m + 1 \le \dim(K_3 + mK_1) \le m + 1$ maka $\dim(K_3 + mK_1) = m + 1$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_3 + mK_s) = m + 1$, untuk $m \ge 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \ge 2$, akan dibuktikan bahwa
$$\dim(K_3 + mK_s) = 2 + m(s-1)$$
Menurut Lemma 1, diperoleh:
$$\dim(K_3 + mK_s) \ge \dim(K_3) + \dim(mK_s)$$
$$\dim(K_3 + mK_s) \ge 2 + m(s-1)$$
Ambil
$S = \{x_1, x_2, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots,$
$v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$
Maka graf $K_3 + mK_s$ dengan pengambilan S dapat dilihat pada gambar di bawah ini;



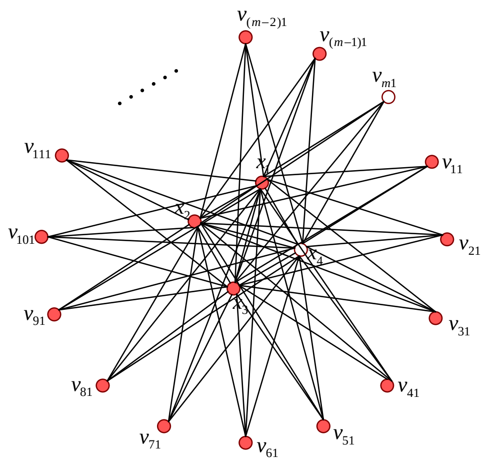
Gambar 9. Graf $K_3 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap seluruh titik pada graf $K_3 + mK_s$ maka S adalah himpunan pemisah dan jika B adalah basis, berlaku:
$$|B| \le |S|$$
$$\dim(K_3 + mK_s) \le |S|$$
$|S|$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s-1)$ titik yang ada di daun dan 2 titik yang berada di K_3, maka $|S| = 2 + m(s-1)$, , Sehingga diperoleh:
$$\dim(K_3 + mK_s) \le 2 + m(s-1)$$
Kesimpulannya:
$\dim(K_3 + mK_s) \ge 2 + m(s-1)$ dan
$\dim(K_3 + mK_s) \le 2 + m(s-1)$
Jadi terbukti bahwa:
$$\dim(K_3 + mK_s) = 2 + m(s-1)$$

Lemma 8
Untuk graf $K_4 + mK_s$, dengan $m, s \in N$, maka:
$$\dim(K_4 + mK_s) = \begin{cases} m+2 & \textit{untuk } m \ge 2, s = 1 \\ (s-1)m + 3 & \textit{untuk } m, s \ge 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk $m \ge 2, s = 1$ akan dibuktikan bahwa $\dim(K_4 + mK_1) = m + 2$.
Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_4 + mK_s$ dengan $m \ge 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_4 + mK_1$ tersebut.
a. Untuk menemukan batas atas
Ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$.
Berikut adalah gambar graf $K_4 + mK_1$ dengan pengambilan *S;*



Gambar 10. Graf $K_4 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_4 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_4 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 2$, yaitu sebanyak $m - 1$ titik di bilah dan 3 titik dari graf K_4. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_4 + mK_1) \leq m + 2$.

b. Untuk menemukan batas bawah

Ambil $|S| = m + 1$ Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_4 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_4 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_4, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_4 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 2 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 2 \leq \dim(K_4 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_4 + mK_1)$ adalah $m + 2 \leq \dim(K_4 + mK_1) \leq m + 2$ maka $\dim(K_4 + mK_1) = m + 2$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_4 + mK_s) = m + 2$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_4 + mK_s) = 3 + m(s-1)$$

Dari Lemma 1 diperoleh:

$$\dim(K_4 + mK_s) \geq \dim(K_4) + \dim(mK_s)$$
$$\dim(K_4 + mK_s) \geq 3 + m(s-1)$$

Ambil

$S = \{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$

Karena S memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap graf $K_4 + mK_s$ dan misal B basis, maka berlaku:

$$|B| \leq |S|$$
$$\dim(K_4 + mK_s) \leq |S|$$

$|S|$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s-1)$ titik di daun dan 3 titik di K_4, maka $|S| = 3 + m(s-1)$.

Sehingga diperoleh:

$$\dim(K_4 + mK_s) \leq 3 + m(s-1).$$

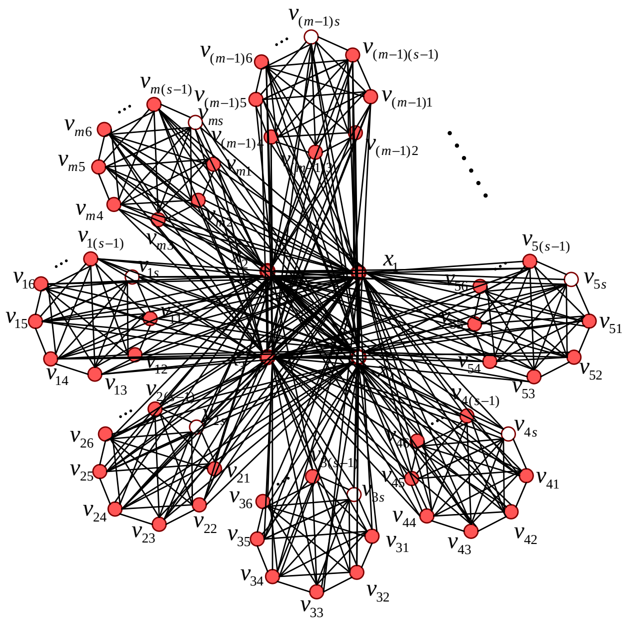
Kesimpulannya:

$$\dim(K_4 + mK_s) \geq 3 + m(s-1) \text{ dan}$$
$$\dim(K_4 + mK_s) \leq 3 + m(s-1)$$

Jadi terbukti bahwa:

$$\dim(K_4 + mK_s) = 3 + m(s-1)$$

Graf $K_4 + mK_s$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 11. Graf $K_4 + mK_s$ dengan pengambilan S

Lemma 9

Untuk graf $K_5 + mK_s$, dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(K_5 + mK_s) = \begin{cases} m+3 & \textit{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + 4 & \textit{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$ akan dibuktikan bahwa $\dim(K_5 + mK_1) = m + 3$.

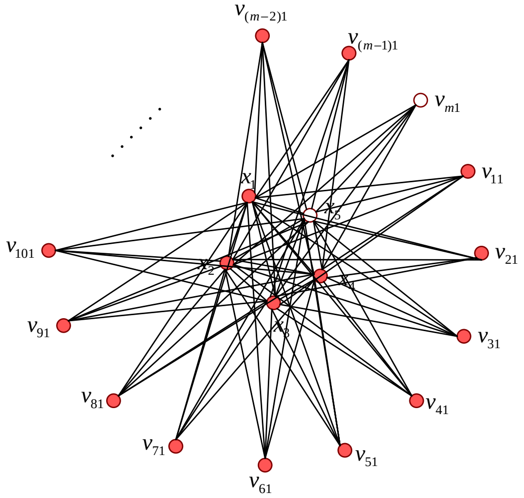
Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_5 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_5 + mK_1$ tersebut.

a. Untuk menemukan batas atas

Ambil

$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$, sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_5 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_5 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 3$ yaitu, sebanyak $m - 1$ titik dari graf yang ada di bilah dan 4 titik dari graf K_5. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih

minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_5 + mK_1) \leq m + 3$.
Graf $K_5 + mK_1$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



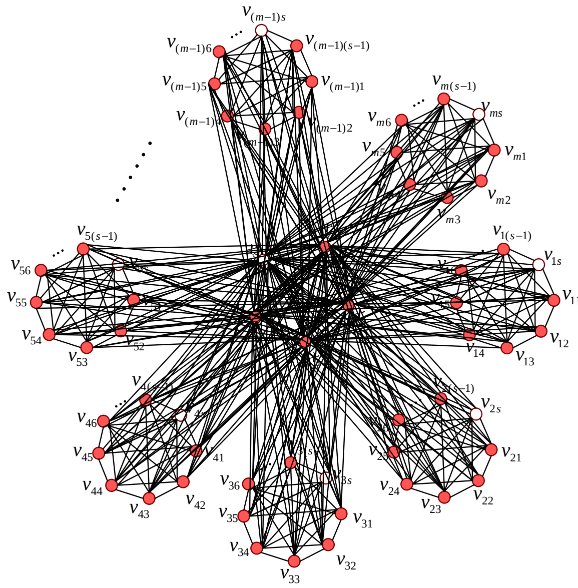
Gambar 12. Graf $K_5 + mK_1$ dengan pengambilan S

b. Untuk menemukan batas bawah

Ambil $|S| = m + 2$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_5 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_5 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_5, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_5 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 3 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 3 \leq \dim(K_5 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_5 + mK_1)$ adalah $m + 3 \leq \dim(K_5 + mK_1) \leq m + 3$ maka $\dim(K_5 + mK_1) = m + 3$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_5 + mK_s) = m + 3$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa
$$\dim(K_5 + mK_s) = 4 + m(s - 1)$$
Dari Lemma 1, diperoleh:
$$\dim(K_5 + mK_s) \geq \dim(K_5) + \dim(mK_s)$$
$$\dim(K_5 + mK_s) \geq 4 + m(s - 1)$$
Ambil
$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.
Karena representasi jarak S terhadap graf $K_5 + mK_s$ berbeda, maka S adalah himpunan pemisah dan misal B basis metrik maka berlaku:
$$|B| \leq |S|$$
$$\dim(K_5 + mK_s) \leq |S|$$
$|S|$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s - 1)$ titik pada daun dan 4 titik di K_5, maka $|S| = 4 + m(s - 1)$.
Sehingga diperoleh:
$$\dim(K_5 + mK_s) \leq 4 + m(s - 1),$$

Kesimpulannya:
$$\dim(K_5 + mK_s) \geq 4 + m(s - 1) \text{ dan}$$
$$\dim(K_5 + mK_s) \leq 4 + m(s - 1)$$
Jadi terbukti bahwa:
$$\dim(K_5 + mK_s) = 4 + m(s - 1)$$
Graf $K_5 + mK_s$ dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 13. Graf $K_5 + mK_s$ dengan pengambilan S

Teorema

Untuk graf $K_r + mK_s$, dengan $m, r, s \in N$, berlaku:
$$\dim(K_r + mK_s) = \begin{cases} m + (r-2) & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + (r-1) & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

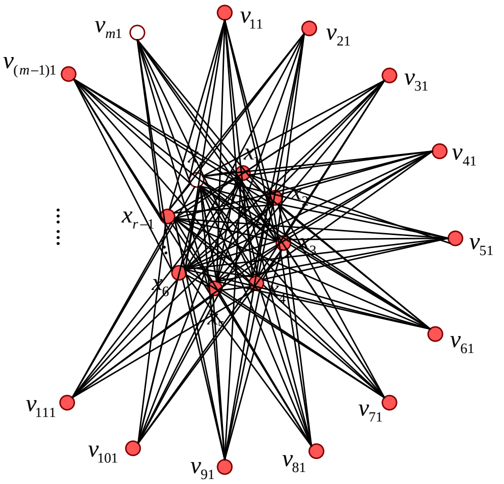
Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$, akan dibuktikan bahwa $dim(K_r + mK_s) = m + (r - 2)$.
Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_r + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_r + mK_1$ tersebut.

a. Untuk menemukan batas atas

Ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{r-1}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$, sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_r + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_r + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + (r-2)$, yaitu sebanyak $m-1$ titik pada bilah dan $r-1$ titik pada graf K_r. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_r + mK_1) \le m + (r-2)$.

Graf $K_r + mK_1$ dengan pengambilan S adalah sebagai berikut;



Gambar 14. Graf $K_r + mK_1$ dengan pengambilan S

b. Untuk menemukan batas bawah

Ambil $|S| = m + (r-3)$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_r + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{r-1}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_r + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_r, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_r + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + (r-2) \le |S|$ atau dapat dituliskan $m + (r-2) \le \dim(K_r + mK_1)$.

Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_r + mK_1)$ adalah

$$m + (r-2) \le \dim(K_r + mK_1) \le m + (r-2),$$

maka $\dim(K_r + mK_1) = m + (r-2)$.

Jadi terbukti bahwa

$$\dim(K_r + mK_s) = m + (r-2),$$

untuk $m \ge 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \ge 2$, akan dibuktikan bahwa $\dim(K_r + mK_s) = (r-1) + m(s-1)$

Dari Lemma 1, Lemma 2, Lemma 6, Lemma 7, Lemma 8, dan Lemma 9, diperoleh:

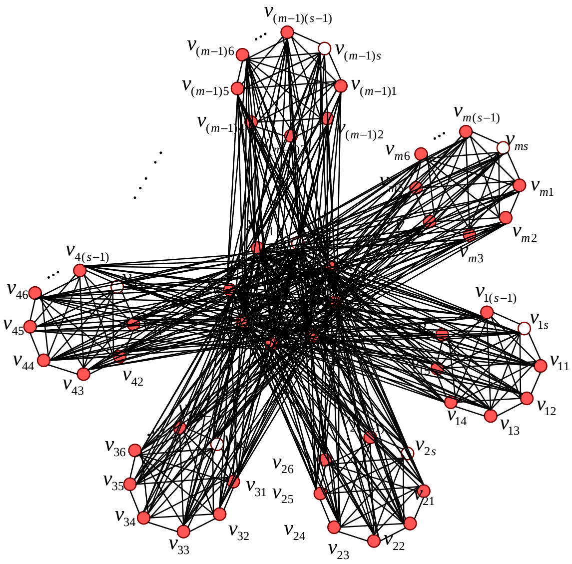
$$\dim(K_r + mK_s) \ge \dim(K_r) + \dim(mK_s)$$

$$\dim(K_r + mK_s) \ge (r-1) + m(s-1)$$

Ambil

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.

Graf $K_r + mK_s$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 15. Graf $K_r + mK_s$ dengan pengambilan S

S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap graf $K_r + mK_s$, sehingga S merupakan himpunan pemisah. Misal B adalah basis metrik, maka berlaku:

$$|B| \le |S|$$

$$\dim(K_r + mK_s) \le |S|$$

Karena $|S| = (r-1) + m(s-1)$, maka:

$$\dim(K_r + mK_s) \le (r-1) + m(s-1)$$

Sehingga diperoleh:

$$\dim(K_r + mK_s) \ge (r-1) + m(s-1) \text{ dan}$$

$$\dim(K_r + mK_s) \geq (r-1) + m(s-1)$$

Jadi terbukti bahwa:

$$\dim(K_r + mK_s) = (r-1) + m(s-1)$$

PENUTUP

Dari pembahasan tentang dimensi metrik graf $K_r + mK_s$ ini didapatkan kesimpulan bahwa untuk $m, r, s \in N$, berlaku:

$$\dim(\mathrm{K}_r + mK_s) = \begin{cases} m + (r-2) & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + (r-1) & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

Jadi, graf $K_r + mK_s$ memiliki dimensi masing-masing sesuai dengan m, r, s yang diinginkan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

[2] Hernando, Carmen, dkk. *On The Metric Dimension of Some Families of Graphs*. preprint.

[3] Chartrand, Garry dan Linda Lesniak. 1986. *Graph and Digraphs*. California: Pacific Graw.

[4] Glenn, dkk. 2005. *Bounds on The Metric and Partition Dimension of a Graph*. University of Alaska.

[5] Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. America: Addison-Wesley Publishing Company Inc

[6] Wahyudi, Suhud dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_3$**.** FMIPA ITS, 731-744.