

AUTOMORFISME GRAF BINTANG DAN GRAF LINTASAN

Reni Tri Damayanti

Mahasiswa Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya
Email: si_cerdazzz@rocketmail.com

ABSTRAK

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain, automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf G , $E(G)$ yang menghasilkan graf yang isomorfik dengan dirinya sendiri. Jika ϕ adalah suatu automorfisme dari G ke G dan $v \in V(G)$ maka $deg_{\phi}(v) = deg_G(v)$ untuk mencari automorfisme pada suatu graf, biasanya dilakukan dengan menentukan semua kemungkinan fungsi yang satu-satu, onto, dan isomorfisme dari himpunan titik pada graf tersebut. Sehingga berdasarkan hal itu dapat diketahui dan diuraikan automorfisme graf bintang dan graf lintasan serta penjabarannya. Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh: (1) Graf bintang- n ($K_{1,n}$) memiliki $n+1$ titik, banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$. Permutasinya α adalah automorfisme yang harus mengawetkan derajat titik-titiknya, oleh karena itu permutasinya harus berbentuk $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$. Jika $\alpha(K_{1,n}) = (v_1 v_2 v_3 \dots v_n)$ fungsi bijektif maka $\alpha(K_{1,n})$ merupakan automorfisme; (2) Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi permutasi yang berbentuk:

(a) untuk n genap: $\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_n v_{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\right)$,

untuk n ganjil: $\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_{n+1}-1 v_{\frac{n+1}{2}+1}\right) \left(\frac{v_{n+1}}{\frac{n+1}{2}}\right)$ dan

(b) $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$.

Kata Kunci: graf bintang ($K_{1,n}$), graf lintasan P_n , isomorfisme graf, automorfisme graf, dan grup simetri

PENDAHULUAN

Graf didefinisikan sebagai himpunan titik (*verteks*) yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi (*edge*) yang mungkin kosong. Himpunan titik dari suatu graf G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinyatakan dengan $E(G)$. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang automorfisme graf. Automorfisme dari suatu graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau himpunan sisi-sisi dari graf G ($E(G)$). Dengan kata lain, automorfisme dari suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri, yaitu fungsi yang memetakan ke dirinya sendiri.

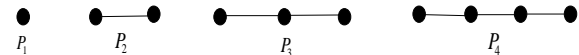
Pada bab ini akan dibahas mengenai automorfisme suatu graf pada graf bintang dan graf lintasan. Pada graf bintang, teorema yang dibangun adalah (1) banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme, (2) bentuk fungsi permutasi yang automorfisme yaitu titik $v_i \in V(K_{1,n})$ yang selalu dipetakan ke dirinya sendiri sedangkan titik lainnya dapat dipetakan ke sebarang titik kecuali v_i . Sedangkan pada graf lintasan, teorema yang dibangun adalah banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme dari graf P_n yaitu hanya 2 fungsi yang dibedakan berdasarkan banyak titik genap dan ganjil. Kemudian

mengetahui bahwa grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n dan grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2).

GRAF LINTASAN DAN GRAF BINTANG

Definisi 1. Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n verteks dilambangkan oleh P_n . Perhatikan bahwa P_n memiliki n -tepi, dan dapat diperoleh dari graf siklus C_n dengan menghapus sebuah sisi.

Contoh 1:

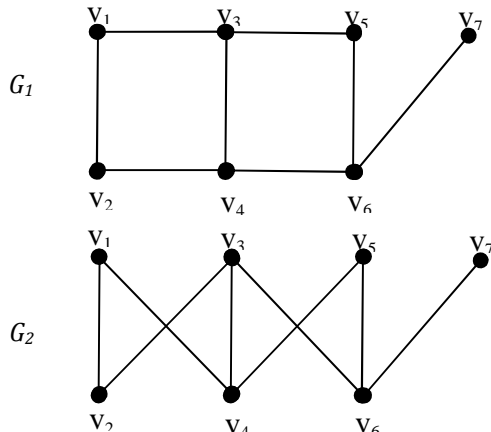


Gambar 1. Graf Lintasan

Dari gambar 1. di atas, graf P_1 hanya mempunyai satu titik, maka P_1 tidak mempunyai sisi. Pada graf P_2 mempunyai dua titik dan satu sisi. Pada graf P_3 mempunyai tiga titik dan dua sisi. Sedangkan, pada graf P_4 mempunyai empat titik dan tiga sisi. Jadi, penulis dapat menentukan beberapa ciri khusus dari graf lintasan P_n adalah setiap titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 1 dan titik selain titik ujung dan titik pangkal selalu berderajat 2.

Definisi 2. Suatu graf G lengkap partisi- n adalah graf partisi- n dengan himpunan-himpunan partisi V_1, V_2, \dots, V_n yang memiliki sifat tambahan yaitu jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j, i \neq j$ maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, kemudian graf ini dinotasikan dengan $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$. (Order pada bilangan p_1, p_2, \dots, p_n tidak penting.) Ingat bahwa graf lengkap partisi- n adalah lengkap jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i , dalam hal ini adalah K_n . Jika $p_i = t$ untuk semua i , kemudian graf lengkap partisi- n adalah tetap dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Maka, $K_{n(t)} \cong K_n$. Suatu graf bipartisi lengkap dengan himpunan partisi V_1 dan V_2 , dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, kemudian dinotasikan dengan $K(m, n)$. Graf $K(1, n)$ disebut graf bintang.

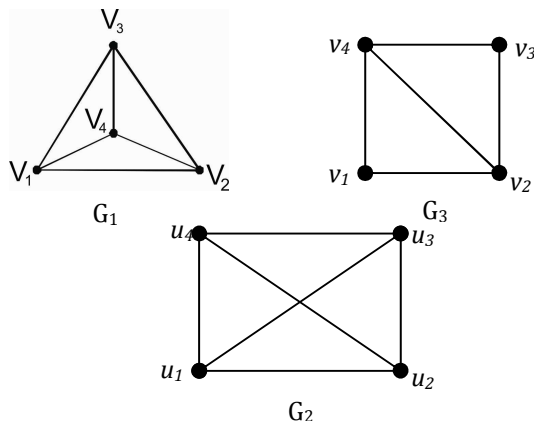
Contoh 2:



Gambar 2 Graf Bipartisi

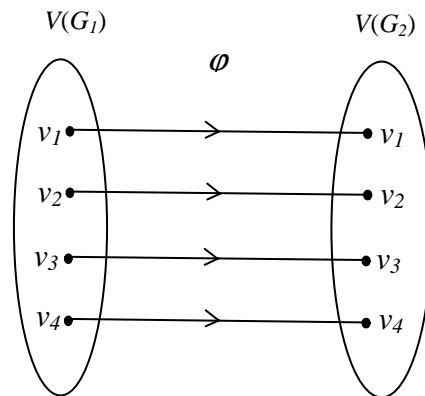
Definisi 3. Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu ϕ antara $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sedemikian hingga misal $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\phi(u)\phi(v)) \in E(G_2)$. Jika G_1 isomorfis terhadap G_2 dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$.

Contoh 3:



Gambar 3. G_1 isomorfik dengan G_2 tetapi tidak isomorfik dengan G_3

Pemetaan $\phi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ didefinisikan oleh:



Gambar 4. Pemetaan Satu-satu

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= u_1, & \phi(v_2) &= u_2, & \phi(v_3) &= u_3, \\ \phi(v_4) &= u_4 \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\phi(v_1), \phi(v_2)), (\phi(v_1), \phi(v_3)), (\phi(v_1), \phi(v_4)), (\phi(v_2), \phi(v_3)), (\phi(v_2), \phi(v_4)), (\phi(v_3), \phi(v_4)) \in E(G_2)$.

$(v_1, v_2) \in E(G_1)$ dan

$$(\phi(v_1), \phi(v_2)) = (u_1, u_2) \in E(G_2)$$

$(v_1, v_3) \in E(G_1)$ dan

$$(\phi(v_1), \phi(v_3)) = (u_1, u_3) \in E(G_2)$$

$(v_1, v_4) \in E(G_1)$ dan

$$(\phi(v_1), \phi(v_4)) = (u_1, u_4) \in E(G_2)$$

$(v_2, v_3) \in E(G_1)$ dan

$$(\phi(v_2), \phi(v_3)) = (u_2, u_3) \in E(G_2)$$

$(v_2, v_4) \in E(G_1)$ dan

$$(\phi(v_2), \phi(v_4)) = (u_2, u_4) \in E(G_2)$$

$(v_3, v_4) \in E(G_1)$ dan

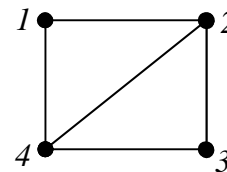
$$(\phi(v_3), \phi(v_4)) = (u_3, u_4) \in E(G_2)$$

Berdasarkan uraian diatas terbukti bahwa $G_1 \cong G_2$.

Definisi 4 Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$. Jika ϕ adalah suatu automorfisme dari G dan $v \in V(G)$ maka $deg_G \phi(v) = deg_G(v)$.

Contoh 4:

Misal diberikan graf G seperti di bawah ini:



Gambar 5. Graf G

Diberikan pemetaan $\phi: V(G) \rightarrow V(G)$, maka automorfisme yang mungkin dari graf G di atas adalah:

$\varphi(1) = 1$
 $\varphi(2) = 2$
 $\varphi(3) = 3$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (1)(2)(3)$

$\varphi(1) = 1$
 $\varphi(2) = 3$
 $\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (3)(12)$

$\varphi(1) = 2$
 $\varphi(2) = 3$
 $\varphi(3) = 1$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (123)$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini ditentukan banyaknya automorfisme dari masing-masing graf ke dirinya sendiri berdasarkan bentuk-bentuk permutasi yang mengacu pada pemetaan titiknya yang memenuhi fungsi tersebut, dengan pola sebagai berikut:

$\varphi(1) = 3$
 $\varphi(2) = 1$
 $\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (132)$

Graf Bintang

Pada graf bintang banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titiknya sebagai berikut:

$\varphi(1) = 1$
 $\varphi(2) = 3$
 $\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (1)(23)$

$\varphi(1) = 1$
 $\varphi(2) = 3$
 $\varphi(3) = 2$

Atau dapat ditulis
 $\varphi = (2)(13)$

Tabel 1. Banyaknya Automorfisme dari $G(K_{1,n}) \cong G(K_{1,n})$

Graf Bintang	Automorfisme	Banyaknya Automorfisme	
$K_{1,2}$	$\alpha = (1)(2)(3)$	1	2
	$\alpha = (1)(..)$	1	
$K_{1,3}$	$\alpha = (1)(2)(3)(4)$	1	6
	$\alpha = (1)(...)$	2	
	$\alpha = (1)(.)(..)$	3	
$K_{1,4}$	$\alpha = (1)(2)(3)(4)(5)$	1	24
	$\alpha = (1)(....)$	6	
	$\alpha = (1)(.)(...)$	8	
	$\alpha = (1)(.)(.)(..)$	6	
	$\alpha = (1)(..)(..)$	3	
$K_{1,5}$	$\alpha = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$	1	120
	$\alpha = (1)(.....)$	24	
	$\alpha = (1)(.)(....)$	30	
	$\alpha = (1)(.)(.)(...)$	20	
	$\alpha = (1)(.)(.)(.)(..)$	10	
	$\alpha = (1)(.)(.)(..)(..)$	15	
$K_{1,6}$	$\alpha = (1)(..)(...)$	20	120
	$\alpha = (1)(.....)$	120	

Dari penjelasan tentang automorfisme pada graf bintang berdasarkan bentuk-bentuk permutasi yang mengacu pada pemetaan titiknya yang memenuhi fungsi tersebut, maka dapat dibuat tabel banyaknya automorfisme dari kemungkinan banyak fungsi tersebut melalui tempat kedudukan titik-titiknya dengan bentuk fungsi $(1) \underbrace{(\dots \dots \dots)}_n$:

Tabel 2 Banyaknya Automorfisme Melalui Bentuk Permutasi Titiknya dari $K_{1,n}$

Graf Bintang ($K_{1,n}$)	Σ fungsi berbentuk $\underbrace{(\dots \dots \dots)}_n$	
$K_{1,2}$	1	$1 = 1!$
$K_{1,3}$	2	$2 \cdot 1 = 2!$
$K_{1,4}$	6	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$
$K_{1,5}$	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
$K_{1,6}$	120	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$
...
$K_{1,n}$		$n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$

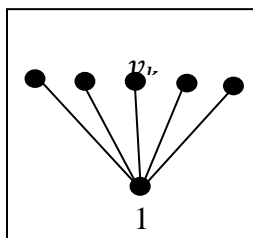
Dari uraian automorfisme graf bintang di atas maka berdasarkan banyak titik dapat dibuat teorema tentang banyak automorfisme dari graf $K_{1,n}$ untuk n bilangan asli yang fungsinya berbentuk $(1 \underbrace{(\dots \dots \dots)}_n)$, yaitu sebagai berikut:

Teorema 1

Graf bintang- n ($K_{1,n}$) memiliki $n+1$ titik. Banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$.
 Diketahui: misalkan α adalah automorfisme dari $K_{1,n}$ ke dirinya sendiri. Akan dibuktikan: $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ dengan $k \neq 1$ dan $t \neq 1$.

Bukti

Graf $K_{1,n}$ memiliki $n + 1$ titik. Misalkan titik-titiknya adalah $V(K_{1,n}) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1})$. Misalkan α adalah automorfisme dari $K_{1,n}$ ke dirinya sendiri. Karena $\alpha(v_1) = v_1$, yang berarti mengawetkan derajat v_1 itu sendiri, sehingga banyaknya titik yang dapat dipermutasikan adalah sebanyak n titik, maka permutasinya dapat dirumuskan sebanyak $n!$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$. Karena derajat titik $v_k = 1$ sehingga $\alpha(v_k) = v_t$ juga mengawetkan derajat titiknya. Andaikan $\alpha(v_1) = v_k$ dengan $k \neq 1$ dan $v_t = v_m$ ($k \neq t \neq m$).



Gambar 6. bintang- n ($K_{1,n}$)

$$(v_1, v_t) \in E(K_{1,n})$$

$$\alpha((v_1, v_t)) = (\alpha(v_1), \alpha(v_t))$$

$$= (v_k, v_m) \notin E(K_{1,n})$$

Jadi, $\alpha(v_1) = v_k$ maka α bukan automorfisme. Sehingga, pengandaian $k \neq 1$ salah. Jadi, seharusnya pengandaian menjadi $k = 1$ atau $\alpha(v_1) = v_1$.

Dari teorema 1 di atas, maka dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

Teorema 2

Grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n atau $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$.

Bukti

Akan ditunjukkan ada korespondensi satu-satu dari anggota (S_n, o) pada $(\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$. Buat pemetaan f dari S_n ke $\mathcal{A}(K_{1,n})$ dengan aturan sebagai berikut (contoh dapat dilihat pada lampiran):

Jika $\alpha \in S_n$ dengan

$$\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_r), 1 \leq r \leq n$$

Maka $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $f(\alpha) = (v_{\alpha_1+1} \ v_{\alpha_2+1} \ v_{\alpha_3+1} \ \dots \ v_{\alpha_r+1})$

Karena α dan $f(\alpha)$ korespondensinya sama, maka bentuk permutasinya sama.

Dapat ditunjukkan bahwa f bersifat bijektif dan homomorfisme.

Jika $x, y \in S_n$ dan $f(x), f(y) \in \mathcal{A}(K_{1,n})$

Maka $x \rightarrow f(x)$

$$y \rightarrow f(y)$$

$$\text{Jadi, } f(xy) = f(x)f(y)$$

Dengan demikian f adalah isomorfisme.

Jadi, $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$ terbukti.

Graf Lintasan

Pada graf lintasan banyaknya automorfisme yang mengacu pada pemetaan titiknya sebagai berikut:

Tabel 3 Banyaknya Automorfisme dari $G(P_n) \rightarrow G(P_n)$

Graf Lintasan	Automorfisme	Banyaknya Automorfisme	
P_2	$\beta = (1)(2)$	1	2
	$\beta = (1 \ 2)$	1	
P_3	$\beta = (1)(2)(3)$	1	2
	$\beta = (1 \ 3)(2)$	1	
P_4	$\beta = (1)(2)(3)(4)$	1	2
	$\beta = (1 \ 4)(2 \ 3)$	1	
P_5	$\beta = (1)(2)(3)(4)(5)$	1	2
	$\beta = (1 \ 5)(2 \ 4)(3)$	1	
P_6	$\beta = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$	1	2
	$\beta = (1 \ 6)(2 \ 5)(3 \ 4)$	1	

Dari tabel 3 di atas, maka dapat dibuat bentuk umum dari banyaknya fungsi permutasi yang automorfisme sebagai berikut:

Tabel 4. Bentuk Umum Automorfisme dari $G(P_n) \rightarrow G(P_n)$ Berdasarkan Banyak Titik Genap dan Ganjil

nGenap	$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$ sebanyak 1
	$\alpha_2 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_n v_{n+1}}{2}\right)$
nGanjil	$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$ sebanyak 1
	$\alpha_2 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right) \left(\frac{v_{n+1}}{2}\right)$

Dari uraian automorfisme graf lintasan di atas maka berdasarkan banyak titik dapat dibuat teorema tentang banyak automorfisme dari graf P_n , yaitu sebagai berikut:

Teorema 3

Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi yang berbentuk:

a. Untuk n genap, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_n v_{n+1}}{2}\right)$$

dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$

b. Untuk n ganjil, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots$$

$$\left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right) \left(\frac{v_{n+1}}{2}\right)$$

dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$

Bukti

a. Untuk n genap, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_n v_{n+1}}{2}\right)$$

Sehingga,

$$\alpha(v_1) = v_n \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 1}$$

$$\alpha(v_2) = v_{n-1} \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

$$\alpha(v_3) = v_{n-2} \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

↓ ↓

$$\alpha\left(\frac{v_n}{2}\right) = \alpha\left(\frac{v_{n+1}}{2}\right) \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

↓ ↓

$$\alpha(v_{n-1}) = 2 \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

$$\alpha(v_n) = 1 \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 1}$$

Karena graf lintasan (P_n) ini jumlah titiknya genap, maka

$$((v_1), (v_2)) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha((v_1), (v_2)) = (\alpha(v_1), \alpha(v_2)) = (v_n, v_{n-1}) \in E(P_n)$

$$((v_2), (v_3)) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha((v_2), (v_3)) = (\alpha(v_2), \alpha(v_3)) = (v_{n-1}, v_{n-2}) \in E(P_n)$

$$\left(\left(\frac{v_n}{2}\right), \left(\frac{v_{n+1}}{2}\right)\right) \in E(P_n)$$

Sehingga,

$$\alpha\left(\left(\frac{v_n}{2}, \frac{v_{n+1}}{2+1}\right)\right) = \left(\alpha\left(\frac{v_n}{2}\right), \alpha\left(\frac{v_{n+1}}{2+1}\right)\right) = \left(\frac{v_{n+1}}{2}, \frac{v_n}{2}\right) = \left(\frac{v_n}{2}, \frac{v_{n+1}}{2+1}\right) \in E(P_n)$$

Begitu pula untuk

$$((v_{n-1}), (v_n)) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha((v_{n-1}), (v_n)) = (\alpha(v_{n-1}), \alpha(v_n)) = (v_2, v_1) \in E(P_n)$

Jadi, $\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(\frac{v_n v_{n+1}}{2}\right)$

terbukti automorfisme.

Selanjutnya, untuk fungsi identitas tidak perlu ditunjukkan karena sudah jelas automorfisme.

b. Untuk n ganjil, permutasinya berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots$$

$$\left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right) \left(\frac{v_{n+1}}{2}\right)$$

Sehingga,

$$\alpha(v_1) = v_n \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 1}$$

$$\alpha(v_2) = v_{n-1} \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

$$\alpha(v_3) = v_{n-2} \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

↓ ↓

$$\alpha\left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right) = \alpha\left(\frac{v_{n+1}}{2}\right) \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

↓ ↓

$$\alpha(v_{n-1}) = 2 \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 2}$$

$$\alpha(v_n) = 1 \rightarrow \text{mengawetkan derajat titik 1}$$

Maka,

$$((v_1), (v_2)) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha((v_1), (v_2)) = (\alpha(v_1), \alpha(v_2)) = (v_n, v_{n-1}) \in E(P_n)$

$$((v_2), (v_3)) \in E(P_n)$$

Sehingga, $\alpha((v_2), (v_3)) = (\alpha(v_2), \alpha(v_3)) = (v_{n-1}, v_{n-2}) \in E(P_n)$

$$\left(\left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right)\right) \in E(P_n)$$

Sehingga,

$$\alpha\left(\left(\frac{v_{n+1} v_{n+1}}{2-1} \frac{v_{n+1}}{2+1}\right)\right)$$

$$= \left(\alpha \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, \alpha \left(v_{\frac{n+1}{2}+1} \right) \right) \right)$$

$$= \left(v_{\frac{n+1}{2}-1}, v_{\frac{n+1}{2}+1} \right) \in E(P_n)$$

Begitu pula untuk $((v_{n-1}), (v_n)) \in E(P_n)$
 Sehingga, $\alpha((v_{n-1}), (v_n)) = (\alpha(v_{n-1}), \alpha(v_n))$
 $= (v_2, v_1) \in E(P_n)$

Jadi,
 $\alpha_1 =$

$$(v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} v_{\frac{n+1}{2}+1} \right) \left(v_{\frac{n+1}{2}} \right)$$

adalah automorfisme.

Jadi, berdasarkan pada bagian a dan b maka teorema terbukti benar.

Setelah mengetahui banyaknya automorfisme graf lintasan (P_n) hanya ada 2 fungsi yaitu yang berbentuk:

$$\alpha_1 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n) \text{ dan}$$

$$\alpha_2 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1} \right)$$

untuk n genap

$$\alpha_2 =$$

$$(v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} v_{\frac{n+1}{2}+1} \right) \left(v_{\frac{n+1}{2}} \right)$$

untuk n ganjil,

Dari teorema 3 di atas, maka dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

Teorema 4

Grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2) atau $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

Bukti

Misalkan $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

Akan ditunjukkan ada korespondensi satu-satu dari anggota (Z_2, o) pada $(\mathcal{A}(P_n), o)$.

Misalkan $Z_2 = \{\tau_1, \tau_2\}$ dan $\mathcal{A}(P_n) = \{a_1, a_2\}$. Selanjutnya, anggota Z_2 dikorespondensikan satu-satu pada titik-titik dari P_n sebagai berikut:

$$\tau_1 \sim a_1$$

$$\tau_2 \sim a_2 \text{ untuk } n \text{ genap maupun } n \text{ ganjil}$$

Karena dari teorema 3 grup automorfisme graf lintasan P_n dan grup siklik orde-2 (Z_2) adalah 2, jadi $(P_n, o) \cong (Z_2, o)$.

Selanjutnya, untuk fungsi identitas tidak perlu ditunjukkan karena sudah jelas automorfisme.

PENUTUP

Dari hasil dan pembahasan, secara umum dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf bintang- $n(K_{1,n})$ memiliki $n+1$ titik. Banyaknya automorfisme dari graf tersebut adalah $n!$.
 Permutasinya α adalah automorfisme yang harus mengawetkan derajat titik-titiknya, oleh karena itu permutasinya harus berbentuk $\alpha(v_1) = v_1$ dan $\alpha(v_k) = v_t$ untuk setiap $v_1, v_k, v_t \in E(K_{1,n})$.
2. Dari graf lintasan P_n maka banyaknya automorfisme hanya ada 2 fungsi yang berbentuk:
 - a. Untuk n genap, permutasinya berbentuk:
 $\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1}) \dots \left(v_{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}+1} \right)$ dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$
 - b. Untuk n ganjil, permutasinya berbentuk:
 $\alpha_1 = (v_1 v_n)(v_2 v_{n-1})(v_3 v_{n-2}) \dots \left(v_{\frac{n+1}{2}-1} v_{\frac{n+1}{2}+1} \right) \left(v_{\frac{n+1}{2}} \right)$ dan $\alpha_2 = (v_1)(v_2)(v_3) \dots (v_n)$
3. Grup automorfisme dari graf bintang $K_{1,n}$ isomorfik dengan grup simetri S_n atau $(S_n, o) \cong (\mathcal{A}(K_{1,n}), o)$.
4. Grup automorfisme dari graf lintasan P_n isomorfik dengan grup siklik orde-2 (Z_2) atau $(Z_2, o) \cong (P_n, o)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Wilson, R.J. dan Watkins, J. J. 1990, *Graphs An Introductory Approach*, Canada: John Wiley and Sons, Inc.

[2] Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda, 1986, *Graphs and Digraphs Second Edition*, Hal. 5, 10, 250, California: A Division of Wadsworth, Inc.