

DESKRIPSI PENGARUH PARAMETER TERHADAP KESTABILAN PERILAKU SISTEM BANDUL GANDA SEDERHANA

Thoufina Kurniyati

Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
E-mail: thoufinakurniyati@yahoo.co.id

ABSTRAK

Sistem bandul ganda sederhana merupakan pengembangan sistem bandul sederhana. Penurunan model bandul ganda sederhana berasal dari persamaan *Euler-Lagrange*. Sistem bandul ganda sederhana didapatkan dengan asumsi besar sudut perpindahan benda pertama maupun benda kedua sangat kecil.

Penelitian terdahulu [1] membahas mengenai kestabilan dan solusi eksak dari sistem bandul ganda sederhana, selanjutnya pada penelitian ini difokuskan untuk mendeskripsikan kestabilan perilaku pada sistem dengan parameter yang berbeda. Hasil penelitian ini menunjukkan sistem memiliki titik tetap *trivial*, nilai eigen imajiner murni yang berarti sistem berayun di sekitar titik tetap, dan solusi sistem berupa solusi periodik untuk perubahan besar sudut benda pertama dan kedua (θ_1, θ_2) serta solusi *quasiperiodic* untuk laju kecepatan benda satu dan benda dua $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$. Perubahan parameter tidak mempengaruhi kestabilan sistem bandul ganda sederhana.

Kata Kunci: sistem bandul ganda sederhana, analisis perilaku, titik tetap, nilai eigen, vektor eigen, *solusi periodik, solusi quasiperiodic*

ABSTRACT

Simple double pendulum system is the development of a simple pendulum system. The decline in the simple model of a double pendulum is derived from the Euler-Lagrange equation. Simple double pendulum system obtained by assuming a large angle displacement of the object first and second objects is very small.

Previous research by [1] discuss the stability and the exact solution of a simple double pendulum system, further research is focused to describe the stability of the behavior of the system with different parameters. The results of this study indicate the system has a nontrivial fixed point, purely imaginary eigenvalues which means the system swinging around a fixed point, and system solutions in the form of periodic solutions for a major change angle first and second objects (θ_1, θ_2) and quasi-periodic solutions to the rate of velocity one and two object $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$. Parameter changes do not affect the stability of a simple double pendulum system

Keywords : *simple double pendulum system, behavioral analysis, fixed point, eigen value, eigen vector, periodic solutions, quasiperiodic solutions*

PENDAHULUAN

Peranan teori dan peranan penerapan matematika tidak dapat dipisahkan. Banyak konsep abstrak matematika yang dikembangkan karena kebutuhan untuk menjawab permasalahan dari dunia nyata dan bidang ilmu lain [2].

Pemodelan matematika dapat diterapkan ke berbagai disiplin ilmu lain, salah satunya adalah sistem bandul ganda sederhana. Sistem bandul ganda sederhana merupakan pengembangan bandul sederhana, pengertian bandul sederhana yaitu benda ideal yang terdiri dari sebuah titik massa, yang digantungkan pada tali ringan yang tidak dapat mulur [3].

Penelitian sebelumnya [1] membahas mengenai solusi eksak dan kestabilan sistem bandul ganda sederhana, selanjutnya pada penelitian ini difokuskan mendeskripsikan kestabilan perilaku dengan parameter yang berbeda, parameter tersebut adalah massa benda pertama m_1 .

Salah satu permasalahan yang menggunakan sistem bandul ganda adalah pada sistem kerja tim SAR (Search and Rescue) dan suplai makanan atau amunisi ke barak analisis dengan menggunakan helikopter. Berbagai bencana alam yang ada di Indonesia akhir-akhir ini, menyebabkan kerja Tim SAR semakin tinggi. Keefektifan kerja Tim SAR sangat diperlukan

agar bantuan makanan dan, pakaian ataupun obat-obatan dapat tersebar merata.

Sesuai dengan latar belakang yang dikemukakan untuk melanjutkan penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini penulis mengambil tema “Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana”.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Bandul Ganda Sederhana

Sistem bandul ganda sederhana adalah sistem yang terdiri dari dua benda B_1 dan B_2 dengan massa masing-masing benda adalah m_1 dan m_2 . Selain itu benda tersebut masing-masing dihubungkan dengan dua helai kawat yang kuat tapi ringan L_1 dan L_2 dengan panjang masing-masing kawat adalah l_1 dan l_2 , benda B_1 terpasang pada ujung kawat L_1 (ujung kawat L_1 lainnya terpasang mantap pada sebuah bidang). Sementara itu benda B_2 terpasang pada ujung kawat L_2 di bawah pengaruh gravitasi (ujung kawat L_2 lainnya mantap terpasang pada benda pertama B_1). Sistem bandul ganda memiliki 4 (empat) parameter yakni l_1, l_2, m_1 dan m_2 dengan dipengaruhi oleh gravitasi, bandul ganda beresilasi pada bidang vertikal dengan sudut perpindahan untuk suatu waktu adalah $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ [1]. Sistem bandul sederhana adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 = 0 \\ m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Variabel dan parameter yang digunakan adalah

- m_1 : Massa benda pertama dalam satuan slug
- m_2 : Massa benda kedua dalam satuan slug
- l_1 : Panjang kawat/tali pertama dalam satuan kaki
- l_2 : Panjang kawat/tali kedua dalam satuan kaki
- g : Gravitasi bumi dalam satuan kaki/s²
- $\theta_1(t)$: Sudut perpindahan benda pertama pada waktu t dalam satuan radian
- $\theta_2(t)$: Sudut perpindahan benda kedua pada waktu t dalam satuan radian
- $\dot{\theta}_1(t)$: Laju kecepatan benda pertama terhadap waktu dalam satuan kaki/s²
- $\dot{\theta}_2(t)$: Laju kecepatan benda kedua

terhadap waktu dalam satuan kaki/s²

2. Analisis Model Bandul Ganda Sederhana

Pada bagian ini akan dianalisis model bandul ganda sederhana yang dibangun ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Analisis dimulai dengan penurunan dari persamaan *Euler-Lagrange*.

Dalam mekanika *Lagrangian*, evolusi sistem dijelaskan dalam hal koordinat umum dan kecepatan umum. Dalam kasus ini, sudut defleksi bandul θ_1, θ_2 dan kecepatan angular dapat diambil sebagai variabel umum. Dengan menggunakan variabel-variabel tersebut, dibangun persamaan *Lagrangian* untuk bandul ganda kemudian persamaan diferensial *Euler-Lagrange*.

Koordinat bandul pertama didefinisikan

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Energi kinetik (T) secara umum dinyatakan

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Energi kinetik benda pertama (T_1) dinyatakan

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2), \tag{1}$$

dan energi kinetik benda kedua (T_2) dinyatakan

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{m_2}{2} [&l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\ &+ 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 \\ &- \theta_2)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Energi potensial (V) secara umum dinyatakan

$$V = mgh.$$

Energi potensial benda pertama (V_1) dinyatakan

$$V_1 = -m_1g l_1 \cos \theta_1, \tag{3}$$

dan energi potensial benda kedua dinyatakan

$$V_2 = -m_2g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \tag{4}$$

Persamaan Lagrangian adalah selisih antara energi kinetik dengan energi potensial.

$$L = T - V = T_1 + T_2 - (V_1 + V_2) \tag{5}$$

Substitusi (1)-(4) ke persamaan (5) maka didapatkan

$$\begin{aligned} L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 &+ \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 \\ &- \theta_2) \\ &+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 \\ &+ m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Fungsi trigonometri $\cos \theta_1$, dan $\cos \theta_2$ dapat digantikan oleh ekspresi perkiraan berikut

$$\cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\dot{\theta}_1^2}{2}, \quad \cos \theta_2 \approx 1 - \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}.$$

Diasumsikan bahwa sudut θ_1 dan θ_2 sangatlah kecil maka nilai $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \approx 1$$

maka didapatkan

$$L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) g l_1 \theta_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \theta_1^2.$$

Persamaan Euler - Lagrange dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

sehingga diperoleh sistem bandul ganda dengan asumsi sudut osilasi yang kecil

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2] + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} [m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1] - m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

3. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam \mathcal{R}^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A adalah kelipatan skalar dari x ; yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ [4].

4. Solusi dan Potret Fase dengan Nilai Eigen Kompleks

Persamaan diferensial $\dot{x} = ax$ memiliki solusi $x(t) = x_0(t)e^{at}$ dengan $x(t)$ merupakan variabel yang bergantung pada waktu t , a merupakan parameter dan kondisi awal x_0 yang berbeda [5].

Selanjutnya untuk solusi dari nilai eigen kompleks, diperlukan untuk memahami eksponensial dengan eksponen kompleks. Dengan membandingkan ekspansi deret kuasa, dapat dilihat bahwa

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t),$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

[5].

Demikian, jika $\lambda = \alpha + i\beta$ adalah nilai eigen kompleks dengan vektor kompleks $v = u + iw$ (dengan α dan β adalah bilangan real serta u dan w adalah vektor real), maka

$$e^{(\alpha+i\beta)t}(u + iw) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + iw)$$

Berikutnya adalah menggambar potret fase untuk sepasang nilai eigen kompleks.

Diasumsikan sebuah nilai eigen adalah $\lambda = \alpha \pm i\beta$ dengan $\beta \neq 0$ [5]

1. Jika $\alpha = 0$, maka titik tetap adalah *elliptic center*, dengan solusi periodik. Arah gerakan yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
2. Jika $\alpha < 0$, maka titik tetap adalah *stable focus*. Arah gerakan yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
3. Jika $\alpha > 0$, maka solusi spiral keluar dan titik tetap adalah *unstable focus*, dengan arah gerak spiral yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
4. Dalam tiga kasus di atas, arah solusi menuju ke sekitar titik tetap dapat ditentukan dengan mengecek apakah \dot{x}_1 adalah positif atau negatif ketika $x_1 = 0$. Jika \dot{x}_1 positif maka solusi searah dengan jarum jam dan jika \dot{x}_1 negatif maka solusi berlawanan dengan jarum jam.

PEMBAHASAN (2.24)

1. Analisis Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana

Riset pendahuluan bandul ganda sederhana [1] telah dilakukan penondimensionalan terhadap sistem bandul ganda sederhana, dimisalkan

$$\begin{aligned} a &= (m_1 + m_2) l_1 g, \\ b &= (m_1 + m_2) l_1^2, \\ h &= m_2 l_2 g, \\ j &= m_2 l_1 l_2, \\ k &= m_2 l_2 \end{aligned} \tag{7}$$

dengan a, b, j, h , dan $k > 0$. Oleh karena itu sistem persamaan bandul ganda dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{cases} b\ddot{\theta}_1 + j\ddot{\theta}_2 = -a\theta_1 \\ j\ddot{\theta}_1 + k\ddot{\theta}_2 = -h\theta_2 \end{cases} \tag{8}$$

Misalkan $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \ddot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ dan $\dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2$ maka diperoleh

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 \end{cases} \tag{9}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-ak}{-j^2+bk} x_1 + \frac{jh}{-j^2+bk} x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-aj}{j^2-bk} x_1 + \frac{bh}{j^2-bk} x_3 \end{cases} \tag{10}$$

Sistem (10) menunjukkan bahwa laju kecepatan benda pertama dipengaruhi oleh besar $\frac{-ak}{-j^2+bk}$ dari perpindahan sudut bandul pertama ditambah besar $\frac{jh}{-j^2+bk}$ dari

perpindahan sudut benda kedua. Laju kecepatan bandul kedua dipengaruhi oleh besar $\frac{-aj}{j^2-bk}$ dari perpindahan sudut bandul pertama dan besar $\frac{bh}{j^2-bk}$ dari perpindahan sudut bandul kedua.

Analisis Titik Tetap

Analisis titik tetap dikerjakan dengan mengasumsikan bahwa

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0, \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0, \dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dt} = 0.$$

Maka, didapatkan sistem linier untuk model bandul ganda sederhana sebagai berikut:

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-ak}{-j^2+bk} x_1 + \frac{jh}{-j^2+bk} x_3 \tag{11}$$

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-aj}{j^2-bk} x_1 + \frac{bh}{j^2-bk} x_3$$

Oleh karena itu, sistem (11) mempunyai pemecahan trivial sehingga didapatkan titik tetap yaitu

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

Sistem bandul ganda sederhana hanya memiliki satu titik tetap yaitu $F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ yang berarti bahwa posisi seimbang pada bandul ganda sederhana ketika sudut perpindahan benda pertama suatu waktu, laju kecepatan benda pertama terhadap waktu, sudut perpindahan benda kedua suatu waktu dan laju kecepatan benda kedua terhadap waktu sama dengan nol ($\theta_1(t) = \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$). Posisi seimbang merupakan posisi dimana energi potensial mencapai harga minimum dan merupakan posisi untuk keseimbangan stabil.

Contoh Kasus

Contoh analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana diberikan untuk memahami lebih dalam mengenai perilaku pada sistem bandul ganda sederhana. Contoh kasus dengan parameter $m_1 = 937,5$ slug, $m_2 = 312,5$ slug, $l_1 = 16$ kaki, $l_2 = 16$ kaki, dan $g = 32$ kaki/s² dengan kondisi awal yang berbeda $x_1(0) = -0,5$ rad, $x_2(0) = -1$ rad/s, $x_3(0) = 1$ rad, dan $x_4(0) = 2$ rad/s.

Pandang sistem linier (10) menjadi sebuah matriks

$$\dot{x} = Ax$$

dengan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ak & 0 & \frac{jh}{-j^2+bk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-aj}{j^2-bk} & 0 & \frac{bh}{j^2-bk} & 0 \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Substitusi parameter ke persamaan (7) kemudian ke persamaan (10) sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -512 & 0 & \frac{128}{192} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{512}{192} & 0 & \frac{-512}{192} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

kondisi awal yang diberikan adalah

$$\begin{bmatrix} x_1(0) = -0,5 \\ x_2(0) = -1 \\ x_3(0) = 1 \\ x_4(0) = 2 \end{bmatrix}.$$

Sistem (12) memiliki solusi sebagai berikut

$$x = x_0 e^{At}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_{1,1}t} & e^{A_{1,2}t} & e^{A_{1,3}t} & e^{A_{1,4}t} \\ e^{A_{2,1}t} & e^{A_{2,2}t} & e^{A_{2,3}t} & e^{A_{2,4}t} \\ e^{A_{3,1}t} & e^{A_{3,2}t} & e^{A_{3,3}t} & e^{A_{3,4}t} \\ e^{A_{4,1}t} & e^{A_{4,2}t} & e^{A_{4,3}t} & e^{A_{4,4}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Menentukan perilaku dari e^{At} saat $t \rightarrow \infty$ dengan memenuhi

$$e^{At} = v e^{\lambda t} v^{-1}$$

dimana λ merupakan nilai eigen dan v merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ serta v^{-1} merupakan invers dari vektor eigen. Selanjutnya, menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang memenuhi

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Persamaan karakteristik A adalah

$$\lambda^4 + 1 \left(\frac{128}{192}\right) 1 \left(\frac{512}{192}\right) - 1 \left(\frac{-512}{192}\right) 1 \left(\frac{-512}{192}\right) = 0.$$

Sehingga dengan menggunakan bantuan Maple 12 nilai-nilai eigen dari matriks A adalah

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \sqrt{3} i, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{3} \sqrt{3} i, \tag{13}$$

$$\lambda_3 = 2 i, \quad \lambda_4 = -2 i.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen adalah

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3}i & \frac{1}{4}\sqrt{3}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}i & \frac{1}{2}\sqrt{3}i & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

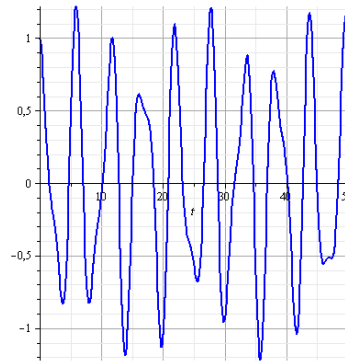
Selanjutnya menentukan masing-masing solusi umum dari $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ dan $x_4(t)$.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \left(-\frac{1}{4} \sin(2t) \right) + C_2 \left(\frac{1}{4} \cos(-2t) \right) \\ &\quad + C_3 \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ x_2(t) &= C_1 \left(-\frac{1}{2} \cos(2t) \right) + C_2 \left(\frac{1}{2} \sin(-2t) \right) + \\ &\quad C_3 \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ x_3(t) &= C_1 \left(\frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C_2 \left(-\frac{1}{2} \cos(-2t) \right) \\ &\quad + C_3 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ x_4(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(-2t) \\ &\quad + C_3 \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\ &\quad + C_4 \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Solusi khusus dengan $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$, dan $C_4 = -\frac{3}{\sqrt{3}}$ adalah

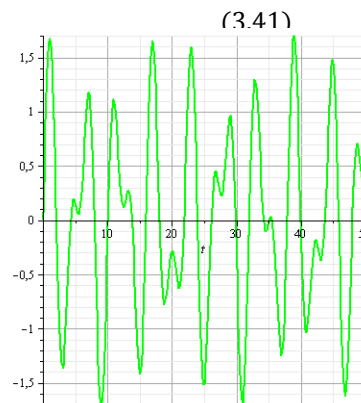
$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{4} \cos(-2t) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \frac{3}{4} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\ x_2(t) &= -\frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(-2t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \frac{3}{2\sqrt{3}} \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\ x_3(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{2} \cos(-2t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) + \frac{3}{2} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\ x_4(t) &= \cos(2t) + \sin(-2t) \\ &\quad + \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \frac{3}{\sqrt{3}} \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Berikut adalah grafik perilaku dari sistem bandul ganda dengan $t = 0 \dots 50$ detik.



Gambar 1 Grafik solusi $x_1(t)$ terhadap t

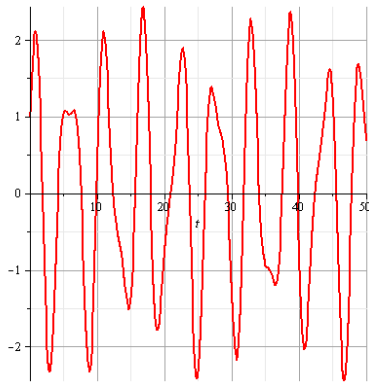
Gambar 1 merupakan grafik perubahan sudut perpindahan benda pertama terhadap waktu dengan rentang waktu 50 detik. Benda pertama mulai berayun pada sudut $-0,5$ rad (benda pertama berada di sebelah kiri posisi setimbang) dan bergerak mendekati posisi seimbang $(0,0)$ akan tetapi setelah benda pertama berada di posisi seimbang perlahan benda pertama menjauhi posisi seimbang, hal tersebut terjadi secara periodik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pergerakan benda pertama berubah secara periodik baik besar maupun arahnya di sekitar titik keseimbangan dengan periode 4,9 detik, simpangan maksimum yaitu 1,21 rad pada saat benda pertama berayun selama 5,49 detik dan selama rentang waktu 50 detik benda pertama tetap berosilasi di sekitar posisi seimbang.



Gambar 2 Grafik $x_2(t)$ terhadap t

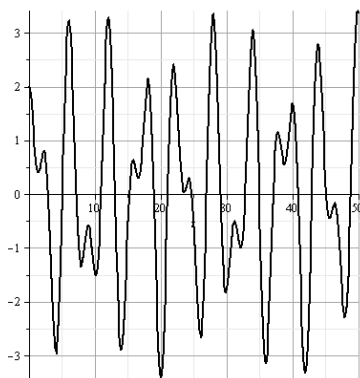
(3.50)

Gambar 2 merupakan grafik laju kecepatan benda pertama terhadap waktu selama rentang waktu 50 detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa laju kecepatan awal benda pertama terhadap waktu sebesar 1 rad/s^2 (benda pertama berada di sebelah kanan posisi seimbang) dan kecepatannya berubah secara *quasiperiodic* baik besar maupun arahnya. Benda kedua memiliki kecepatan maksimal saat 8,9 detik.



Gambar 3 Grafik $x_3(t)$ terhadap t

Gambar 3 merupakan grafik perubahan sudut perpindahan benda kedua terhadap waktu selama kurung waktu 50 detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pergerakan benda kedua berubah secara periodik baik besar maupun arahnya di sekitar titik keseimbangan dengan periode 4,91 detik dan simpangan maksimum yaitu 16,76 rad saat $t = 2,43$ detik.



Gambar 4 Grafik $x_4(t)$ terhadap t

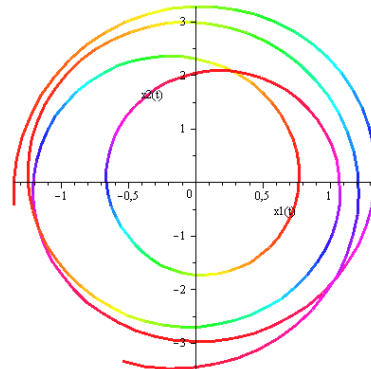
Gambar 4 merupakan grafik laju kecepatan bandul kedua terhadap waktu dengan $t = 0 \dots 50$ detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa laju kecepatan awal sebesar -0.5 rad, bandul kedua terhadap waktu berubah secara *quasiperiodic* baik besar maupun arahnya. Pada saat $t = 19,94$ detik bandul kedua memiliki laju kecepatan maksimal.

2. Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku sistem Bandul Ganda Sederhana

Parameter Massa Benda Pertama lebih besar daripada Massa Benda Kedua ($m_1 > m_2$)

Simulasi pertama dengan massa benda pertama sebesar 412.5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312.5 slug. Bandul pertama mulai bergerak saat sudut perpindahan sebesar $-0,5$ rad (benda pertama berada di sebelah kiri

posisi seimbang sebesar $-0,5$ rad) dan laju kecepataannya 1 rad/s² (benda pertama berada di sebelah kanan posisi seimbang dengan kecepatan 1 rad/s²).

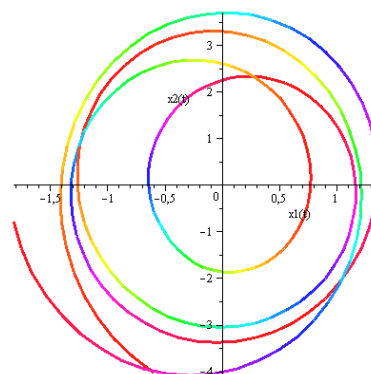


Gambar 5 Trayektori dengan $m_1 > m_2$

Gambar 5 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak searah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjauhi titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur membesar sampai $t \rightarrow \infty$.

Parameter Massa Benda Pertama sama dengan Massa Benda Kedua ($m_1 = m_2$)

Simulasi kedua dengan massa benda pertama sebesar 312,5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312,5 slug. Benda pertama mulai bergerak saat sudut perpindahan sebesar $-0,5$ rad dan laju kecepataannya 1 rad/s².

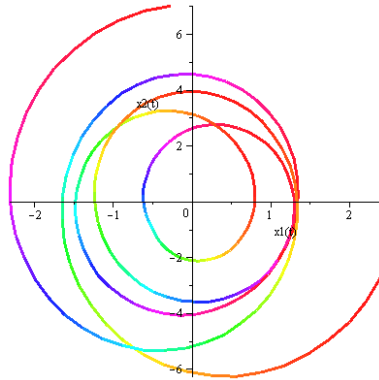


Gambar 6 Trayektori dengan $m_1 = m_2$

Gambar 6 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak melawan arah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjauhi titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur membesar sampai $t \rightarrow \infty$.

Parameter Massa Benda Pertama lebih besar daripada Massa Benda Kedua $m_1 < m_2$

Simulasi pertama dengan massa benda pertama sebesar 212.5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312.5 slug. Bandul pertama mulai bergerak saat sudut perpindahan sebesar -0,5 rad dan laju kecepataannya 1 rad/s².



Gambar 7 Trayektori dengan $m_1 < m_2$

Gambar 7 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak melawan arah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjauhi titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur membesar sampai $t \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, perubahan parameter tidak mempengaruhi kestabilan sistem melainkan hanya arah trayektorinya saja.

PENUTUP

1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model bandul ganda sederhana tersebut memiliki titik tetap saat $F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ artinya sistem memiliki posisi seimbang ketika sudut perpindahan benda pertama dan kedua suatu waktu serta laju kecepatan benda pertama dan kedua terhadap waktu sama dengan nol. Nilai eigen dari sistem bandul ganda dengan parameter tertentu adalah imajiner murni berarti kestabilan dari sistem bandul ganda yaitu tak stabil dan tipe kestabilan sistem bandul ganda sederhana adalah *elliptic center*. Grafik perpindahan bandul pertama dan kedua terhadap waktu adalah periodik dan grafik laju kecepatan bandul pertama dan kedua adalah *quasiperiodic*. Hal tersebut menunjukkan bahwa sistem bandul ganda bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama. Perubahan besar parameter

benda pertama tidak mempengaruhi kestabilan sistem.

2. Saran

Penelitian ini difokuskan pada masalah analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana. Pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk analisis bifurkasi pada sistem bandul ganda sederhana karena telah diketahui bahwa sistem bandul ganda sederhana memiliki nilai eigen murni yang merupakan syarat cukup untuk analisis bifurkasi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Amanto and La Zakaria, "Solusi Eksak dan Kestabilan Sistem Bandul Ganda sederhana," *Jurnal Sains MIPA*, pp. 23-32, 2008.
- [2] Asep K. Supriatna, "Matematika dan Contoh Penerapan Matematika dalam Disiplin Ilmu Lain," *Matematika Integratif*, pp. 1-7, 2002.
- [3] Robert Resnick and David Halliday, *Physics, 3th Edition*. Jakarta: Erlangga, 1978.
- [4] Howard Anton, *Elementary Linier Algebra, Jilid I*. Bandung: Erlangga, 1997.
- [5] R C Robinson, *An Introduction to Dynamical System Continous and Discrete*. Western: American Mathematical Society, 2012.