

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI HASIL OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN KARTESIUS DUA GRAF

Fuad Adi Saputra

Mahasiswa Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: tee_fu@yahoo.com

ABSTRAK

Graf G dengan pewarnaan sisi disebut pelangi sisi terhubung, jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection* pada graf G yang terhubung, disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung. Sedangkan graf G dengan pewarnaan titik adalah pelangi titik terhubung, jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf G yang terhubung disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi titik terhubung. Penelitian ini menganalisis besarnya bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari graf hasil penjumlahan dan perkalian kartesius dua sebarang graf.

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$. Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah: 1) $rc(G) = 1$, G_1 dan G_2 adalah graf komplit, dan 2) $rc(G) \geq 2$, G_1 atau G_2 adalah bukan graf komplit sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{ dan } G_2 \text{ adalah graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{ atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit} \end{cases}$$

Graf G hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$. Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah: $diam(G_1) + diam(G_2) \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$ sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah: $diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$

Kata kunci: Graf Penjumlahan, Graf Perkalian Kartesius, Rainbow Connection, Rainbow Vertex-Connection

ABSTRACT

An edge-colored graph G is rainbow edge-connected if any two vertices are connected by a path whose edges have distinct colors. The rainbow connection of a connected graph G , denoted by $rc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make G rainbow edge-connected. A vertex-colored graph G is rainbow vertex-connected if any two vertices are connected by a path whose internal vertices have distinct colors. The rainbow vertex-connection of a connected graph G , denoted by $rvc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make G rainbow vertex-connected. This research was analysis about number of $rc(G)$ and $rvc(G)$ from the join and cartesian product of two graphs.

The join $G = G_1 + G_2$ has $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ and $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ and } v \in V(G_2)\}$. The number of *rainbow connection* from graph G is: 1) $rc(G) = 1$, G_1 and G_2 are complete graph, and 2) $rc(G) \geq 2$, G_1 or G_2 are non-complete graph and then the number of *rainbow vertex-connection* from graph G is:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{ and } G_2 \text{ are complete graph} \\ 1, & G_1 \text{ or } G_2 \text{ are non - complete graph} \end{cases}$$

The cartesian product $G = G_1 \times G_2$ has $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, and two vertices (u_1, u_2) and (v_1, v_2) of G adjacent if only if either $u_1 = v_1$ and $u_2 v_2 \in E(G_2)$ or $u_2 = v_2$ and $u_1 v_1 \in E(G_1)$. The number of *rainbow connection* from graph G is: $diam(G_1) + diam(G_2) \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$ and then the number of *rainbow vertex-connection* from graph G is: $diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$

Keywords: Cartesian Product, Join Graph, Rainbow Connection, Rainbow Vertex-Connection

PENDAHULUAN

Matematika merupakan raja dan pelayan bagi disiplin ilmu lain atau pun dalam lini kehidupan. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. (Purwanto, 1998:1).

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Pewarnaan pada graf G adalah pemetaan warna-warna ke titik atau sisi dari G sedemikian hingga titik atau sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda.

Dalam teori graf konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang *rainbow connection*. *Rainbow connection* dibagi menjadi 2 jenis, yang pertama adalah pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan sisi pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda, sedangkan yang kedua adalah pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Bilangan *rainbow connection* pada graf terhubung disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan warna terkecil pada sisi yang dibutuhkan untuk membuat G menjadi pelangi sisi yang terhubung. Bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf terhubung disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan warna terkecil pada titik yang dibutuhkan untuk membuat G menjadi pelangi titik terhubung (Krivelevich dan Yuster, 2010:1)

Jurnal yang ditulis oleh Michael Krivelevich dan Raphael Yuster (2010) menjelaskan mengenai bilangan *rainbow connection* yang dibangun oleh derajat terkecil dari suatu graf umum. Mereka mengembangkan dari kajian yang ditulis oleh Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, dan R. Yuster (2008) dalam jurnalnya yang berjudul *On Rainbow Connection*. Dalam jurnal *On Rainbow Connection* hasil dari bilangan *rainbow connection* $rc(G)$ dan $rvc(G)$ masih dibatasi oleh suatu variabel yang belum jelas, misalkan $rc(G) \leq \tau n/\delta$, dimana C adalah variabel. Kemudian oleh Krivelevich dan Yuster dikembangkan lagi dan berhasil menentukan nilai variabelnya menjadi $rc(G) \leq 20n/\delta$

sehingga batas nilai C menjadi lebih jelas. Selain itu juga dijelaskan bahwa bilangan $rc(G) \geq diam(G)$

Penelitian yang dilakukan oleh Krivelevich dan Yuster menggunakan objek graf yang umum. Sedangkan untuk graf dari hasil operasi belum diteliti, khususnya pada operasi penjumlahan dan perkalian kartesius, sehingga perlu dilakukan penelitian lagi untuk objek graf tersebut.

KAJIAN TEORI

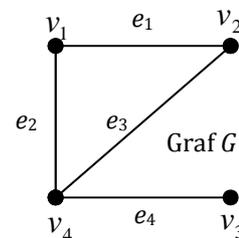
1. Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$.

2. *Adjacent* dan *Incident*

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. Derajat titik v di graf G , ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 1. Contoh *adjacent* dan *incident*

Dari Gambar 1 titik v_4 dan sisi e_2, e_3 dan e_4 adalah terkait langsung. Sedangkan titik v_3 dan v_4 adalah terhubung langsung tetapi v_3 dan v_2 tidak.

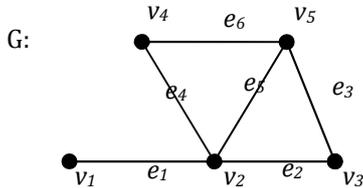
3. Graf Terhubung

Suatu jalan (*walk*) $u-v$ pada graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, \dots, u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$. Jalan $u-v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) $u-v$. $P : u$

$= u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$, u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir. Sedangkan u_1, u_2, \dots, u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari P . Dengan demikian, semua lintasan adalah trail. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2. Graph Terhubung

Dari graf di atas $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$ adalah trail, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$ adalah lintasan.

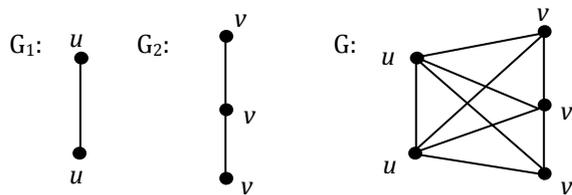
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u-v$ di G . Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G , maka jarak antara dua titik di G adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut yang dinotasikan dengan $dist_G(u, v)$. Sedangkan eksentrisitas titik $v \in V(G)$ adalah $ecc(v) = \max \{dist_G(v, u) : u \in V(G)\}$. Radius dari G adalah $r(G) = \min \{ecc(v) : v \in V(G)\}$ dan diameter dari G adalah $diam(G) = \max \{ecc(v) : v \in V(G)\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

4. Operasi pada Graf

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

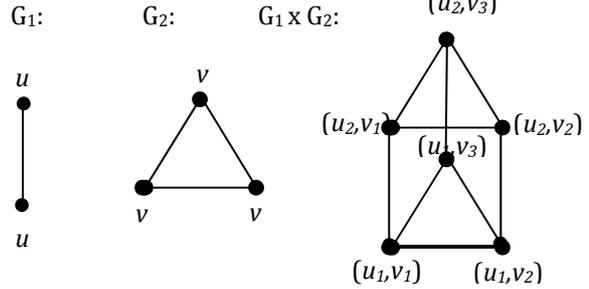
Perhatikan contoh di bawah ini.



Gambar 3. Penjumlahan Graf $G = G_1 + G_2$

Hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2, v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1, v_1 \in E(G_1)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 4. Graf Hasil Kali Kartesius

5. Jenis Graf

- a. Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan langsung oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).
- b. Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).
- c. Graf siklus C_n adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Misal graf siklus C_n mempunyai himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka graf tersebut mempunyai himpunan sisi $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dimana $e_i = v_i, v_{i+1}$ untuk setiap $i=1,2,\dots,n$.
- d. Graf roda adalah graf yang dibentuk dari operasi penjumlahan antara graf siklus (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_1). Graf roda dinotasikan dengan W_n dan $n \geq 3$ (Harary, 1969:46)
- e. Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi (Gallian, 2007: 16)
- f. Graf Kipas Ganda dibentuk dari penjumlahan antara gabungan dua graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $\sim F_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi.
- g. Graf tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 \times P_n$ (Galian, 2007:12)

6. Pewarnaan Graf

Pewarnaan titik dari graf G adalah suatu proses pemberian warna pada titik-titik suatu graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung pada graf tersebut berwarna sama. Graf

G berwarna n jika terdapat pewarnaan dari G yang menggunakan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Suatu pewarnaan sisi- k untuk graf G adalah suatu penggunaan k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi- n , maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan n warna. Indeks kromatik G dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan n terkecil sehingga sisi di G dapat diwarnai dengan n warna (Purwanto, 1998:80).

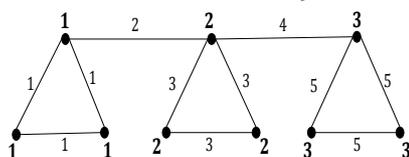
7. Rainbow Connection

Pewarnaan sisi pada graf G disebut pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection* pada graf G yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) (Krivelevich dan Yuster, 2010:1).

Lintasan pelangi (*rainbow path*) adalah lintasan antara dua titik sehingga tidak ada dua sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Jika lintasan pelangi tersebut ada di setiap antara dua titik maka pewarnaan tersebut dinamakan pewarnaan pelangi (*rainbow colouring*). Sedangkan bilangan minimum pada warna yang diinginkan dinamakan bilangan pelangi yang terhubung (*rainbow connection number $rc(G)$*). (L. Sunil Chandran,2011:3).

Pewarnaan titik pada graf G adalah Pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf G yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) (Krivelevich dan Yuster, 2010: 2).

Misalkan graf G memiliki n titik, maka $rc(G) \leq n - 1$. Kemudian jika graf sikel C_n dengan $n \geq 3$ maka $rc(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sedangkan jika dihubungkan dengan $diam(G)$, maka $rc(G) \geq diam(G)$ dan $rvc(G) \geq diam(G) - 1$ (Krivelevich dan Yuster, 2010:1-2).



Gambar 5. Graf Pelangi Sisi Terhubung dan Pelangi Titik Terhubung

Gambar 5 merupakan contoh dari graf pelangi sisi terhubung dan pelangi titik terhubung dengan 5 warna sisi dan 3 warna titik. Pada gambar di atas mempunyai bilangan $rc(G) = 5$ dan $rvc(G) = 3$.

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, sebelum mengkaji inti permasalahan yaitu mengkaji bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf dengan menggunakan sebarang graf, maka akan dibahas terlebih dahulu $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari jenis graf yang dihasilkan oleh operasi penjumlahan dan perkalian kartesius.

1. Bilangan Rainbow Connection pada Jenis Graf Hasil Penjumlahan

Pada graf khusus hasil penjumlahan akan diberikan 5 contoh graf yaitu graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas, dan graf Kipas Ganda.

a. Graf Komplit

Tabel 1. Pola Bilangan $rc(K_n)$ dan $rvc(K_n)$

No	Jenis Graf	$rc(K_n)$	$rvc(K_n)$
1.	K_1	0	0
2.	K_2	1	0
3.	K_3	1	0
4.	K_4	1	0
5.	K_5	1	0
6.	K_6	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮
$n.$	K_n	1	0

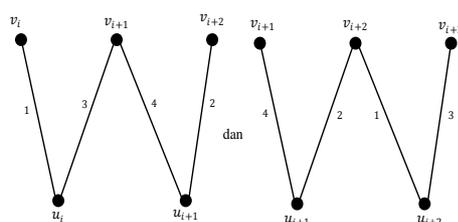
Dari pola yang ditunjukkan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Pada graf komplit K_n banyak titik $n \geq 2$, bilangan *rainbow connection* $rc(K_n) = 1$, dan bilangan *rainbow vertex-connection* $rvc(K_n) = 0$.

b. Graf Bipartisi Komplit

Secara umum graf $K_{n,m}$ dapat dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung hanya dengan menggunakan 4 warna. Hal ini dapat dijelaskan dengan model lintasan antara 2 titik sebagai berikut:



Gambar 6. Model Lintasan Graf Bipartisi $K_{m,n}$

Teorema 2

Graf bipartisi komplit $K_{n,m}$ dengan $n \leq m$ dan $n, m \in \mathbb{N}$, maka bilangan rainbow connection pada graf $K_{n,m}$ adalah:

$$rc(K_{n,m}) = \begin{cases} m, & \text{jika } n = 1 \\ 2, & \text{jika } 2^n \geq m \\ 3, & \text{jika } 2^n < m \leq 3^n \\ 4, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

bilangan rainbow vertex-connection pada graf $K_{n,m}$ adalah:

$$rvc(K_{n,m}) = 1$$

Bukti:

Graf bipartisi komplit $K_{n,m}$ terdiri dari 2 partisi, yaitu X dan Y , dengan $|X| = m$ dan $|Y| = n$. Misalkan $v_i \in V(X), i = 1, 2, \dots, m$ dan $u_i \in V(Y), i = 1, 2, \dots, n$. Maka setiap dua titik v_i dan setiap dua titik u_i tidak terhubung langsung, akan tetapi setiap titik v_i dengan u_i akan dihubungkan dengan satu sisi. Terdapat 4 kasus, yaitu:

- (i) jika $n = 1$, maka $rc(K_{1,m}) = m$.
 Andaikan $rc(K_{1,m}) < m$, maka ada dua sisi di $K_{1,m}$ yang berwarna sama. Misal (v_i, u_1) dan (v_j, u_1) dengan $i \neq j$. Akibatnya lintasan $v_i - v_j$ bukan lintasan pelangi karena hanya ada 1 warna.
 Jadi $K_{1,m}$ bukan pelangi sisi yang terhubung, jadi $rc(K_{1,m}) \geq m$.
 Karena pewarnaan sisi dengan m warna menghasilkan $K_{1,m}$ graf pelangi sisi, maka $rc(K_{1,m}) \leq m$. Disimpulkan $rc(K_{1,m}) = m$.
- (ii) $rc(K_{n,m}) = 2$ jika $2^n \geq m$.
 Akan dibuktikan jika $2^n \geq m$, maka $rc(K_{n,m}) = 2$,
 $\deg(v_i) = n$ dan $\deg(u_i) = m$
 Jika $rc(K_{n,m}) = 2$ maka setiap dua titik, maksimal ada lintasan dengan 2 warna sisi yang berbeda. Untuk itu jika setiap lintasan $v_i - v_j$ dan setiap lintasan $u_i - u_j$ terbentuk lintasan pelangi maka susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung pada v_i berbeda dengan v_j , begitu juga pada u_i berbeda dengan u_j . Selanjutnya karena $\deg(v_i) = n \leq \deg(u_i) = m$, maka jika setiap susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung dengan v_i berbeda, maka susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung dengan setiap u_i juga berbeda. Sehingga cukup dianalisis susunan warna pada sisi yang terkait langsung dengan titik $v_i \in V(X), i = 1, 2, \dots, m$.
 Diketahui $rc(K_{n,m}) = 2$ dan $\deg(v_i) = n$, jadi dari 2 warna tersebut akan disusun ke- n tempat dengan perulangan, sehingga diperoleh banyaknya susunan $= 2_1 \times 2_2 \times$

$2_3 \times \dots \times 2_n = 2^n$. Kemudian susunan tersebut diberikan pada setiap titik v_i dan v_j dengan $i \neq j$. Jika banyaknya susunan sebanyak 2^n lebih banyak dari banyaknya titik v_i yang sebanyak m , maka setiap v_i mempunyai susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda dengan v_j . Sehingga lintasan $v_i - v_j$ akan membentuk lintasan pelangi. Jadi terbukti jika $2^n \geq m$ maka $rc(K_{n,m}) = 2$.

- (iii) Jika $rc(K_{n,m}) = 3$ jika $2^n \leq m \leq 3^n$
 Akan dibuktikan jika $2^n \leq m$ maka $rc(K_{n,m}) \geq 3$ dan jika $m \leq 3^n$ maka $rc(K_{n,m}) = 3$.
 Ambil $rc(K_{n,m}) = 2$, jika $2^n \leq m$ maka akan dibuktikan ada dua titik yang semua lintasannya mempunyai warna sisi yang sama. Banyak susunan warna 2^n , artinya v_1, v_2, \dots, v_{2^n} susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda. Karena $2^n \leq m$ maka ada titik v_{2^n+a} yang mempunyai susunan warna yang sama dengan v_b , dengan $1 \leq a \leq (m - 2^n)$ dan $1 \leq b \leq 2^n$. Misalkan ada fungsi $c: E(K_{n,m}) \rightarrow \{1, 2\}$, maka $c(v_{2^n+a}, u_i) = c(v_b, u_i)$, sehingga lintasan $v_b - v_{2^n+a}$ tidak membentuk lintasan pelangi, karena semua lintasannya pasti mempunyai warna sisi yang sama. Sehingga terbukti jika $2^n \leq m$ maka $rc(K_{n,m}) \geq 3$.
 Sekarang $rc(K_{n,m}) = 3$ dan $\deg(v_i) = n$, jadi dari 3 warna tersebut akan disusun ke- n tempat dengan perulangan, sehingga diperoleh banyaknya susunan $= 3_1 \times 3_2 \times 3_3 \times \dots \times 3_n = 3^n$. Kemudian susunan tersebut diberikan pada setiap titik v_i dan v_j dengan $i \neq j$. Jika banyaknya susunan sebanyak 3^n lebih banyak dari banyaknya titik v_i yang sebanyak m , maka setiap v_i mempunyai susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda dengan v_j . Sehingga lintasan $v_i - v_j$ akan membentuk lintasan pelangi. Jadi terbukti jika $m \leq 3^n$ maka $rc(K_{n,m}) = 3$.
- (iv) $rc(K_{n,m}) = 4$, jika lainnya
 Jika sudah tidak memenuhi semua ketentuan di atas, untuk membentuk graf $K_{m,n}$ menjadi pelangi sisi terhubung, maka graf $K_{m,n}$ dapat diwarnai minimal menggunakan 4 warna. Misalkan ada fungsi pewarnaan sisi $c: E(K_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ maka:
 $c(v_i, u_j) = 1, i \neq j$ dengan $i = \text{ganjil}, j = \text{ganjil}$,
 $c(v_i, u_j) = 3, i \neq j$ dengan $i = \text{genap}, j = \text{ganjil}$,

$$c(v_i, u_j) = 2, i \neq j \text{ dengan } i = \text{ganjil}, j = \text{genap},$$

$$c(v_i, u_j) = 4, i \neq j \text{ dengan } i = \text{genap}, j = \text{genap},$$

dengan pewarnaan di atas maka setiap dua titik pada graf $K_{m,n}$ terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga graf $K_{m,n}$ akan membentuk graf pelangi sisi terhubung, jadi dengan demikian terbukti $rc(K_{m,n}) = 4$.

(v) $rc(K_{m,n}) = 1$

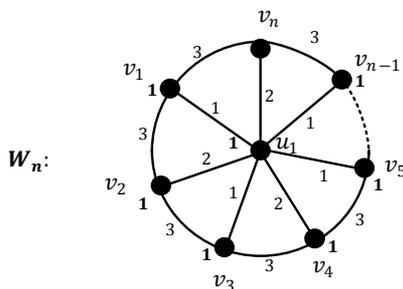
Akan dibuktikan $rvc(K_{m,n}) \geq 1$ dan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$.

Diketahui $diam(K_{m,n}) = 2$, sehingga $rvc(K_{m,n}) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(K_{m,n}) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(K_{m,n}) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(v_i) = 1$, dan $c(u_i) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u_i dimana $c(u_i) = 1$, sedangkan setiap lintasan $u_i - u_j$ akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_i) = 1$, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(K_{m,n}) \leq 1$. Karena $rvc(K_{m,n}) \geq 1$ dan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$, maka $rvc(K_{m,n}) = 1$.

c. Graf Roda

Secara umum graf W_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf W_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 7. Graf roda W_n

Teorema 3

Graf G adalah graf roda W_n dengan $n \in \mathbb{N}$, maka bilangan rainbow connection pada graf G adalah:

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

bilangan rainbow vertex-connection pada graf W_n adalah:

$$rvc(W_n) = 1, \quad \text{jika } n \geq 4$$

Bukti:

Graf roda W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang terbentuk dari operasi penjumlahan antara graf sikel (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_1). Misalkan $v_i \in V(C_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka $v_{n+1} = v_1$, dan $u \in V(K_1)$, serta untuk semua v_i terhubung langsung dengan u .

(i) Jika $n = 3$, akan dibuktikan W_3 adalah graf K_4 .

Untuk semua $v_1, v_2, v_3 \in (C_3)$ terhubung langsung dengan u , sehingga diperoleh $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(u) = 3$. Karena graf W_3 dengan 4 titik beraturan-3 maka W_3 adalah graf komplit, jadi terbukti dengan $n = 3$ maka $rc(W_3) = 1$.

(ii) Jika $4 \leq n \leq 6$ maka $rc(W_n) = 2$

Akan dibuktikan $rc(W_n) \geq 2$ dan $rc(W_n) \leq 2$ Graf W_n dengan $4 \leq n \leq 6$ bukan merupakan graf komplit, karena $deg(v_i) = 3$ sedangkan jumlah titiknya $5 \leq |W_n| \leq 7$, sehingga $rc(G) \geq 2$. Kemudian untuk membuktikan $rc(G) \leq 2$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 2 warna dapat membentuk W_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap.

Setiap lintasan $v_i - u$ atau $u - v_i$ hanya terdapat satu warna sisi. Kemudian lintasan $v_i - v_j$, jika i genap dan v_i dan j ganjil pasti berbentuk lintasan pelangi 2 warna. Sedangkan untuk lintasan $v_i - v_j$ dengan i dan j sama-sama genap atau i dan j sama-sama ganjil. Jika $v_i - v_{i+2}$ maka membentuk lintasan pelangi yang sisi-sinya C_n . Tetapi jika lintasan $v_i - v_{i+c}$, dengan $4 \leq c \leq n - 2$ maka $c = 4$, karena $n = 6$ diperoleh $4 \leq c \leq 6 - 2$. Untuk $i = 1$, dengan lintasan $v_1 - v_5$, maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik v_6 , sedangkan untuk $i = 2$ dengan lintasan $v_2 - v_6$, maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik v_1 , terbukti setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $rc(G) \leq 2$. Jadi terbukti untuk $4 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$.

(iii) Jika $n \geq 7$ maka $rc(G) = 3$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$.
 Dibuktikan $rc(G) \leq 3$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 3 warna dapat membentuk W_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(C_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(W_n) \leq 3$.

Selanjutnya dibuktikan $rc(G) \geq 3$, dari hasil di atas didapat W_n bukan graf komplit sehingga $rc(G) \geq 2$. Ambil $rc(G) = 2$ Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_7) \rightarrow \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$, maka $c(v_4, u) = 2$ dan $c(v_5, u) = 2$, karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi C_n yang panjangnya 3. Kemudian jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_{n-1}, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi C_n sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Tetapi jika $c(v_3, u) = 1$, lintasan $v_3 - v_{n-1}$ warnanya akan sama dan kalau lintasannya menggunakan sisi C_7 juga tidak mungkin karena panjangnya ≥ 3 , jadi haruslah $c(v_3, u) = 2$. Selanjutnya $c(v_1, u)$ harus sama dengan 1, karena $c(v_5, u) = 2$, akan tetapi pewarnaan demikian akan membuat antara titik v_1 dan v_{n-1} semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, sehingga haruslah $c(v_1, u) = 3$, hal tersebut berlaku jika $n \geq 7$ karena lintasan $v_1 - v_{n-1}$ minimal mempunyai panjang 3, sehingga $rc(W_n) \geq 3$. Karena $rc(W_n) \geq 3$ dan $rc(W_n) \leq 3$ maka terbukti $rc(W_n) = 3$, dengan $n \geq 7$.

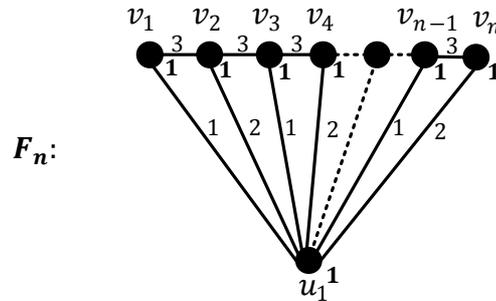
(iv) Jjika $n \geq 4$ maka $rvc(W_n) = 1$

Akan dibuktikan $rvc(W_n) \geq 1$ dan $rvc(W_n) \leq 1$.
 Diketahui $diam(W_n) = 2$, sehingga $rvc(W_n) \geq 2 - 1 = 1$.
 Untuk membuktikan $rvc(W_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(W_n) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(K_{n,m}) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(u) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u dimana $c(u) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(W_n) \leq 1$.

Karena $rvc(W_n) \geq 1$ dan $rvc(W_n) \leq 1$, maka $rvc(W_n) = 1$.

d. Graf Kipas

Secara umum graf F_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf F_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 8. Graf Kipas F_n

Teorema 4

Graf kipas F_n dengan $n \in \mathbb{N}$, maka bilangan rainbow connection pada graf F_n adalah:

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 2 \\ 2, & \text{jika } 3 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

bilangan rainbow vertex-connection pada graf F_n adalah:

$$rvc(F_n) = 1, \quad \text{jika } n \geq 2$$

Bukti:

Graf kipas F_n dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi. Misalkan $v_i \in V(P_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, dan $u \in V(K_1)$, serta untuk semua v_i terhubung langsung dengan u .

(i) Jika $n = 2$, akan dibuktikan F_2 adalah graf K_3 .

Untuk semua $v_1, v_2 \in (P_2)$ terhubung langsung dengan u , sehingga diperoleh $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(u) = 2$. Karena graf F_2 dengan 3 titik beraturan-2 maka F_2 adalah graf komplit, jadi terbukti dengan $n = 2$ maka $rc(G) = 1$.

(ii) Jika $3 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 2$ dan $rc(G) \leq 2$.
 Graf F_n dengan $4 \leq n \leq 6$ bukan merupakan graf komplit, karena $\deg(v_i) \leq 3$ sedangkan jumlah titiknya $4 \leq |F_n| \leq 7$, sehingga $rc(G) \geq 2$. Kemudian untuk membuktikan $rc(G) \leq 2$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 2 warna dapat membentuk F_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Fungsi

pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $c(v_i, u) = 2$ jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap.

Setiap lintasan $v_i - u$ atau $u - v_i$ hanya terdapat satu warna sisi. Kemudian lintasan $v_i - v_j$, dengan $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq j \leq n$ pasti berbentuk lintasan pelangi 2 warna. Sedangkan untuk lintasan $v_i - v_j$ dengan i dan j sama-sama $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ atau dengan i dan j sama-sama $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n$. Lintasan terpanjang adalah $v_1 - v_c$ dengan $c = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, karena $n \leq 6$ maka lintasan terpanjangnya $v_1 - v_3$ dan $v_4 - v_6$ maka membentuk lintasan pelangi 2 warna yang sisi-sinya anggota P_n , sehingga terbukti setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $rc(G) \leq 2$. Jadi terbukti untuk $3 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$.

(iii) Jika $n \geq 7$ maka $rc(G) = 3$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$. Dibuktikan $rc(G) \leq 3$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 3 warna dapat membentuk F_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\epsilon) = 3, \forall \epsilon \in E(P_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(F_n) \leq 3$.

Selanjutnya dibuktikan $rc(F_n) \geq 3$, dari hasil di atas didapat F_n bukan graf komplit sehingga $rc(F_n) \geq 2$. Ambil $rc(F_n) = 2$ Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$, maka $c(v_{1+c}, u) = 2$, dengan $3 \leq c \leq n - 1$ karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi P_n yang panjangnya ≥ 3 . Sedangkan jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_2, u) = c(v_3, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi P_n sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Pewarnaan demikian akan membuat antara titik v_{1+c} dengan $c = 3$ dan v_{1+c} dengan $c = n - 1$ semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, karena $c(v_4, u) = c(v_n, u) = 2$ dan lintasan dengan sisi P_n dengan $n \geq 7$ panjangnya lebih dari sama dengan 3, maka terbukti $rc(F_n) \geq 3$. Karena $rc(F_n) \geq 3$ dan $rc(F_n) \leq 3$ maka terbukti $rc(F_n) = 3$, dengan $n \geq 7$.

(iv) Jika $n \geq 2$ maka $rvc(F_n) = 1$

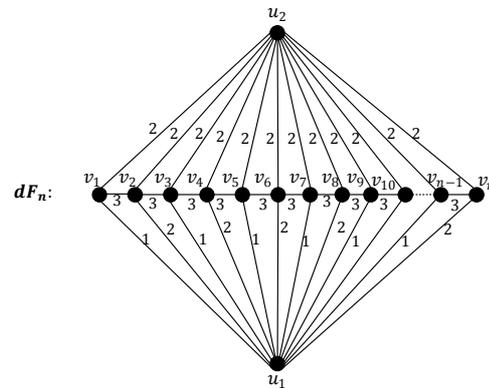
Akan dibuktikan $rvc(F_n) \geq 1$ dan $rvc(F_n) \leq 1$.

Diketahui $diam(F_n) = 2$, sehingga $rvc(F_n) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(F_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(F_n) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(F_n) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(u) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u dimana $c(u) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(F_n) \leq 1$. Karena $rvc(F_n) \geq 1$ dan $rvc(F_n) \leq 1$, maka $rvc(F_n) = 1$.

e. Graf Kipas Ganda

Secara umum graf dF_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf dF_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 9. Graf Kipas Ganda dF_n

Teorema 5

Graf kipas ganda dF_n dengan jumlah titik $n \geq 2$, maka bilangan rainbow connection pada graf dF_n adalah:

$$rc(dF_n) = \begin{cases} 2, & n \leq 12 \\ 3, & n \geq 13 \end{cases}$$

bilangan rainbow vertex-connection pada graf dF_n adalah:

$$rvc(dF_n) = 1$$

Bukti:

Graf kipas ganda dibentuk dari penjumlahan antara gabungan dua graf komplit ($2K_1$) dan graf lintasan (P_n) yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi.

(i) $rc(dF_n) = 2$ jika $2 \leq n \leq 12$. Akan dibuktikan $rc(dF_n) \geq 2$, dan $rc(dF_n) \leq 2$. Diketahui $diam(dF_n) = 2$, karena $rc(G) \geq diam(G)$ maka diperoleh $rc(dF_n) \geq 2$. Misalkan $v_i \in V(P_n)$ dengan $2 \leq n \leq 12$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1, 2$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \rightarrow \{1, 2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $c(v_i, u_1) = 2$ jika $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq 12$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, serta $c(v_i, u_2) = 1$ jika $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ dan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i \leq \lfloor \frac{3xn}{4} \rfloor$, kemudian $c(v_i, u_2) = 2$ jika $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor < i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dan $\lfloor \frac{3xn}{4} \rfloor < i \leq n$, maka akan membentuk graf dF_n menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(dF_n) \leq 2$, jadi diperoleh dengan $2 \leq n \leq 12$ maka $rc(dF_n) = 2$.

(ii) $rc(dF_n) = 3$ jika $n \geq 13$. Akan dibuktikan $rc(dF_n) \geq 3$, dan $rc(dF_n) \leq 3$. Pertama dibuktikan $rc(dF_n) \geq 3$, ambil $rc(dF_n) = 2$, maka dibuktikan dengan menggunakan 2 warna sisi akan ada 2 titik yang semua lintasannya memiliki warna yang sama. Misalkan $v_i \in V(P_n)$ dengan $n \geq 13$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1, 2$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \rightarrow \{1, 2\}$, akan dibentuk setiap dua titik dihubungkan oleh lintasan pelangi. Misalkan lintasan $v_i - v_j$, karena $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, maka $j \geq i + 3$. Jika $c(v_i, u_1) = 1$ agar lintasan $v_i - v_j$ terbentuk lintasan pelangi maka $c(v_j, u_1) = 2$. Kemudian lintasan $v_i - v_{j+1}$, $v_i - v_{j+2}$, $v_i - v_{j+3}$ maka haruslah $c(v_{j+1}, u_1) = c(v_{j+2}, u_1) = c(v_{j+3}, u_1) = 2$, kemudian untuk lintasan $v_j - v_{j+3}$, karena $c(v_j, u_1) = c(v_{j+3}, u_1) = 2$ dan panjang lintasan dengan sisi P_n sama dengan 3 pasti lintasan tersebut memiliki warna yang sama, sehingga $c(v_j, u_2) = 1$ dan $c(v_{j+3}, u_2) = 2$. Selanjutnya lintasan $v_j - v_{j+4}$, $v_j - v_{j+5}$, $v_j - v_{j+6}$ maka haruslah $c(v_{j+4}, u_2) = c(v_{j+5}, u_2) = c(v_{j+6}, u_2) = 2$. Pewarnaan demikian akan membuat lintasan $v_{j+3} - v_{j+6}$ memiliki warna sisi yang sama, sehingga dengan 2 warna sisi saja maksimal cukup untuk titik v_j sampai v_{j+5} . Begitu juga untuk v_i sampai v_{i+5} . Sehingga dengan 2 warna sisi

berlaku untuk 12 titik, sedangkan untuk $n \geq 13$ tidak bisa membuat dF_n menjadi graf pelangi sisi yang terhubung. Jadi terbukti $rc(dF_n) \geq 3$.

Selanjutnya jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u_1) = 2$ jika i genap, $c(v_i, u_2) = 2$ dan $c(\epsilon) = 3, \forall \epsilon \in E(P_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(dF_n) \leq 3$. Terbukti dengan $n \geq 13$ maka $rc(dF_n) = 3$.

(iii) Jika $n \geq 2$ maka $rvc(dF_n) = 1$ Akan dibuktikan $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$.

Diketahui $diam(dF_n) = 2$, sehingga $rvc(dF_n) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(dF_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(dF_n) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(dF_n) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(u_1) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u_1 dimana $c(u_1) = 1$, untuk lintasan $u_1 - u_2$ jika $c(v_i) = 1$, maka akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_i) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u_1$ dan $v_i - u_2$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(dF_n) \leq 1$. Karena $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$, maka $rvc(dF_n) = 1$.

2. Bilangan Rainbow Connection pada Jenis Graf Hasil Perkalian Kartesius

Pada graf khusus hasil perkalian kartesius akan ditampilkan 1 contoh graf yaitu graf tangga. Graf tangga dibentuk dari perkalian kartesius graf lintasan dengan 2 titik (P_2) dengan graf lintasan dengan n titik (P_n).

Tabel 2. Pola bilangan $rc(M_n)$ dan $rvc(M_n)$

No	Jenis Graf	$rc(M_n)$	$rvc(M_n)$
1.	M_2	2	1
2.	M_3	3	2
3.	M_4	4	3
4.	M_5	5	4
5.	M_6	6	5
⋮	⋮	⋮	⋮
n .	M_n	n	$n - 1$

Teorema 6

Pada graf tangga M_n dengan banyak titik $n \geq 2$, bilangan rainbow connection $rc(M_n) = n$, dan

bilangan *rainbow vertex-connection* $rvc(M_n) = n - 1$.

Bukti:

Graf tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 \times P_n$, dengan $v_i \in V(P_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dan $u_i \in V(P_2)$, $i = 1, 2$.

(i) Akan dibuktikan $rc(M_n) \geq n$, dan $rvc(M_n) \geq n - 1$.

Diketahui graf tangga M_n memiliki panjang diameter $diam(M_n) = n$. Karena $rc(G) \geq diam(G)$ dan $rvc(G) \geq diam(G) - 1$, maka terbukti $rc(M_n) \geq n$ dan $rvc(M_n) \geq n - 1$.

(ii) Akan dibuktikan $rc(M_n) \leq n$, dan $rvc(M_n) \leq n - 1$.

Misalkan graf M_n dibagi 2 himpunan titik X dan Y . Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, maka:

$$c((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)) = i, \quad \text{dengan } i = \{1, 2, \dots, n - 1\},$$

$$c((v_i, u_1), (v_i, u_2)) = n$$

$$c((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)) = i, \text{ dengan}$$

$$i = \{1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_n) \leq n$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c': V(M_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$, maka:

$$c'(v_i, v_1) = i, \text{ dengan } i = \{1, 2, \dots, n - 1\},$$

$$c'(v_i, v_2) = i, \text{ dengan } i = \{1, 2, \dots, n - 1\},$$

$$c'(v_n, v_1) = c'(v_n, v_2) = 1$$

Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_n menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_n) \leq n - 1$.

Dari (i) dan (ii) terbukti $rc(M_n) = n$ dan $rvc(M_n) = n - 1$.

3. Bilangan *Rainbow Connection* pada Sebarang Graf

Pada pembahasan ini, telah didapat model atau teorema dari bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada jenis graf dari hasil penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf. Dengan berpikir induktif, maka dari pola-pola tersebut dapat disimpulkan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada sebarang graf. Graf disini merupakan sebarang graf berhingga dan jika dioperasikan akan menghasilkan graf yang terhubung. Kemudian dengan berpikir deduktif maka pola-pola bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada sebarang graf tersebut dapat dibuktikan kebenarannya.

a. Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Hasil Penjumlahan

Untuk menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf hasil penjumlahan dengan obyek sebarang graf yaitu dengan cara menganalisis bilangan *rainbow connection* dari jenis graf hasil penjumlahan dua graf yang telah ditampilkan di atas. Terdapat 5 contoh graf, yaitu graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas, dan graf kipas ganda.

Dari kelima graf tersebut dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama adalah graf hasil dari penjumlahan dua graf komplit, sedangkan yang kedua adalah graf hasil dari penjumlahan dua bukan graf komplit. Untuk bagian pertama yaitu graf hasil dari penjumlahan dua graf komplit dicontohkan oleh graf komplit K_n , sedangkan bagian kedua yaitu graf hasil dari penjumlahan dua bukan graf komplit dicontohkan oleh graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, graf roda W_n , graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n .

Graf komplit K_n bilangan $rc(K_n) = 1$, sedangkan $rvc(K_n) = 0$. Pada graf bipartisi $K_{m,n}$ komplit bilangan $rc(K_{m,n}) \geq 2$ dan $rvc(K_{m,n}) = 1$. Untuk graf roda W_n bilangan $rc(W_n) \geq 2$ dan bilangan $rvc(W_n) = 1$. Graf kipas F_n bilangan $rc(F_n) \geq 2$ dan $rvc(F_n) = 1$. Sedangkan pada graf kipas ganda dF_n bilangan $rc(dF_n) \geq 2$ dan $rvc(dF_n) = 1$.

Melihat hasil di atas diperoleh suatu teorema bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil dari penjumlahan dua sebarang graf sebagai berikut:

Teorema 7

Misalkan graf G adalah graf hasil penjumlahan sebarang graf G_1 dan sebarang graf G_2 , maka bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$rc(G) = 1$, G_1 dan G_2 adalah graf komplit
 $rc(G) \geq 2$, G_1 atau G_2 adalah bukan graf komplit
 sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{ dan } G_2 \text{ adalah graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{ atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit} \end{cases}$$

Bukti:

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$.

[1] Jika G_1 dan G_2 adalah graf komplit.

Misalkan $G_1 = K_m$ dan $G_2 = K_n$ maka banyak titik dari graf G adalah $m + n$. Anggap $u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)$, sebelum dioperasikan $\deg(u) = m - 1$, sedangkan $\deg(v) = n - 1$. Kemudian dioperasikan penjumlahan antara G_1 dan G_2 , diperoleh

setiap titik pada graf G_1 terhubung langsung dengan setiap titik pada G_2 , $(\{uv|u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\})$. Sehingga derajat setiap titik u bertambah sebanyak n menjadi $\deg(u) = m + n - 1$ dan derajat setiap titik v bertambah sebanyak m menjadi $\deg(v) = m + n - 1$. Artinya setiap titik $u, v \in V(G)$ beraturan- $(m + n - 1)$ sehingga graf G adalah graf K_{m+n} . Terbukti bahwa graf dari penjumlahan dua graf komplit mempunyai bilangan rainbow connection dan bilangan rainbow vertex-connection berturut-turut sebesar 1 dan 0.

- [2] Jika G_1 atau G_2 adalah graf bukan komplit dan $G = G_1 + G_2$.

Misalkan $u_i, u_j \in V(G_1)$, dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$, serta $v_r, v_s \in V(G_2)$, dengan $r, s = 1, 2, \dots, m$ maka $u, w, v, z \in V(G)$. Akan dibuktikan $\text{diam}(G) = 2$, ada 3 kemungkinan:

- 1) G_1 graf komplit dan G_2 bukan graf komplit.

Jika G_1 graf komplit maka $\text{diam}(G_1) = 1$. G_2 bukan graf komplit maka $\text{diam}(G_2) = k \geq 0$. Misalkan lintasan $v_r - v_s$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan k . Karena v_r terhubung langsung dengan u_i dan v_s juga terhubung langsung dengan u_i . Maka lintasan $v_r - v_s$ dapat dibuat melewati u_i , sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $\text{diam}(G) = 2$.

- 2) G_1 bukan graf komplit dan G_2 graf komplit.

Jika G_2 graf komplit maka $\text{diam}(G_2) = 1$. G_1 bukan graf komplit maka $\text{diam}(G_1) = l \geq 0$. Misalkan lintasan $u_i - u_j$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan l . Karena u_i terhubung langsung dengan v_r dan v_j juga terhubung langsung dengan v_r . Maka lintasan $u_i - u_j$ dapat dibuat melewati v_r , sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $\text{diam}(G) = 2$.

- 3) G_1 bukan graf komplit dan G_2 bukan graf komplit.

G_1 bukan graf komplit maka $\text{diam}(G_1) = l \geq 0$. Misalkan lintasan $u_i - u_j$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan l . Karena u_i terhubung langsung dengan v_r dan v_j juga terhubung langsung dengan v_r . Maka lintasan $u_i - u_j$ dapat dibuat melewati v_r , sehingga panjang lintasannya menjadi 2.

G_2 bukan graf komplit maka $\text{diam}(G_2) = k \geq 0$. Misalkan lintasan $v_r - v_s$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan k . Karena v_r terhubung langsung dengan u_i dan v_s juga terhubung langsung dengan u_i . Maka lintasan $v_r - v_s$ dapat dibuat melewati u_i ,

sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $\text{diam}(G) = 2$.

Dari 3 kasus di atas disimpulkan jika $G = G_1 + G_2$ kemudian G_1 atau G_2 adalah bukan graf komplit maka $\text{diam}(G) = 2$. Karena $rc(G) \geq \text{diam}(G)$ maka terbukti $rc(G) \geq 2$.

Selanjutnya dibuktikan $rvc(G) \geq 1$.

Akan dibuktikan $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$.

Diketahui $\text{diam}(G) = 2$, sehingga $rvc(G) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(G) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(G) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(G) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(u_i) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_r - v_s$ akan melewati titik interior u_i dimana $c(u_i) = 1$, untuk lintasan $u_i - u_j$ jika $c(v_r) = 1$, maka akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_r) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_r - u_i$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(G) \leq 1$. Karena $rvc(G) \geq 1$ dan $rvc(G) \leq 1$, maka $rvc(G) = 1$.

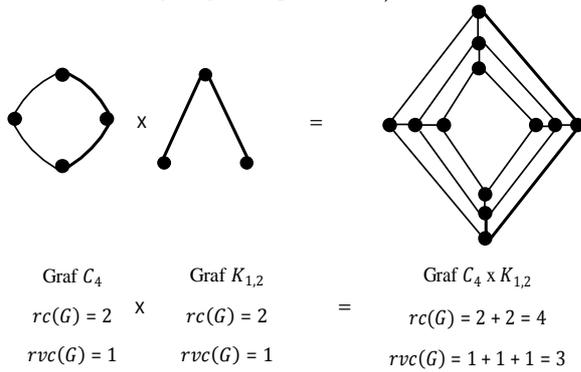
b. Bilangan Rainbow Connection pada Graf Hasil Perkalian Kartesius

Untuk menentukan bilangan rainbow connection graf hasil perkalian kartesius dengan sebarang graf yaitu dengan cara menganalisis bilangan rainbow connection dari graf khusus hasil perkalian kartesius dua graf yang dengan contoh graf tangga M_n .

Dari hasil pembahasan mengenai bilangan rainbow connection dan bilangan rainbow vertex-connection pada graf tangga M_n , diperoleh bilangan $rc(G) = n$ dan bilangan $rvc(G) = n - 1$. Kedua pola tersebut dipengaruhi oleh bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari graf sebelum dioperasikan oleh perkalian kartesius, yaitu P_2 dengan P_n .

Untuk $rc(G) = n$, didapat dari penjumlahan antara $rc(G)$ pada P_2 dengan $rc(G)$ pada P_n yang masing besarnya 1 dan $n - 1$, dimana penjumlahan kedua akan menghasilkan $rc(G) = 1 + (n - 1) = n$. Sedangkan untuk $rvc(G) = n - 1$, didapat dari penjumlahan antara $rvc(G)$ pada P_2 dengan $rvc(G)$ pada P_n yang masing besarnya 0 dan $n - 2$ yang kemudian dijumlah lagi dengan 1, sehingga akan dihasilkan $rvc(G) = 0 + (n - 2) + 1 = n - 1$.

Dengan menggunakan contoh sebarang graf lainnya, misalkan graf sikel C_4 dikalikan kartesius dengan graf bipartisi $K_{1,2}$.

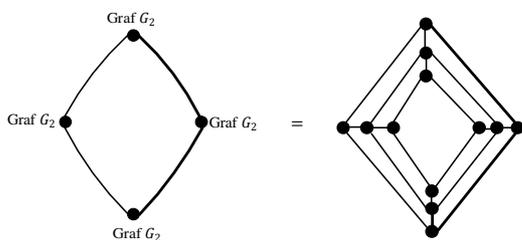


Gambar 10. Perkalian Kartesius antara Graf C_4 dengan Graf $K_{1,2}$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa $r \cdot (G)$ pada graf $C_4 \times K_{1,2}$ adalah 4, yang didapat dari penjumlahan $rc(G)$ pada graf C_4 yang bernilai 2 dengan $rc(G)$ pada graf $K_{1,2}$ yang juga bernilai 2. Sedangkan $rvc(G)$ pada graf $C_4 \times K_{1,2}$ adalah 3, yang didapat dari penjumlahan $rvc(G)$ pada graf C_4 yang bernilai 1 dengan $rvc(G)$ pada graf $K_{1,2}$ yang juga bernilai 1 dan ditambah dengan 1.

Hasil ini bukanlah suatu kebetulan yang muncul dari contoh-contoh yang telah ditampilkan. Akan tetapi ini adalah suatu pola yang terdapat pada setiap graf dari hasil perkalian kartesius dua graf. Setiap sebarang graf G_1 jika dikalikan dengan sebarang graf G_2 , maka hasilnya akan isomorfik dengan graf G_2 yang titik-titiknya adalah graf G_1 . Begitu juga sebaliknya hasilnya akan isomorfik dengan graf G_1 yang titik-titiknya adalah graf G_2 .

Dari contoh di atas, misalnya graf G_1 adalah graf sikel C_4 akan dikalikan kartesius dengan G_2 yaitu graf bipartisi $K_{1,2}$. Maka menghasilkan graf dengan graf bipartisi $K_{1,2}$ akan menggantikan titik-titik pada graf sikel C_4 .



Gambar 11. Graf $C_4 \times K_{1,2}$

Dengan memperhatikan hasil-hasil di atas diperoleh sebagai berikut:

Teorema 8

Graf G adalah graf hasil perkalian kartesius sebarang graf terhubung G_1 dan sebarang graf

terhubung G_2 . Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$$diam(G_1) + diam(G_2) \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

Bukti:

Graf G graf hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

(i) Akan dibuktikan jika $G = G_1 \times G_2$ maka $rc(G) \geq diam(G_1) + diam(G_2)$ dan $rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$

Diketahui jika $G = G_1 \times G_2$ maka $diam(G) = diam(G_1) + diam(G_2)$, karena $rc(G) \geq diam(G)$ maka $rc(G) \geq diam(G_1) + diam(G_2)$.

Selanjutnya misalkan $rc(G_1) = k$, artinya dengan bilangan warna sisi minimum sebanyak k akan membuat graf G_1 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung, dan $rc(G_2) = l$, artinya dengan bilangan warna sisi minimum sebanyak l akan membuat graf G_2 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung. Kemudian $u_i, u_j \in V(G_1)$, dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$, serta $v_r, v_s \in V(G_2)$, dengan $r, s = 1, 2, \dots, m$ maka $(u_i, v_r), (u_j, v_s) \in V(G)$. Jika lintasan $u_i - u_j$ membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi maka $a \leq k$, dan jika $v_r - v_s$ membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi maka $b \leq l$. Akan dibuktikan lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ membentuk lintasan pelangi dengan warna sisi $\leq k + l$.

Ada 4 kemungkinan, yaitu:

1) Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i = j$ dan $r \neq s$.

Himpunan dari titik-titik $(u_i, v_r), (u_j, v_s)$ dengan $i = j$ dan $r \neq s$ akan membentuk graf yang isomorfik dengan graf G_2 . Dua titik tersebut bisa terhubung langsung dan juga bisa tidak terhubung langsung akan tetapi keduanya pasti dihubungkan oleh lintasan. Karena setiap $v_r - v_s$ membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$. Maka Lintasan $(u_i, v_r) - (u_i, v_s)$ juga akan membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$.

2) Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r = s$

Himpunan dari titik-titik $(u_i, v_r), (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r = s$ akan membentuk

graf yang isomorfik dengan graf G_1 . Dua titik tersebut bisa terhubung langsung dan juga bisa tidak terhubung langsung akan tetapi keduanya pasti dihubungkan oleh lintasan. Karena setiap $u_i - u_j$ membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$. Maka Lintasan $(u_i, v_s) - (u_i, v_s)$ juga akan membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$.

3) Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i = j$ dan $r = s$

Jika terdapat dua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) dengan $i = j$ dan $r = s$, maka kedua titik tersebut sama, sehingga panjang lintasan sama dengan 0.

4) Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r \neq s$

Jika terdapat dua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) dengan $i \neq j$ dan $r \neq s$, maka kedua titik tersebut tidak mungkin terhubung langsung. Sehingga kemungkinan lintasan dengan panjang sisi terbesar adalah antara kedua titik ini. Lintasan antara kedua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) akan membentuk lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_r) - (u_j, v_s)$, sehingga terdapat dua langkah. Pertama lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_r)$, lintasan ini akan membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$. Kemudian ditambah dengan lintasan $(u_j, v_r) - (u_j, v_s)$, yang membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$. Sehingga Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ akan membentuk lintasan pelangi dengan $a + b$ warna sisi di mana $a \leq k$ dan $b \leq l$. Jadi terbukti $rc(G) = a + b \leq k + l = rc(G_1) + rc(G_2)$.

(ii) Akan dibuktikan jika $G = G_1 \times G_2$ maka $rvc(G) \geq diam(G_1) + diam(G_2) - 1$ dan $rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$

Diketahui jika $G = G_1 \times G_2$ maka $diam(G) = diam(G_1) + diam(G_2)$, karena $rvc(G) \geq diam(G) - 1$ maka $rvc(G) \geq diam(G_1) + diam(G_2) - 1$.

Selanjutnya $rvc(G_1) \geq diam(G_1) - 1$ dan $rvc(G_2) \geq diam(G_2) - 1$, ini berakibat $diam(G_1) \leq rvc(G_1) + 1$ dan $diam(G_2) \leq rvc(G_2) + 1$. Karena

$$rvc(G) \geq diam(G_1) + diam(G_2) - 1$$

maka

$$rvc(G) \leq rvc(G_1) + 1 + rvc(G_2) + 1 - 1$$

sehingga diperoleh:

$$rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1.$$

Jadi terbukti, jika $G = G_1 \times G_2$ maka :

$$diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1.$$

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$, diperoleh bilangan rainbow connection dari graf G adalah:

$$rc(G) = 1, G_1 \text{ dan } G_2 \text{ graf komplit}$$

$$rc(G) \geq 2, G_1 \text{ atau } G_2 \text{ bukan graf komplit}$$

sedangkan bilangan rainbow vertex-connection dari graf G adalah:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{ dan } G_2 \text{ graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{ atau } G_2 \text{ bukan graf komplit} \end{cases}$$

2. Graf G graf hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$, diperoleh bilangan rainbow connection dari graf G adalah:

$$diam(G_1) + diam(G_2) \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

sedangkan bilangan rainbow vertex-connection dari graf G adalah:

$$diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdullah bin Muhammad. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam As-Syafi'i
- [2] Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- [3] Al-Hifnawi, M. I. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azam.
- [4] Al-Maraghi, A. M. 1989. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.
- [5] Al-Qarni, 'A. 2008. *Tafsir Muyassar*, jilid 3. Jakarta: Qitshi Press.
- [6] Alisah, E & Dharmawan, E. P. *Filsafat Dunia Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustaka Publisher.
- [7] Bondy, J. A & Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press
- [8] Chandran, L. Sunil. *Rainbow Coloring of Graph*. (Online: www.tcs.tifr.res.in/.../nitk.../combinatore.pdf diakses pada tanggal 31 april 2012)
- [9] Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- [10] Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, inc.

- [11] J. A. Gallian. 2007. *A dynamic Survey of Graph Labeling*. Electronic journal combinatorics. Dynamic Survey D#56
- [12] Krivelevich, M. & Yuster, R. 2010. *The Rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*, School of Mathematics, Tel Aviv University.
- [13] Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- [14] Quthb, S. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani
- [15] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, and R. Yuster, On rainbow connection, *Electronic Journal of Combinatorics* 15 (2008), #R57