

Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Pada Jembatan Gantung

Hendrik Widya Permata¹, Ari Kusumastuti², Juhari³

¹Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

^{2,3}Dosen Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: hendrikpermata42@gmail.com, arikusumastuti@gmail.com, juhari@uin-malang.ac.id

ABSTRAK

Model gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan model yang menggambarkan gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada batang yang digantung. Gerak osilasi vertikal merupakan gerak naik turun suatu benda yang terjadi terus berulang, dan kemudian pada waktu tertentu akan berhenti atau mengalami redaman. Gerak torsional merupakan getaran sudut dari suatu objek yang mengalami rotasi. Model gerak osilasi dan torsional pada dasarnya merupakan sistem persamaan diferensial orde dua. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima, dan enam. Model gerak osilasi vertikal dan torsional terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima untuk mendapatkan solusi awal kemudian model tersebut diselesaikan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam. Hasil solusi numerik setiap metode Adam-Bashforth-Moulton selanjutnya diuji dengan galat relatif. Hasil simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsi diperoleh bahwa gerak osilasi vertikal dan gerak torsional merupakan gerak harmonik teredam dan semakin tinggi orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton maka akan lebih cepat galat relatif menuju nilai nol dan sebaliknya.

Kata kunci: gerak osilasi, gerak torsional, metode Adams-Bashforth-Moulton

ABSTRACT

Vertical and torsional oscillatory motion models are models that describe the vertical oscillatory motion and torsional motion of a hanging rod. Vertical oscillatory motion is an up and down motion of an object that occurs repeatedly, and then at a certain time will stop or experience attenuation. Torsional motion is the angular vibration of an object undergoing rotation. The oscillatory and torsional motion models are basically a system of second-order differential equations. The purpose of this study was to determine the numerical solution of the vertical and torsional oscillatory motion models using the Adams-Bashforth-Moulton method of order four, five, and six. The vertical and torsional oscillatory motion models were first solved using the fifth-order Runge-Kutta-Fehlberg method to get an initial solution, then the model was solved using the fourth, fifth and sixth-order Adams-Bashforth-Moulton methods. The results of the numerical solution of each Adam-Bashforth-Moulton method were then tested with relative errors. The numerical simulation results of the vertical and torsional oscillation models show that the vertical oscillating motion and torsional motion are damped harmonic motions and the higher the order in the Adams-Bashforth-Moulton method, the faster the relative error will go to zero and vice versa.

Keywords: oscillatory motion, torsional motion, Adams-Bashforth-Moulton method

PENDAHULUAN

Matematika memberikan peran penting terhadap kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi dari tahun ke tahun. Salah satunya pada pemodelan matematika, karena hampir semua kejadian-kejadian dan fenomena di muka bumi ini dapat diformulasikan ke dalam matematika. Salah satu fenomena yang dikaji adalah masalah getaran pada objek benda-benda yang bergetar, salah satu contohnya adalah getaran pada jembatan gantung.

Permasalahan getaran jembatan gantung yang banyak diperbincangkan peneliti dimulai ketika runtuhnya jembatan Tacoma Narrow. Salah satu peneliti yakni McKenna mengungkapkan bahwa penyebab runtuhnya jembatan Tacoma Narrow karena adanya keberadaan kabel vertikal yang menahan pergerakan rentang tengah jembatan ke bawah karena terhuyung. Sehingga pada tahun 1999, McKenna mengkonstruksi sebuah model matematika terhadap jembatan gantung Tacoma Narrow. Kemudian pada tahun 2012, Kwofie menggunakan model McKenna (1999) yang diterapkan pada jembatan Adomi. Model tersebut menceritakan masalah getaran yang terjadi pada penampang jembatan yang berupa gerak osilasi vertikal dan torsional [1].

Gerak osilasi merupakan suatu getaran yang terjadi secara berulang dalam selang waktu dan pada lintasan yang sama. Dimana suatu getaran yang mengalami gerak osilasi lama-kelamaan akan menuju pada titik kesetimbangannya. Sedangkan suatu gerak yang mengakibatkan suatu objek berputar pada sumbu poros disebut dengan gerak rotasi, dengan besaran yang bekerja pada suatu benda yang mengalami rotasi disebut dengan gerak torsional. Persamaan gerak osilasi dan torsional dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa yang bergantung pada waktu t [2].

Penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa terdiri dari dua metode yaitu metode satu langkah dan metode multi-langkah. Pada metode satu langkah, untuk mendapatkan taksiran nilai $y(t_{n+1})$ membutuhkan satu nilai taksiran sebelumnya yaitu $y(t_n)$ dalam proses perhitungannya. Dalam metode satu-langkah terdiri dari berbagai macam metode yaitu metode Euler, metode Heun, dan metode Runge-Kutta. Sedangkan pada metode multi-langkah, untuk mendapatkan nilai taksiran $y(t_{n+1})$ membutuhkan beberapa nilai taksiran sebelumnya yaitu $y(t_n), y(t_{n-1}), y(t_{n-2}), \dots$ dalam proses perhitungannya. Yang termasuk dalam metode multi-langkah adalah metode prediktor-korektor [3]. Metode prediktor-korektor merupakan metode yang menaksir nilai $y(t_{n+1})$ dari $y(t_n), y(t_{n-1}), y(t_{n-2}), \dots$ dalam persamaan prediktor dan kemudian menggunakan persamaan korektor untuk memperbaiki nilai y_{n+1} dari prediktor. Metode prediktor-korektor pada dasarnya terdiri dari metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming [4]-[5]. Penelitian sebelumnya dilakukan [6] dalam bentuk persamaan diferensial parsial untuk model gerak osilasi vertikal dan torsional dawai.

Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, maka penelitian ini akan mengkaji model yang menggambarkan gerak osilasi vertikal dan gerak torsional pada batang yang digantung menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima dan enam.

METODE

Berdasarkan uraian di atas, maka metode yang penulis gunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Mereduksi sistem persamaan diferensial orde dua menjadi sistem persamaan diferensial orde satu.

- b. Menentukan solusi awal menggunakan metode Runge-Kutta- Fehlberg orde lima.
 - c. Menentukan solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
 - d. Menentukan galat relatif dari solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
2. Simulasi numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
- a. Memasukan nilai parameter-parameter pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - b. Memisalkan nilai awal pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - c. Perbandingan simulasi numerik dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - d. Membandingkan solusi numerik dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.
 - e. Interpretasi grafik solusi numerik dan grafik galat relatif pada model gerak osilasi vertikal dan torsional.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Penelitian ini merujuk pada jurnal Kwofie (2012) yang mengemukakan bahwa model gerak osilasi vertikal dan torsional adalah:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -\frac{K}{m} \left[\left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right)^+ + \left(y(t) + l \sin(\theta(t)) \right)^+ \right] - \delta_2 \dot{y}(t) + g \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta(t)) \left[\left(y(t) - l \sin(\theta(t)) \right)^+ - \left(y(t) + l \sin(\theta(t)) \right)^+ \right] - \delta_1 \dot{\theta}(t) + f(t) \end{cases} \quad (1)$$

dimana $f(t) = \alpha \sin(\mu t)$. Persamaan (1) merupakan sistem persamaan diferensial biasa orde dua. Pada dasarnya sistem persamaan diferensial biasa orde dua dapat direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Karena penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton sebagai prediktor-korektor harus berupa sistem persamaan diferensial biasa orde satu.

Sehingga dengan memisalkan

$$y_1(t) = y(t), y_2(t) = \dot{y}(t), \theta_1(t) = \theta(t), \quad \text{dan} \quad \theta_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (2)$$

dan turunan (2) terhadap t yaitu

$$\dot{y}_1(t) = \dot{y}(t), \dot{y}_2(t) = \ddot{y}(t), \dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}(t), \quad \text{dan} \quad \dot{\theta}_2(t) = \ddot{\theta}(t).$$

Maka model gerak osilasi vertikal dan torsional dapat ditulis menjadi

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = p(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = q(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = -\frac{K}{m} \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ + (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] \\ \quad - \delta_2 y_2(t) + g \\ \dot{\theta}_1(t) = r(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = s(t, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{3K}{ml} \cos(\theta_1(t)) \left[(y_1(t) - l \sin(\theta_1(t)))^+ - (y_1(t) + l \sin(\theta_1(t)))^+ \right] \\ \quad - \delta_1 \theta_2(t) + f(t) \end{array} \right. \quad (3)$$

dengan y_1 merupakan jarak batang jembatan gantung, y_2 merupakan kecepatan perubahan jarak batang, θ_1 merupakan besarnya sudut batang, dan θ_2 merupakan kecepatan perubahan sudut batang.

Pengembangan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Pengembangan metode Adams-Bashforth-Moulton terdiri dari

1. Rumus metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat

Rumus prediktor metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Rumus korektor metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat adalah

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{24} \left[f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}) \right]$$

2. Rumus metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima

Rumus prediktor metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima adalah

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}].$$

Rumus korektor metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima adalah

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{720} (-19f_{n-3} + 106f_{n-2} - 264f_{n-1} + 646f_n + 251f_{n+1}^{(i)})$$

3. Rumus metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam

Rumus prediktor metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam adalah

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} [4274f_n - 7908f_{n-1} + 9952f_{n-2} - 7268f_{n-3} + 2862f_{n-4} - 472f_{n-5}].$$

Rumus korektor metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam adalah

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + \frac{h}{1440} \left[27f_{n-4} - 173f_{n-3} + 482f_{n-2} - 798f_{n-1} + 1427f_n + 475f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}) \right]$$

Penyelesaian Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Penyelesain model gerak osilasi vertikal dan torsional dengan metode Adams-Bashforth-Moulton adalah sebagai berikut:

1. Diberikan nilai awal model gerak osilasi vertikal dan torsional (1) yaitu

$$y_1(0) = y_{1(0)}$$

$$y_2(0) = y_{2(0)}$$

$$\theta_1(0) = \theta_{1(0)}$$

$$\theta_2(0) = \theta_{2(0)}$$

dengan ukuran langkah h tetap dan $t_{n+1} = t_n + h$.

2. Hitung solusi awal dari $y_{1(j)}, y_{2(j)}, \theta_{1(j)}$, dan $\theta_{2(j)}$ menggunakan metode Runge-Kutta-Fehlberg orde lima dimana $j = 0, 1, 2, 3$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat; $j = 0, 1, 2, 3, 4$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima; dan $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
3. Menentukan nilai-nilai dari $p_{n-j}, q_{n-j}, r_{n-j}$, dan s_{n-j} dimana $j = 0, 1, 2, 3$ dan $n = 3, 4, 5, \dots$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat; $j = 0, 1, 2, 3, 4$ dan $n = 4, 5, 6, \dots$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima; dan $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan $n = 5, 6, 7, \dots$ untuk metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.
4. Hitung solusi numerik menggunakan metode Adams-Bashforth sebagai berikut:

$$y_{1(n+1)}^{(i)} = y_{1(n)} + \frac{h}{24}(55p_n - 59p_{n-1} + 37p_{n-2} - 9p_{n-3})$$

$$y_{2(n+1)}^{(i)} = y_{2(n)} + \frac{h}{24}(55q_n - 59q_{n-1} + 37q_{n-2} - 9q_{n-3})$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i)} = \theta_{1(n)} + \frac{h}{24}(55r_n - 59r_{n-1} + 37r_{n-2} - 9r_{n-3})$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i)} = \theta_{2(n)} + \frac{h}{24}(55s_n - 59s_{n-1} + 37s_{n-2} - 9s_{n-3})$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat,

$$y_{1(n+1)}^{(i)} = y_{1(n+1)} + \frac{h}{720}(1901p_n - 2774p_{n-1} + 2616p_{n-2} - 1274p_{n-3} + 251p_{n-4})$$

$$y_{2(n+1)}^{(i)} = y_{2(n+1)} + \frac{h}{720}(1901q_n - 2774q_{n-1} + 2616q_{n-2} - 1274q_{n-3} + 251q_{n-4})$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i)} = \theta_{1(n+1)} + \frac{h}{720}(1901r_n - 2774r_{n-1} + 2616r_{n-2} - 1274r_{n-3} + 251r_{n-4})$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i)} = \theta_{2(n+1)} + \frac{h}{720}(1901s_n - 2774s_{n-1} + 2616s_{n-2} - 1274s_{n-3} + 251s_{n-4})$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan

$$y_{1(n+1)}^{(i)} = y_{1(n)} + \frac{h}{1440}(4274p_n - 7908p_{n-1} + 9952p_{n-2} - 7268p_{n-3} + 2862p_{n-4} - 472p_{n-5})$$

$$y_{2(n+1)}^{(i)} = y_{2(n)} + \frac{h}{1440}(4274q_n - 7908q_{n-1} + 9952q_{n-2} - 7268q_{n-3} + 2862q_{n-4} - 472q_{n-5})$$

$$\theta_{1(n+1)}^{(i)} = \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440}(4274r_n - 7908r_{n-1} + 9952r_{n-2} - 7268r_{n-3} + 2862r_{n-4} - 472r_{n-5})$$

$$\theta_{2(n+1)}^{(i)} = \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440}(4274s_n - 7908s_{n-1} + 9952s_{n-2} - 7268s_{n-3} + 2862s_{n-4} - 472s_{n-5})$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

5. Hitung solusi numerik menggunakan metode Adams-Moulton sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(p_{n-2} - 5p_{n-1} + 19p_n + 9p \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(q_{n-2} - 5q_{n-1} + 19q_n + 9q \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{24} \left(r_{n-2} - 5r_{n-1} + 19r_n + 9r \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{24} \left(s_{n-2} - 5s_{n-1} + 19s_n + 9s \left(t_{(n+1)}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat,

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19p_{n-3} + 106p_{n-2} - 264p_{n-1} + 646p_n + 251p \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19q_{n-3} + 106q_{n-2} - 264q_{n-1} + 646q_n + 251q \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{720} \left(-19r_{n-3} + 106r_{n-2} - 264r_{n-1} + 646r_n + 251r \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{720} \left(-19s_{n-3} + 106s_{n-2} - 264s_{n-1} + 646s_n + 251s \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde lima, dan

$$\begin{aligned}
 y_{1(n+1)}^{(i+1)} &= y_{1(n)} + \frac{h}{1440} \left(27p_{n-4} - 173p_{n-3} + 482p_{n-2} - 798p_{n-1} + 1427p_n + 475p \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 y_{2(n+1)}^{(i+1)} &= y_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left(27q_{n-4} - 173q_{n-3} + 482q_{n-2} - 798q_{n-1} + 1427q_n + 475q \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{1(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{1(n)} + \frac{h}{1440} \left(27r_{n-4} - 173r_{n-3} + 482r_{n-2} - 798r_{n-1} + 1427r_n + 475r \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right) \\
 \theta_{2(n+1)}^{(i+1)} &= \theta_{2(n)} + \frac{h}{1440} \left(27s_{n-4} - 173s_{n-3} + 482s_{n-2} - 798s_{n-1} + 1427s_n + 475s \left(t_{n+1}, y_{1(n+1)}^{(i)}, y_{2(n+1)}^{(i)}, \theta_{1(n+1)}^{(i)}, \theta_{2(n+1)}^{(i)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

untuk proses perhitungan metode Adams-Bashforth-Moulton orde enam.

6. Hitung galat relatif,

$$\begin{aligned}
 \frac{|y_{1(n+1)}^{(i+1)} - y_{1(n+1)}^{(i)}|}{|y_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\
 \frac{|y_{2(n+1)}^{(i+1)} - y_{2(n+1)}^{(i)}|}{|y_{2(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon, \\
 \frac{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{1(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}|} &\leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

dan

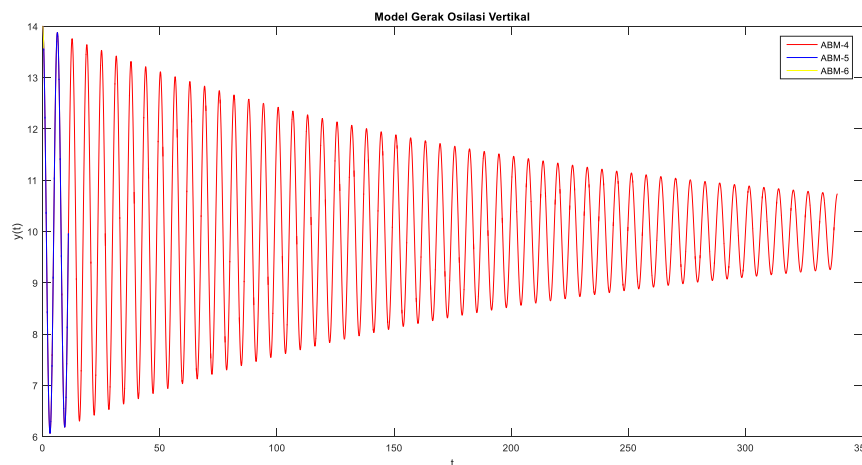
$$\frac{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)} - \theta_{2(n+1)}^{(i)}|}{|\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}|} \leq \varepsilon \tag{4}$$

dimana $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ dan ε merupakan kriteria pemberhentian. Jika kondisi (4) tidak terpenuhi maka nilai $y_{1(n+1)}^{(i+1)}$, $y_{2(n+1)}^{(i+1)}$, $\theta_{1(n+1)}^{(i+1)}$, dan $\theta_{2(n+1)}^{(i+1)}$ diterima sebagai $y_{1(n+1)}$,

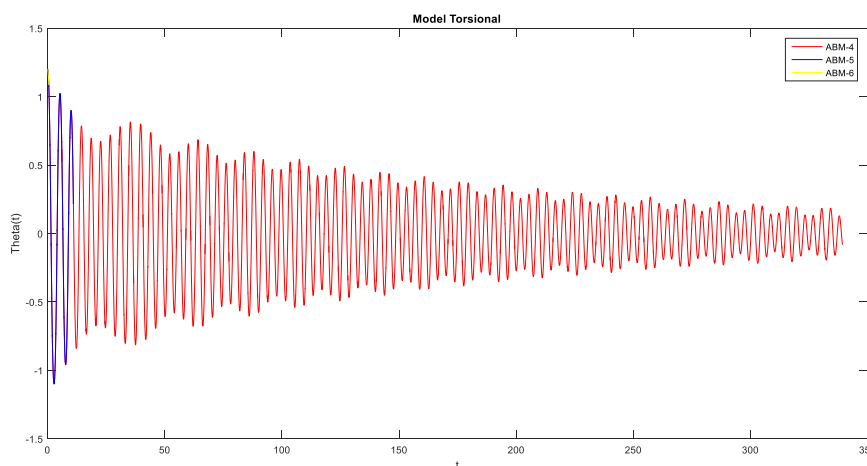
$y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$. Dan secara alami, nilai yang dievaluasi $y_{1(n+1)}$, $y_{2(n+1)}$, $\theta_{1(n+1)}$ dan $\theta_{2(n+1)}$ digunakan pada langkah berikutnya ($n + 2$) yang bertujuan untuk menemukan nilai $y_{1(n+2)} = y_1(t_{n+2})$, $y_{2(n+2)} = y_2(t_{n+2})$, $\theta_{1(n+2)} = \theta_1(t_{n+2})$, dan $\theta_{2(n+2)} = \theta_2(t_{n+2})$ dengan melalui tahap 3. Dan jika kondisi **Error! Reference source not found.** terpenuhi maka iterasi berhenti dan perhitungan hasil solusi numerik berhenti pada iterasi sebelumnya.

Simulasi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional

Simulasi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan tiga simulasi. Simulasi dilakukan menggunakan langkah $h = 0,01$ dan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 10^{-20}$. Pada Simulasi pertama menggunakan nilai awal $y(0) = 14$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$ diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 1 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan nilai awal $y(0) = 14$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



Gambar 2 Solusi Numerik Model Torsional dengan nilai awal $y(0) = 14$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

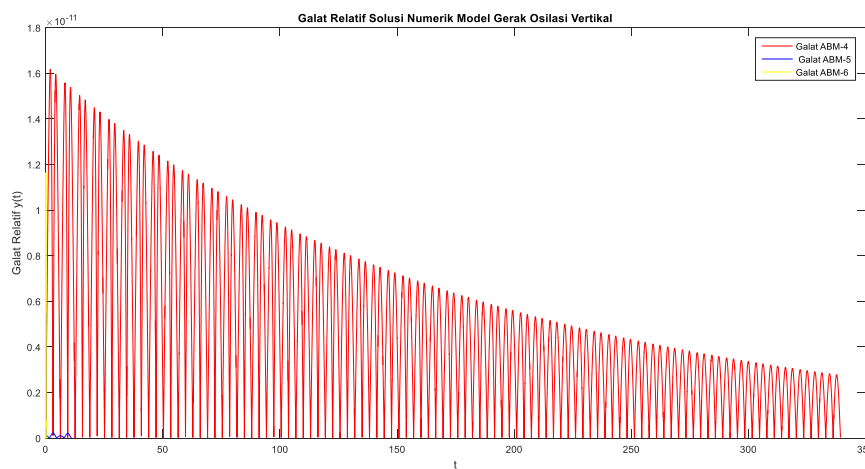
Gambar 1 dan Gambar 2 menunjukkan bahwa gerak osilasi vertikal menuju kesetimbangan pada titik 10 dan gerak torsional menuju kesetimbangan pada titik 0,

maka gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan gerak harmonik teredam. Pada gambar tersebut juga menunjukkan bahwa solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton menghasilkan iterasi waktu t berbeda-beda, yaitu:

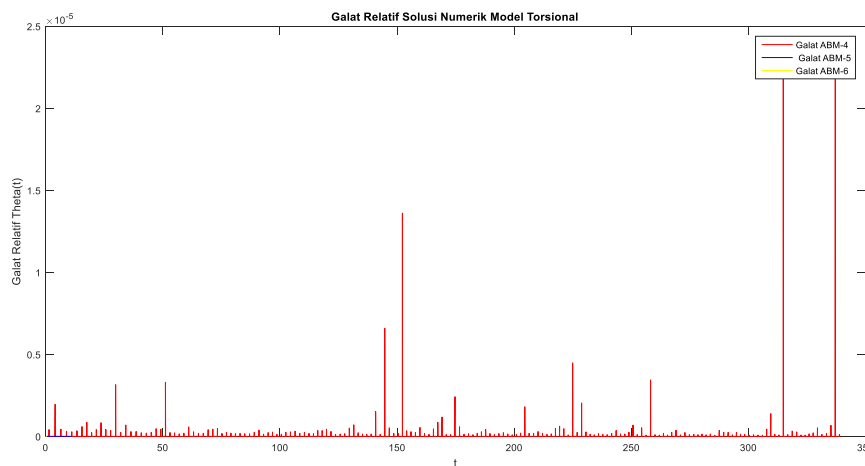
Tabel 1 Pemberhentian Iterasi Solusi Numerik Simulasi Pertama

Metode	waktu ke-
ABM 4	339,29
ABM 5	10,99
ABM 6	0,47

Hal ini karena pengaruh dari galat relatif dan kriteria pemberhentian ε . Oleh karena itu, Solusi numerik akan cepat memenuhi ε sebanding dengan besar orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga perbandingan galat relatif pada solusi numerik simulasi pertama model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



Gambar 3 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 14$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



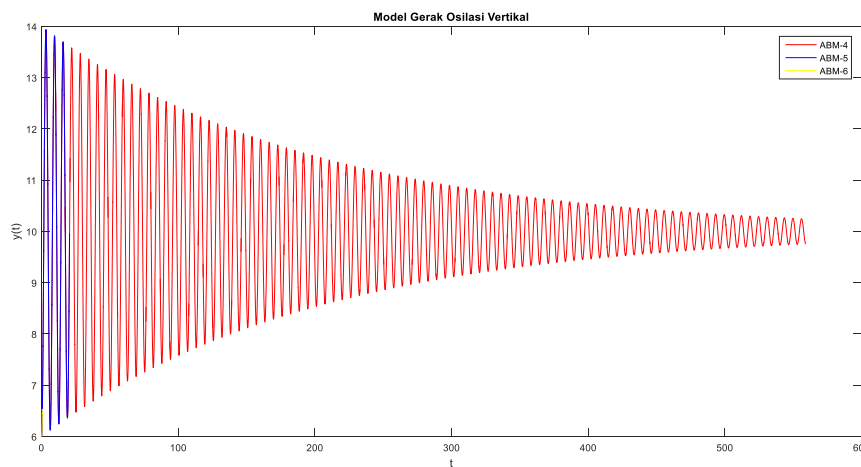
Gambar 4 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = 14$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Berdasarkan Gambar 4 dan Gambar 5 diperoleh hasil sebagai berikut:

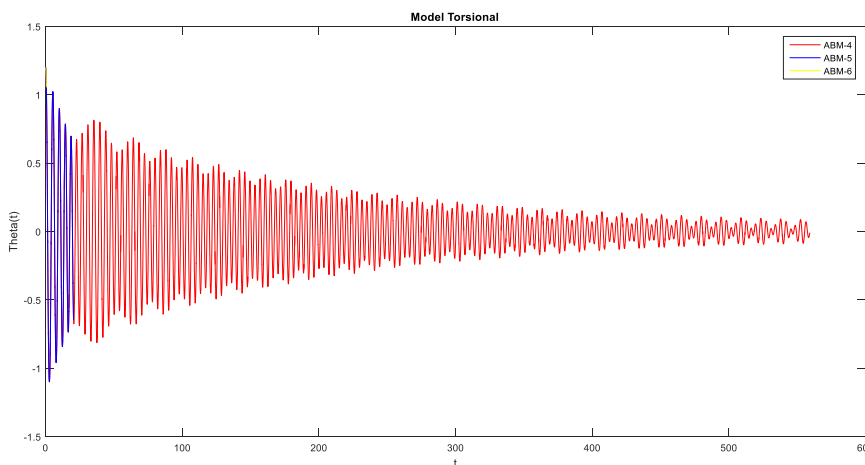
Tabel 2 Galat Relatif Model gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Simulasi Pertama

Metode	Gerak Osilasi Vertikal		Gerak Torsional	
	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar
ABM 4	$2,11051249275449 \times 10^{-16}$	$1,61679962146804 \times 10^{-11}$	$1,48661494274038 \times 10^{-14}$	$2,32813713898227 \times 10^{-5}$
ABM 5	$3,55397128062262 \times 10^{-16}$	$5,47995965187342 \times 10^{-12}$	$8,21568807080448 \times 10^{-14}$	$1,31808611543055 \times 10^{-8}$
ABM 6	$1,29519103495881 \times 10^{-16}$	$1,16297751742516 \times 10^{-11}$	$5,27487848189871 \times 10^{-14}$	$3,21993591731726 \times 10^{-9}$

Simulasi kedua menggunakan nilai awal $y(0) = 6$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1,2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$ diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 5 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = 6$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1,2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



Gambar 6 Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = 6$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1,2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

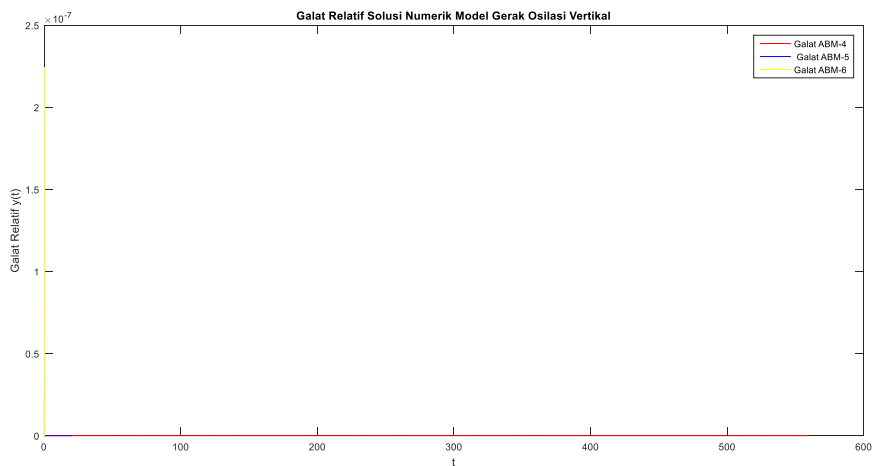
Gambar 5 dan Gambar 6 menunjukkan bahwa gerak osilasi vertikal menuju kesetimbangan pada titik 10 dan gerak torsional menuju kesetimbangan pada titik 0, maka gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan gerak harmonik teredam. Pada

gambar tersebut juga menunjukkan bahwa solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton menghasilkan iterasi waktu t berbeda-beda, yaitu:

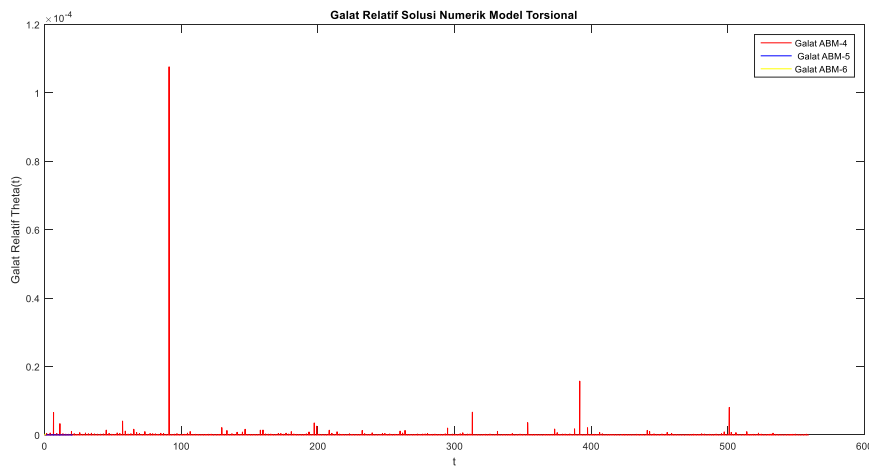
Tabel 3 Pemberhentian Iterasi Solusi Numerik Simulasi Kedua

Metode	waktu ke-
ABM 4	559,21
ABM 5	20,42
ABM 6	0,53

Hal ini karena pengaruh dari galat relatif dan kriteria pemberhentian ε . Oleh karena itu, Solusi numerik akan cepat memenuhi ε sebanding dengan besar orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga perbandingan galat relatif pada solusi numerik simulasi pertama model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



Gambar 7 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = 6$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



Gambar 8 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = 6$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 1, 2$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

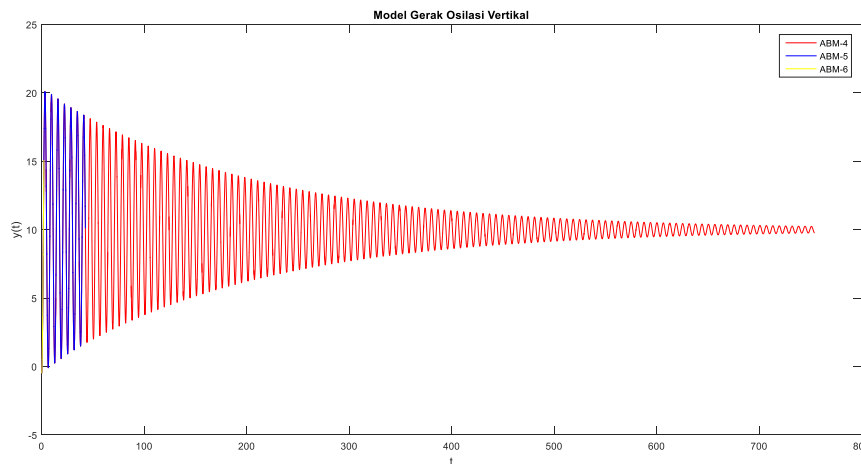
Berdasarkan Gambar 7 dan Gambar 8 diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4 Galat Relatif Model gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Simulasi Kedua

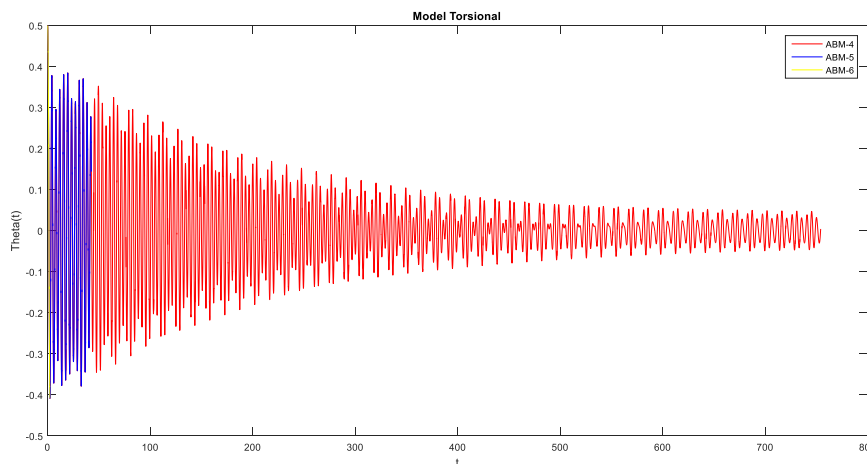
Gerak Osilasi Vertikal	Gerak Torsional
------------------------	-----------------

Metode	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar
ABM 4	$1,39224000389205 \times 10^{-16}$	$6,31691472681704 \times 10^{-8}$	$9,76528635814982 \times 10^{-16}$	0,000107615464981596
ABM 5	$1,77412018055013 \times 10^{-16}$	$1,13258607378114 \times 10^{-7}$	$1,90608952722218 \times 10^{-16}$	$1,08679781101889 \times 10^{-7}$
ABM 6	$1,35843400075013 \times 10^{-16}$	$2,24060388991285 \times 10^{-7}$	$5,94534689005873 \times 10^{-14}$	$2,15673891072678 \times 10^{-7}$

Simulasi ketiga menggunakan nilai awal $y(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 0,5$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$ diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 9 Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 0,5$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



Gambar 10 Solusi Numerik Model Torsional dengan Nilai Awal $y(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 0,5$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

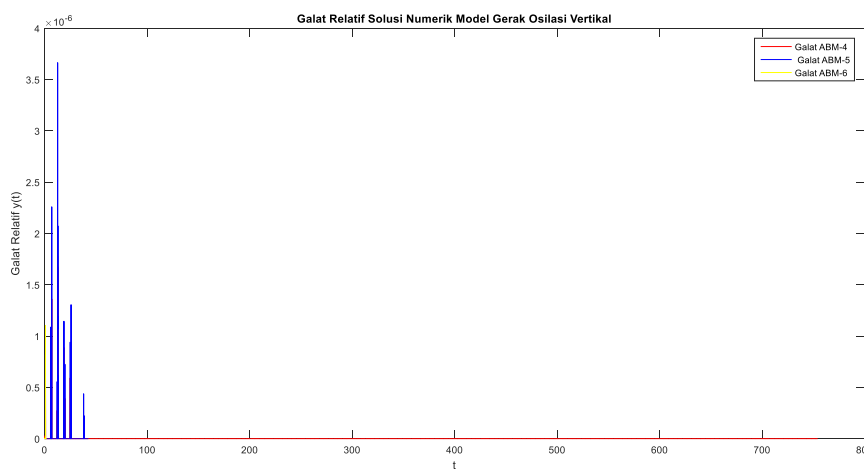
Gambar 9 dan Gambar 10 menunjukkan bahwa gerak osilasi vertikal menuju kesetimbangan pada titik 10 dan gerak torsional menuju kesetimbangan pada titik 0, maka gerak osilasi vertikal dan torsional merupakan gerak harmonik teredam. Pada

gambar tersebut juga menunjukkan bahwa solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton menghasilkan iterasi waktu t berbeda-beda, yaitu:

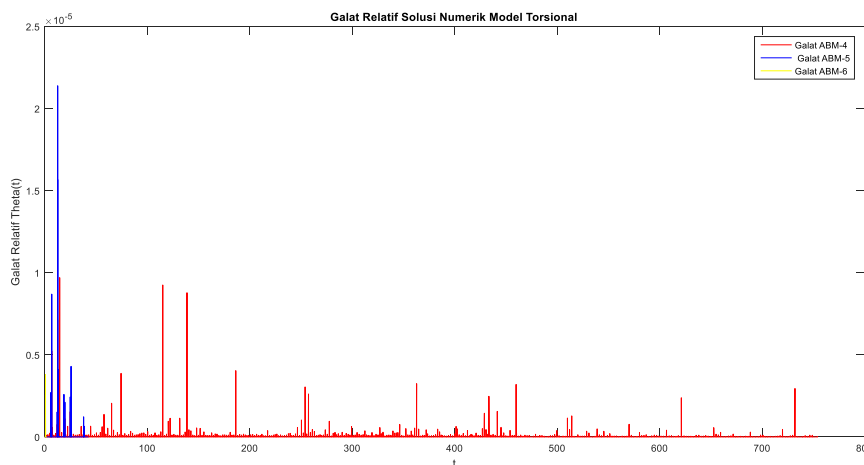
Tabel 5 Pemberhentian Iterasi Solusi Numerik Simulasi Ketiga

Metode	waktu ke-
ABM 4	754,28
ABM 5	42,68
ABM 6	2,19

Hal ini karena pengaruh dari galat relatif dan kriteria pemberhentian ε . Oleh karena itu, Solusi numerik akan cepat memenuhi ε sebanding dengan besar orde pada metode Adams-Bashforth-Moulton. Sehingga perbandingan galat relatif pada solusi numerik simulasi pertama model gerak osilasi vertikal dan torsional sebagai berikut:



Gambar 11 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Gerak Osilasi Vertikal saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 0,5$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$



Gambar 12 Galat Relatif Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Model Torsional saat Nilai Awal $y(0) = -0,5$; $\dot{y}(0) = 0$; $\theta(0) = 0,5$; dan $\dot{\theta}(0) = 0$

Berdasarkan Gambar 11 dan Gambar 12 diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 6 Galat Relatif Model gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Simulasi Ketiga

Gerak Osilasi Vertikal	Gerak Torsional
------------------------	-----------------

Metode	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar	Galat Relatif Terkecil	Galat Relatif Terbesar
ABM 4	$1,689912531783 \times 10^{-16}$	$1,7786597453662 \times 10^{-6}$	$5,62265610955897 \times 10^{-15}$	$9,7001688041798 \times 10^{-6}$
ABM 5	$1,77817700485202 \times 10^{-16}$	$3,66367558653258 \times 10^{-6}$	$2,61206507694246 \times 10^{-15}$	$2,1387087114825 \times 10^{-5}$
ABM 6	$4,04196828767192 \times 10^{-16}$	$1,10404638729739 \times 10^{-6}$	$4,9675608426393 \times 10^{-16}$	$3,80133175647868 \times 10^{-7}$

KESIMPULAN

Solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat, lima, dan enam menunjukkan bahwa gerak osilasi dan gerak torsional merupakan gerak harmonik teredam, karena semakin waktu diperbesar gerak osilasi dan gerak torsional menuju ke titik kesetimbangan yaitu 10 untuk gerak osilasi dan 0 untuk gerak torsional. Dan galat relatif metode Adams-Bashforth-Moulton pada model gerak osilasi vertikal akan cepat mendekati nilai 0 sepanjang sebanding dengan tinggi tingkat orde metode Adams-Bashforth-Moulton.

DAFTAR RUJUKAN

- [1] R. O. Kwofie, A Mathematical model of a suspension bridge - case study: Adomi bridge, Atimoku, Ghana, 1(3): 47-62, 2012.
- [2] D. C. Giancoli, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, America: Pearson Education, Inc., 2009.
- [3] R. Munir, Metode Numerik, Bandung: Informatika Bandung, 2010.
- [4] S. Rosłonec, Fundamental Numerical Methods for Electrical Engineering, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [5] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis Ninth Edition, Boston: Cengage Learning, 2010.
- [6] P. J. McKenna, "Large torsional oscillations in suspension bridges revisited," *Amer. Math. Monthly*, pp. 1-18, 1999.