

Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Faktor Kanibalisme Pada Predator

Dwi Safitri¹, Heni Widayani^{2*}, Usman Pagalay³

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Email: dwisafitri8363@gmail.com, heniwidayani@mat.uin-malang.ac.id*, usmanpagalay@yahoo.co.id

ABSTRAK

Kajian dinamika populasi predator-prey di suatu ekosistem dengan adanya kanibalisme pada predator dilakukan pada penelitian ini. Ketika ada kanibalisme di tingkat predator dikhawatirkan populasi predator itu akan menurun atau terjadi kepunahan, sehingga populasi prey menjadi tidak terkontrol dan akan terjadi ketidakseimbangan ekosistem. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibangunlah model matematika predator-prey dengan faktor kanibalisme pada predator berbentuk sistem persamaan diferensial biasa non linier dengan tiga persamaan untuk mengetahui dinamika model tersebut. Kemudian di analisis dengan mencari kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan dan diilustrasikan dengan simulasi numerik. Pada model predator-prey tersebut ditemukan dua titik kesetimbangan yang memiliki kemungkinan stabil yaitu titik kesetimbangan ketika tidak ada prey (E_0) dan titik kesetimbangan ketika kedua spesies eksis di ekosistem tersebut. Hasil sensitivitas analisis menunjukkan bahwa sifat kestabilan lokal dari titik E_0 maupun E^* bergantung pada parameter kanibalisme yakni β dan ε . Lebih lanjut, untuk titik E^* telah dibuktikan sifat kestabilan global menggunakan fungsi lyapunov. Hasil simulasi numerik mengilustrasikan hasil analisa yang sudah diperoleh, sehingga ditemukan kemungkinan terjadinya limit cycles yang menandakan adanya bifurkasi hopf. Hasil analisis dinamik model predator-prey dengan kanibalisme pada predator, maka dapat diketahui perilaku dari model tersebut yang dapat digunakan agar suatu populasi tidak terancam punah.

Kata kunci: model predator-prey; kanibalisme; stabilitas lokal; limit cycles; bifurkasi hopf.

ABSTRACT

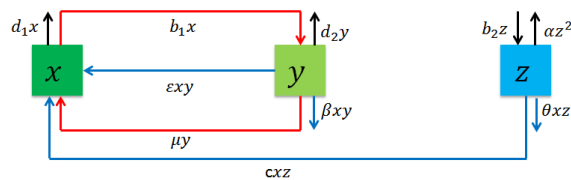
The study of predator-prey population dynamics in an ecosystem in the presence of cannibalism in predators is carried out in this study. When there is cannibalism at the predator level, it is feared that the predator population will decrease or extinction will occur. Consequently the prey population becomes uncontrolled and there will be an ecosystem imbalance. In this study, a predator-prey mathematical model was built with the cannibalism factor in predators in the form of a system of non-linear ordinary differential equations with three equations to determine the dynamics of the model. Then it is analyzed by looking for the stability of each equilibrium point and illustrated by numerical simulation. In the predator-prey model, there are two equilibrium points that have a stable possibility, namely the equilibrium point when there is no prey (E_0) and the equilibrium point when both species exist in the ecosystem. The results of the sensitivity analysis show that the local stability properties of points E_0 and E^* depend on the cannibalism parameters, namely β and ε . Furthermore, for the point E^* , global stability properties have been demonstrated using the lyapunov function. The results of the numerical simulation illustrate the results of the analysis that have been obtained, so that the possibility of limit cycles is found which indicates the existence of a hopf bifurcation. The results of the dynamic analysis of the predator-prey model with cannibalism on predators, it can be seen the behavior of the model that can be used so that a population is not threatened with extinction.

Keywords: predator-prey model; cannibalism; local stability; limit cycles; hopf bifurcation.

PENDAHULUAN

Model matematika sering membahas masalah-masalah fenomena alam yang terjadi di antara makhluk hidup. Salah satunya adalah masalah di ekosistem makhluk hidup. Semua makhluk hidup melakukan interaksi untuk bertahan hidup, baik sesama spesies maupun berbeda spesies. Interaksi saling memangsa antara satu spesies dengan spesies lainnya merupakan bentuk interaksi demi mempertahankan kelangsungan hidup. Dalam matematika model interaksi tersebut diperkenalkan oleh Vito Volterra dan Alfred J. Lotka pada tahun 1980 disebut sebagai model *Lotka-Volterra* atau model *Predator-Prey* [1]. Populasi pada ekosistem mengalami peningkatan dan penurunan seiring perkembangan zaman. Faktor-faktor yang memicu pertumbuhan populasi antara lain kematian, kelahiran, dan lingkungan. Sifat-sifat perilaku pada *predator* salah satunya yaitu Predasi intraspesifik disebut sebagai kanibalisme, yaitu proses membunuh dan kemudian memakan individu dari spesies yang sama. Pada permasalahan ekosistem, maka bidang matematika berperan dalam hal tersebut. Salah satu persamaan dalam bidang matematika yaitu persamaan diferensial [2], yang terdiri dari persamaan diferensial linier [3] dan non-linier[4]. Penelitian sebelumnya telah menganalisis model predator-prey antara lain kanibalisme *prey* yang dapat mengubah dinamika model *predator-prey* tipe Holling-Tanner [5], efek kanibalisme secara eksplisit pada model *predator-prey* yang terstruktur oleh tiga usia dalam satu spesies[6], model *predator-prey* dengan kanibalisme dan adanya penyakit di kedua populasi[7], serta model *predator-prey* dengan kanibalisme dengan adanya penundaan[8].

Pada [9], Zhang mengonstruksi model matematika predator-prey dengan kanibalisme.



Sehingga membentuk model predator-prey dengan kanibalisme dari sistem tersebut yaitu sistem persamaan diferensial non-linier [10] sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -d_1x + \mu y + \epsilon xy + cxz \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \mu y - d_2y - \beta xy \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - \alpha z - \theta x)z \end{aligned} \quad (1)$$

Dari model tersebut, d_1 adalah angka kematian alami dari *predator* dewasa, d_2 adalah angka kematian alami dari *predator* remaja, b_1 yaitu angka kelahiran *predator* dewasa, b_2 yaitu tingkat pertumbuhan bersih *prey*, μ menunjukkan tingkat pematangan *predator* remaja, α menunjukkan Menggambarkan persaingan antar spesies *prey* (kepadatan populasi *prey*), θ merupakan Tingkat penangkapan *predator* dewasa ke *prey*, c merupakan Peningkatan laju *predator* dewasa melalui memakan *prey*, β merupakan Tingkat penangkapan *predator*

dewasa ke *predator* remaja, dan ε merupakan Peningkatan laju *predator* dewasa melalui memakan *predator* remaja.

Penyelesaian dari model *predator-prey* dengan kanibalisme pada predator yaitu dengan melinierkan model tersebut, kemudian didapatkan matriks Jacobi serta nilai eigen dari masing-masing titik kesetimbangan yang didapatkan. Analisis kestabilan dari titik kesetimbangan [11] ketika $\alpha = 0$ dengan meninjau beberapa sifat kestabilan sistem linier. Kestabilan titik kesetimbangan juga dianalisis menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk kestabilan lokal [12] dan fungsi lyapunov [13]. Fungsi lyapunov memiliki definisi dalam menentukan titik kestabilan yang bersifat stabil global [14]. Sehubungan dengan stabilitas lokal maka terdapat *limit cycles* yang memungkinkan terjadi bifurkasi hopf [15].

METODE

Langkah-langkah yang dilakukan dari penelitian ini:

1. Analisis dinamik model *predator-prey* tanpa kanibalisme
 - a. Menentukan titik kesetimbangan
 - b. Melinierkan model *predator-prey* tanpa kanibalisme
 - c. Menentukan jenis kestabilan dari setiap titik kesetimbangan
2. Analisis dinamik model *predator-prey* dengan kanibalisme
 - a. Menentukan titik kesetimbangan
 - b. Melinierkan model *predator-prey* dengan kanibalisme
 - c. Menentukan jenis kestabilan dari setiap titik kesetimbangan
 - d. Menyimulasikan solusi sistem numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada analisa dinamik berikutnya maka untuk memudahkan prosesnya, akan dilakukan penskalaan variabel dengan memisalkan

$$x = \frac{d_1 \bar{x}}{\theta}, \quad y = \frac{d_1^2 \bar{y}}{\theta \mu}, \quad z = \frac{d_1 \bar{z}}{c}, \quad t = \frac{\bar{t}}{d_1}, \quad (2)$$

dari pemisalan tersebut, dengan menetapkan bahwa $x > 0, y > 0$ dan $z \geq 0$. Sehingga didapatkan

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d_1 \varepsilon}{\theta \mu}, \quad \bar{b}_1 = \frac{b_1 \mu}{d_1^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\theta}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{d_1}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_2}{d_1}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\mu} + \bar{d}_2, \quad \bar{b}_2 = \frac{b_2}{d_1}.$$

Dengan demikian didapatkan laju *predator* dewasa, *predator* remaja dan *prey* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= -\bar{x} + \bar{y} + \bar{\varepsilon} \bar{x} \bar{y} \\ &\quad + \bar{x} \bar{z} \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \bar{b}_1 \bar{x} - \bar{\sigma} \bar{y} - \bar{\beta} \bar{x} \bar{y} \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= (\bar{b}_2 - \bar{x}) \bar{z} \end{aligned} \quad (3)$$

Untuk mempermudah penjelasan selanjutnya, maka simbol dari $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varepsilon}, \bar{b}_1, \bar{\sigma}, \bar{\beta}$ dan \bar{b}_2 masing-masing diubah ke bentuk simbol $x, y, z, \varepsilon, b_1, \sigma, \beta$ dan b_2 sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + \varepsilon xy + xz \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y - \beta xy \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - x)z\end{aligned}$$

Menurut arti parameter dalam model (1), parameter ε dan β dalam sistem (4) adalah non negatif dan parameter lainnya positif. Secara khusus, $\beta = \varepsilon = 0$ menunjukkan bahwa tidak ada kanibalisme dalam populasi pemangsa. Untuk sistem (4), jelas bahwa $\frac{dx}{dt}|_{x=0} = y > 0$ untuk $y > 0$, $\frac{dy}{dt}|_{y=0} = b_1x > 0$ untuk $x > 0$, dan bahwa bidang $x - y$ (yaitu $z = 0$) adalah invarian positif. Oleh karena itu, himpunan $\Omega_0 = \{(x, y, z): x > 0, y > 0, z \geq 0\}$ adalah invarian positif dari (4).

1. Analisis Model Predator-Prey (4) Tanpa Kanibalisme

Pada bagian ini, mempertimbangkan kestabilan titik kesetimbangan pada sistem (3.4) dengan tidak adanya kanibalisme. Hasil yang diperoleh di sini sangat membantu dalam memahami efek kanibalisme dalam kasus ini.

Ketika tanpa adanya kanibalisme, yaitu $\beta = \varepsilon = 0$, maka sistem (4) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y + xz \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y \\ \frac{dz}{dt} &= (b_2 - x)z\end{aligned}\tag{5}$$

Ketika tidak ada mangsa ($z = 0$), maka sistem (5) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= b_1x - \sigma y\end{aligned}\tag{6}$$

Ketika $\sigma < b_1$, titik kesetimbangan dari sistem (6) merupakan titik asal yaitu titik dimana ($x = 0, y = 0$) yang merupakan pelana (*Saddle*) karena nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Ketika $\sigma > b_1$ memiliki titik $E_0(x = 0, y = 0, z = 0)$ yang memiliki nilai eigen yang positif b_2 sehingga titik kesetimbangan E_0 selalu tidak stabil, serta memiliki titik $E^*(x^* = b_2, y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma}, z^* = 1 - \frac{b_1}{\sigma})$ maka sistem (5) dapat dituliskan

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + (z - z^*) \right] \\ \frac{dy}{dt} &= b_1 y \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -z(x - x^*)\end{aligned}$$

Kemudian turunan dari fungsi V_1 sepanjang solusi sistem (5) yaitu

$$\frac{dV_1}{dt} = y^* \left(2 - \frac{xy^*}{x^*y} - \frac{x^*y}{xy^*} \right)$$

memenuhi bahwa $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$ untuk $x > 0$ dan $y > 0$, serta $\frac{dV_1}{dt} = 0$ ketika $x = x^*$ dan $y = y^*$. Maka ekuilibrium positif E^* dari sistem (5) stabil asimtotik global dalam Ω_0 jika eksis.

Singkatnya, kita telah sampai pada deskripsi lengkap tentang dinamika (5).

Teorema 1. Untuk sistem (5), dua pernyataan berikut berlaku.

- (i) Jika $\sigma < b_1$, maka terdapat titik asal O yang merupakan pelana (*saddle*)
- (ii) Jika $\sigma > b_1$, maka titik E_0 eksis tetapi tidak stabil, dan E^* stabil secara global asimtotik di Ω_0 .

2. Analisis Dinamik Model Predator-Prey (4) dengan Kanibalisme

2.1 Eksistensi dan Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan

Selain titik asal $O(0,0,0)$, sistem (4) memiliki titik kesetimbangan $E_0 = (x_0 = \frac{\sigma - b_1}{b_1 \varepsilon - \beta}, y_0 = \frac{\sigma - b_1}{\sigma \varepsilon - \beta}, z_0 = 0)$ ketika $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$ atau $\sigma < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan ada titik kesetimbangan positif $E^* (x^* = b_2, y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma + \beta b_2}, z^* = 1 - \frac{b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2})$ ketika $b_1 < \frac{\sigma + \beta b_2}{1 + \varepsilon b_2}$ atau ekuivalen ketika $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta) := \frac{\sigma + \beta b_2 - b_1}{b_1 b_2}$.

$$E^* \left(x^* = b_2, y^* = \frac{b_1 b_2}{\sigma + \beta b_2}, z^* = 1 - \frac{b_1(1 + \varepsilon b_2)}{\sigma + \beta b_2} \right) \quad (7)$$

Sehubungan dengan stabilitas lokal maka kesetimbangan (4) memiliki hasil sebagai berikut.

Teorema 2. Pernyataan berikut tentang stabilitas lokal kesetimbangan dari (4).

- (i) Ekuilibrium O selalu tidak stabil
- (ii) Batas ekuilibrium E_0 stabil secara lokal asimtotik jika $\varepsilon_1(\beta) < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan tidak stabil jika $\sigma < b_1 < \varepsilon_1(\beta)$ atau $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$.
- (iii) Ekuilibrium positif E^* tidak stabil jika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon_2(\beta) < \varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, sedangkan stabil secara lokal asimtotik jika salah satu dari dua kondisi, (C1): $\sigma \leq b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, dan (C2): $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$, dimana

$$\varepsilon_2(\beta) = \frac{1}{\sigma} \left[\beta + \frac{(\sigma - b_1)(\sigma + \beta b_2)}{\sigma(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1(\sigma + b_2)} \right].$$

Pembuktian.

- (i) Matriks Jacobi dari sistem (4) pada titik asal O yaitu

$$J(O) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ b_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

memiliki nilai eigen positif b_2 sehingga titik kesetimbangan O selalu tidak stabil.

- (ii) Matriks Jacobi dari sistem (4) pada titik E_0 yaitu

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y_0 & 1 + \varepsilon x_0 & x_0 \\ b_1 - \beta y_0 & -(\sigma + \beta x_0) & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa x_0 dan y_0 memenuhi $-1 + \varepsilon y_0 = -\frac{y_0}{x_0}$, $1 + \varepsilon x_0 = \frac{x_0}{y_0}$, $b_1 - \beta y_0 = \frac{\sigma y_0}{x_0}$, dan $\sigma + \beta x_0 = -\frac{b_1 x_0}{y_0}$. Kita bisa menulis ulang $J(E_0)$ sebagai

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\frac{y_0}{x_0} & \frac{x_0}{y_0} & x_0 \\ \frac{\sigma y_0}{x_0} & -\frac{b_1 x_0}{y_0} & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - x_0 \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi tersebut maka nilai eigen dari E_0 yaitu $b_2 - x_0$ dan dua nilai eigen yang lain dari persamaan kuadrat $\lambda^2 + \lambda \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{b_1 x_0}{y_0} \right) + (b_1 - \sigma) = 0$. Sehingga, ketika E_0 ada maka stabil secara lokal asimtotik jika dan hanya jika $b_1 > \sigma$ dan $b_2 < x_0$.

Menurut syarat keberadaan dari E_0 , $b_1 > \sigma$ memenuhi bahwa $b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$. Maka $b_2 < x_0 = \frac{b_1 - \sigma}{\beta - b_1 \varepsilon}$ ekuivalen dengan $b_1 > \varepsilon_1(\beta)$ ketika E_0 ada. Perhatikan bahwa $\sigma < \frac{\beta}{\varepsilon}$ memenuhi bahwa $\sigma < \varepsilon_1(\beta) < \frac{\beta}{\varepsilon}$. Hal ini, dikombinasikan dengan kondisi keberadaan E_0 , membuktikan bahwa E_0 stabil secara lokal asimtotik jika $\varepsilon_1(\beta) < b_1 < \frac{\beta}{\varepsilon}$ dan tidak stabil jika $\sigma < b_1 < \varepsilon_1(\beta)$ atau $\frac{\beta}{\varepsilon} < b_1 < \sigma$.

(iii) Matriks Jacobi dari sistem (4) pada titik E^* yaitu

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon y^* + z^* & 1 + \varepsilon x^* & x^* \\ b_1 - \beta y^* & -(\sigma + \beta x^*) & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sebagai x^*, y^* dan z^* memenuhi $-1 + \varepsilon y^* + z^* = -\frac{y^*}{x^*}$, $1 + \varepsilon x^* = \frac{x^*(1-z^*)}{y^*}$, $b_1 - \beta y^* = \frac{\sigma y^*}{x^*}$ dan $-(\sigma + \beta x^*) = -\frac{b_1 x^*}{y^*}$, $J(E^*)$ dapat ditulis ulang sebagai

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\frac{y^*}{x^*} & \frac{x^*(1-z^*)}{y^*} & x^* \\ \frac{\sigma y^*}{x^*} & -\frac{b_1 x^*}{y^*} & 0 \\ -z^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga persamaan karakteristik dari $J(E^*)$ adalah $0 = |\lambda I - J(E^*)| = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$

di mana

$$a_1 = \frac{y^*}{x^*} + \frac{b_1 x^*}{y^*}, \quad a_2 = z^*(\sigma + x^*) - (\sigma - b_1), \quad a_3 = \frac{b_1 x^{*2} z^*}{y^*}.$$

Perhitungan selanjutnya mengikuti Kriteria Hurwitz, yaitu didapatkan

$$a_1 a_2 - a_3 = \frac{(b_1 \sigma x^{*2} + \sigma y^{*2} + x^* y^{*2}) z^* + (b_1 - \sigma)(b_1 x^{*2} + y^{*2})}{x^* y^*} \quad (8)$$

Selanjutnya, substitusikan (3.7) ke (3.8) maka menghasilkan

$$a_1 a_2 - a_3 = \frac{b_1 b_2}{(\sigma + \beta b_2)^2} \{ (\sigma + \beta b_2) [\beta (\sigma + \beta b_2)] + b_1 (\beta - 1) - \varepsilon [\sigma (\sigma + \beta b_2)^2 + b_1 (\sigma + b_2)] \} \quad (9)$$

Perhatikan bahwa

$$\varepsilon_1(\beta) - \varepsilon_2(\beta) = \frac{(\sigma - b_1)(\sigma + \beta b_2)[(\sigma + \beta b_2)^2 + b_1]}{b_1 b_2 [\sigma (\sigma + \beta b_2)^2 + b_1 (\sigma + b_2)]} \quad (10)$$

jika $\sigma \leq b_1$ Maka $\varepsilon_1(\beta) \leq \varepsilon_2(\beta)$ dan jika $\sigma > b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) > \varepsilon_2(\beta)$. Oleh karena itu, ketika E^* ada, jika $\sigma \leq b_1$ atau $\sigma > b_1$ dan $< \varepsilon_2(\beta)$ maka $a_1 a_2 - a_3 > 0$, sedangkan jika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon_2(\beta) < \varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$ maka $a_1 a_2 - a_3 < 0$. Selanjutnya dengan menggunakan Kriteria Hurwitz, kondisi stabil secara lokal asimtotik pada sistem (4) adalah ketika $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Hasil selanjutnya berkaitan dengan stabilitas global dari titik ekuilibrium E^* .

Teorema 3. Pernyataan berikut tentang sistem (4)

Ketika E^* eksis, maka akan stabil secara global jika $\beta \geq \varepsilon \sigma$.

Pembuktian.

Demikian pula, sehubungan dengan E^* , sistem (4) dapat ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \varepsilon(y - y^*) + (z - z^*) \right] \\ \frac{dy}{dt} &= y \left[b_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - \beta(x - x^*) \right] \\ \frac{dz}{dt} &= -z(x - x^*)\end{aligned}$$

Menetapkan fungsi sebagai berikut

$$V_2 = \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + n \frac{x^*}{y^*} \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right) + \left(z - z^* - z^* \ln \frac{z}{z^*} \right)$$

di mana $n = \frac{b_1(\sigma - \varepsilon b_2 + 2\beta b_2)}{\sigma^2(\sigma + \beta b_2)}$. Kemudian turunan dari V_2 sepanjang solusi dari sistem (4) yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= (x - x^*) \left[\left(\frac{y}{x} - \frac{y^*}{x^*} \right) + \varepsilon(y - y^*) \right] + n \frac{x^*}{y^*} (y - y^*) \left[b_1 \left(\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \right) - \beta(x - x^*) \right] \\ &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right)^2 + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 - \left(\varepsilon x^* + 1 + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*} \right) \left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right]\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\varepsilon x^* + 1 = \frac{x^*(1 - z^*)}{y^*} \quad \text{dan} \quad \beta x^* = \frac{b_1 x^* - \sigma y^*}{y^*}$$

Maka

$$\varepsilon x^* + 1 + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} - \frac{n\beta x^{*2}}{y^*} = \frac{x^*(n\sigma + 1 - z^*)}{y^*}$$

Mengikuti keterangan tersebut maka

$$\begin{aligned}\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{xy}{x^*} \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right)^2 + \frac{nb_1 x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 - \frac{x^*(n\sigma + 1 - z^*)}{y^*} \left(1 - \frac{x^*}{x} \right) \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right] \\ &= -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right) - \frac{(n\sigma + 1 - z^*)x^*}{2y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right]^2 + \left[nb_1 - \frac{(n\sigma + 1 - z^*)^2}{4} \right] \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 \right\}\end{aligned}$$

Substitusikan $n = \frac{b_1(\sigma - \varepsilon b_2 + 2\beta b_2)}{\sigma^2(\sigma + \beta b_2)}$ ke persamaan tersebut sehingga

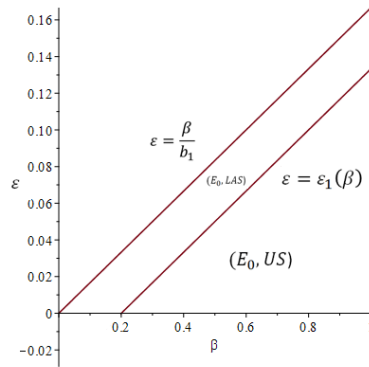
$$\frac{dV_2}{dt} = -\frac{xy}{x^*} \left\{ \left[\left(1 - \frac{x^*}{x} \right) - \frac{b_1 x^*}{\sigma y^*} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right) \right]^2 + \frac{b_1^2 b_2 (\beta - \varepsilon \sigma)}{\sigma^2 (\sigma + \beta b_2)} \frac{x^{*2}}{y^{*2}} \left(1 - \frac{y^*}{y} \right)^2 \right\}$$

Jadi ketika $\beta \geq \varepsilon \sigma$ maka $\frac{dV_2}{dt} < 0$, sedangkan ketika $x = x^*$ dan $y = y^*$ maka $\frac{dV_2}{dt} = 0$. Kemudian dapat dilihat bahwa ketika $\beta \geq \varepsilon \sigma$, himpunan invariant terbesar dari (4) dalam himpunan $\{(x, y, z) \in \Omega_0 : \frac{dV_2}{dt} = 0\}$ adalah singleton $\{E^*\}$. Oleh karena itu, E^* stabil secara global jika $\beta \geq \varepsilon \sigma$ oleh prinsip Invarian La Salle.

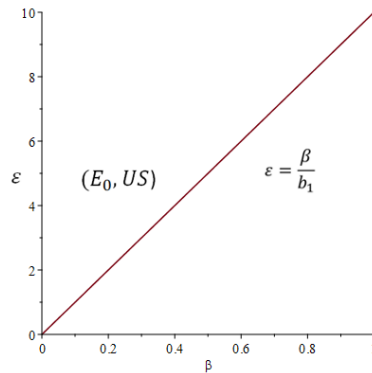
Pada kesetimbangan positif E^* , kondisi keberadaan E^* adalah $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$. Kondisi dalam Teorema 3 untuk stabilitas global adalah $\beta \geq \varepsilon \sigma$ sedangkan Teorema 2 menunjukkan bahwa kondisi stabilitas lokalnya adalah (C1): $\sigma \leq b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_1(\beta)$, atau (C2): $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$.

2.2 Sensitivitas Titik Kesetimbangan Terhadap β dan ε

Untuk memahami lebih jelas kondisi stabilitas lokal E_0 dan E^* dan sensitivitas pada parameter β dan ε , maka diilustrasikan secara geometris dengan menggunakan daerah yang sesuai di bidang $\beta - \varepsilon$. Nilai parameter untuk gambar 1 pada (a) $\sigma < b_1$ yaitu $\sigma = 1, b_1 = 6, b_2 = 25, \beta = [0,1]$; pada (b) $\sigma > b_1$ yaitu $\sigma = 6, b_1 = 0.1, b_2 = 25, \beta = [0,1]$.



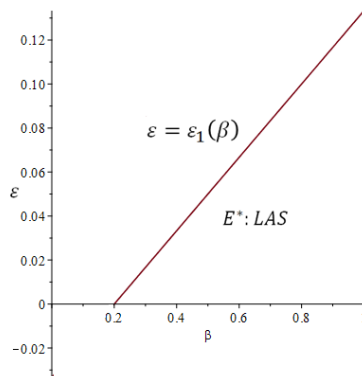
(a)



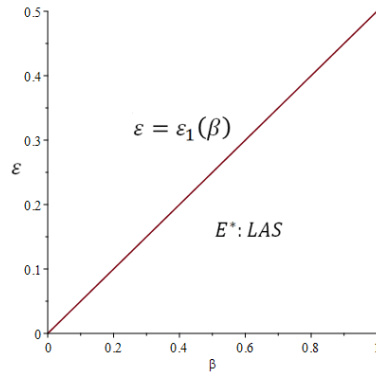
(b)

Gambar 1. Wilayah Keberadaan dan Stabilitas Lokal E_0 di Bidang $\beta - \epsilon$: (a) $\sigma < b_1$; (b) $\sigma > b_1$

Teorema 2 dan Gambar 1 menunjukkan bahwa jika $\sigma > b_1$, E_0 pasti tidak stabil asalkan ada. Berdasarkan stabilitas lokal E_0 dan keberadaan E^* , dengan kondisi $\sigma < b_1$, E_0 pasti tidak stabil selama E^* ada. Nilai parameter untuk gambar 2 pada (a) $\sigma < b_1$ yaitu $\sigma = 1, b_1 = 6, b_2 = 25, \beta = [0,1]$; pada (b) $\sigma = b_1$ yaitu $\sigma = 2, b_1 = 2, b_2 = 25, \beta = [0,1]$.



(a)

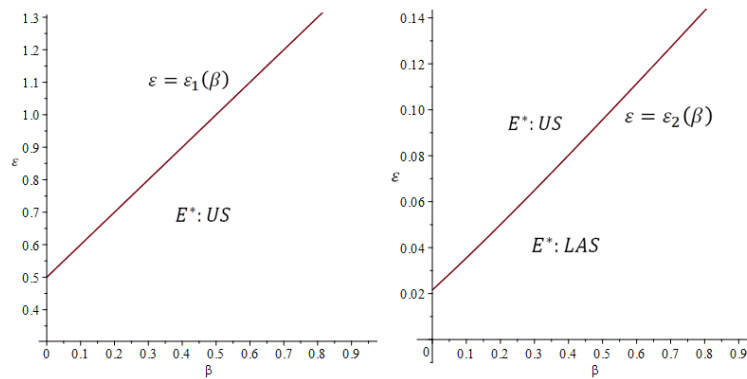


(b)

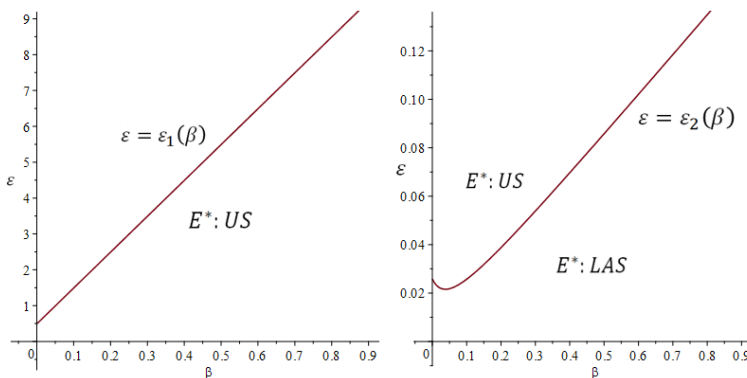
Gambar 2. Wilayah Keberadaan dan Stabilitas Lokal E^* di Bidang $\beta - \varepsilon$: (a) $\sigma < b_1$; (b) $\sigma = b_1$

Dalam Gambar 2 dan 3, enam kemungkinan kasus ditunjukkan sehubungan dengan keberadaan dan stabilitas E^* . Perhatikan bahwa jika $\sigma < b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) < \varepsilon_2(\beta)$ dan jika $\sigma = b_1$ maka $\varepsilon_1(\beta) = \varepsilon_2(\beta)$. Kemudian, untuk kasus pada Gambar 2 (a) dan (b), yang sesuai dengan $\sigma \leq b_1$, E^* pasti stabil secara lokal asimtotik selama eksis menurut Teorema 2.

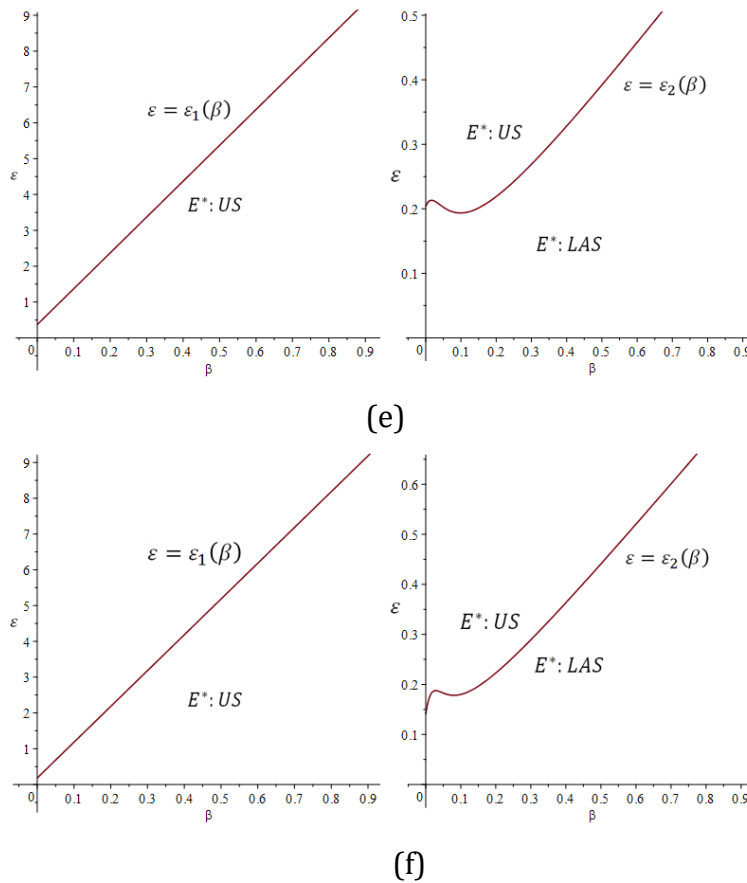
Untuk nilai parameter pada gambar 3 ketika $\sigma > b_1$, (c) $\sigma = 6, b_1 = 1, b_2 = 10, \beta = [0,1]$; (d) $\sigma = 6, b_1 = 0.1, b_2 = 120, \beta = [0,1]$; (e) $\sigma = 1.4, b_1 = 0.1, b_2 = 35, \beta = [0,1]$; (f) $\sigma = 1.2, b_1 = 0.1, b_2 = 60, \beta = [0,1]$.



(c)



(d)



Gambar 3. Wilayah Keberadaan dan Stabilitas Lokal E^* di Bidang $\beta - \epsilon$: (c), (d), (e) dan (f) Semuanya Untuk Kasus dimana $\sigma > b_1$

Namun, jika $\sigma > b_1$ maka $\epsilon_2(\beta) < \epsilon_1(\beta)$. Karenanya, ada empat situasi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3 (c) - (f). Dari ungkapan $a_1 a_2 - a_3$ dapat disimpulkan bahwa E^* tidak stabil jika titik (β, ϵ) terletak di antara kedua kurva $\epsilon = \epsilon_1(\beta)$ dan $\epsilon = \epsilon_2(\beta)$ sedangkan stabil jika titik (β, ϵ) berada di bawah kurva $\epsilon = \epsilon_2(\beta)$. Dari empat situasi tersebut kita tahu bahwa untuk β yang diberikan, jika E^* eksis maka E^* dapat kehilangan stabilitasnya dengan peningkatan ϵ . Namun, ketika ϵ adalah tetap, perubahan stabilitas E^* terhadap β berbeda dalam empat situasi.

Pada Gambar 3 (c), jika $\epsilon \leq \epsilon_2(0)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik, yang berarti bahwa stabilitas E^* tidak akan berubah; ketika $\epsilon > \epsilon_2(0)$, stabilitasnya dapat berubah dari tidak stabil menjadi stabil secara asimtotik lokal dengan peningkatan β .

Pada Gambar 3 (d), ada tiga jenis perubahan stabilitas E^* . (i) Ketika ϵ kurang dari minimum fungsi $\epsilon_2(\beta)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Ketika ϵ berada di antara $\epsilon_2(0)$ dan minimum, stabilitas berubah dari stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil, yaitu, perubahan stabilitas terjadi saat β meningkat. (iii) Ketika $\epsilon > \epsilon_2(0)$, stabilitas bisa hilang dengan peningkatan β .

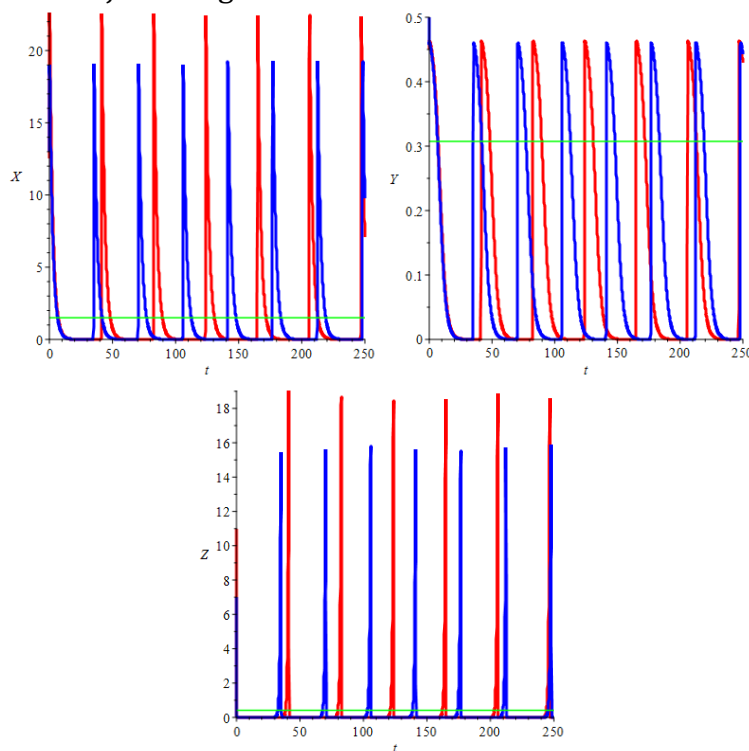
Dalam Gambar 3 (e), ada empat kasus tentang perubahan stabilitas E^* , dua di antaranya akan memiliki perubahan stabilitas. (i) Ketika ϵ kurang dari minimum fungsi $\epsilon_2(\beta)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Ketika ϵ berada di antara $\epsilon_2(0)$ dan minimum, stabilitas berubah dari stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iii) Jika ϵ berada di antara $\epsilon_2(0)$ dan nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iv) Jika ϵ lebih besar dari nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil.

Pada Gambar 3(f), ada juga empat kemungkinan, yang berbeda dari yang ada pada Gambar 3(e). perubahan stabilitas hanya dapat terjadi dalam satu kasus. (i) Ketika $\varepsilon \leq \varepsilon_2(0)$, E^* selalu stabil secara lokal asimtotik. (ii) Jika ε berada di antara $\varepsilon_2(0)$ dan nilai minimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil. (iii) Jika ε berada di antara dua nilai ekstrim, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil menjadi tidak stabil menjadi stabil. (iv) Jika ε lebih besar dari nilai maksimal lokal, stabilitas berubah dari tidak stabil menjadi stabil.

Pernyataan di atas tentang perubahan stabilitas kesetimbangan positif E^* dengan β menunjukkan kompleksitas pengaruh kanibalisme terhadap dinamika model (4). Ini juga menunjukkan bahwa, untuk ε yang diberikan, kesetimbangan positif E^* stabil untuk β yang cukup besar setiap kali ada.

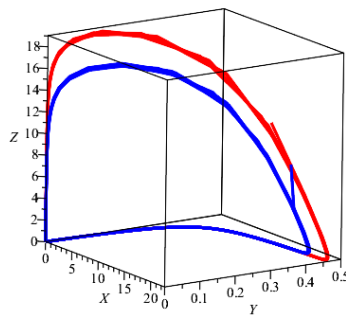
2.3 Simulasi Numerik

Pada subbab ini akan dibahas tentang simulasi dari persamaan (4) dengan nilai parameter yang diberikan. Menggunakan nilai parameter β dan ε yang berbeda dan dilakukan pada empat syarat awal. Kemudian simulasikan maka didapatkan grafik perilaku dari sistem tersebut. Pada nilai parameter $\sigma = 4.4, b_1 = 2.5, b_2 = 1.5, \beta = 5.2, \varepsilon = 1.25$ dan syarat awal $(12.5, 0.45, 11)$ ditandai dengan warna merah serta $(13, 0.5, 7)$ ditandai dengan warna biru sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* yang ditandai dengan warna hijau sebagai berikut:



Gambar 4. Limit cycle Stabil Pada Solusi Sistem (4)

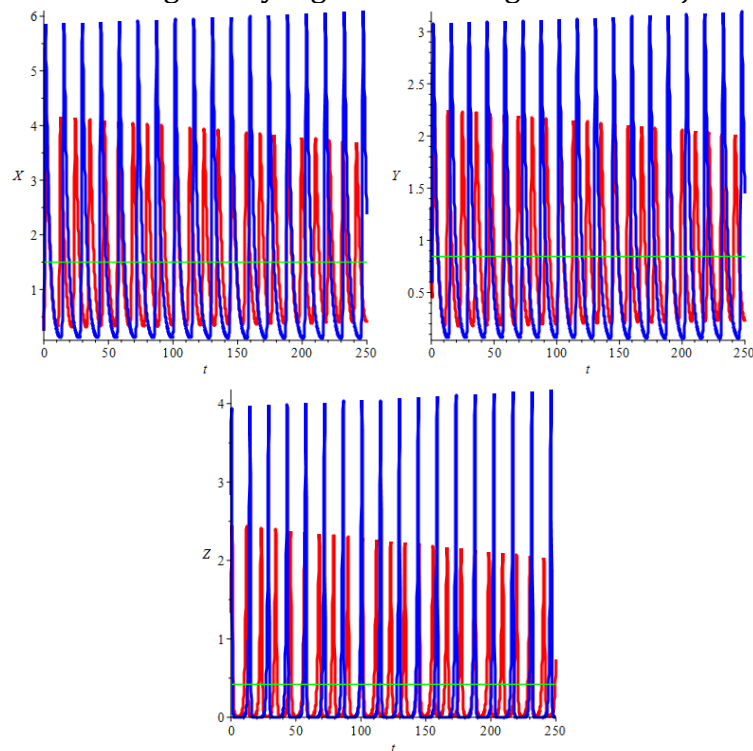
Kemudian plot tiga dimensi diberikan sebagai berikut:



Gambar 5. Potret Fase Solusi Sistem (4) dengan Limit Cycle Stabil

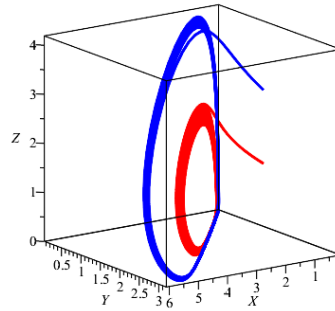
Pada Gambar 4 dan 5, menggambarkan komponen dari solusi sistem (4) dengan $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 5.2$, dan $\varepsilon = 1.25$. Dimana amplitudonya masing-masing naik dan turun, serta mengalami osilasi yang menjauhi dan tidak mencapai titik kesetimbangan sehingga gambar 4 dan 5 merupakan perilaku dari model *predator-prey* yang tidak stabil. Orbit 3-dimensi yang sesuai ditampilkan pada gambar 5. Pada kedua gambar, warna yang sama menunjukkan nilai awal yang sama. Pada hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa ada siklus batas (*limit cycle*) yang stabil untuk sistem (4) artinya dua nilai kondisi awal tersebut masing-masing berjalan mendekati siklus batas dan bifurkasi hopf bersifat super kritis.

Kemudian pada gambar 6 dan 7 nilai parameternya yaitu $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 0.025$, $\varepsilon = 0.02$ dan syarat awal $(0.25, 1.32, 1.33)$ ditandai dengan warna merah serta $(0.25, 1.32, 2.83)$ ditandai dengan warna biru sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* yang ditandai dengan warna hijau sebagai berikut:



Gambar 6. Limit Cycle Tidak Stabil Pada Solusi Sistem (4)

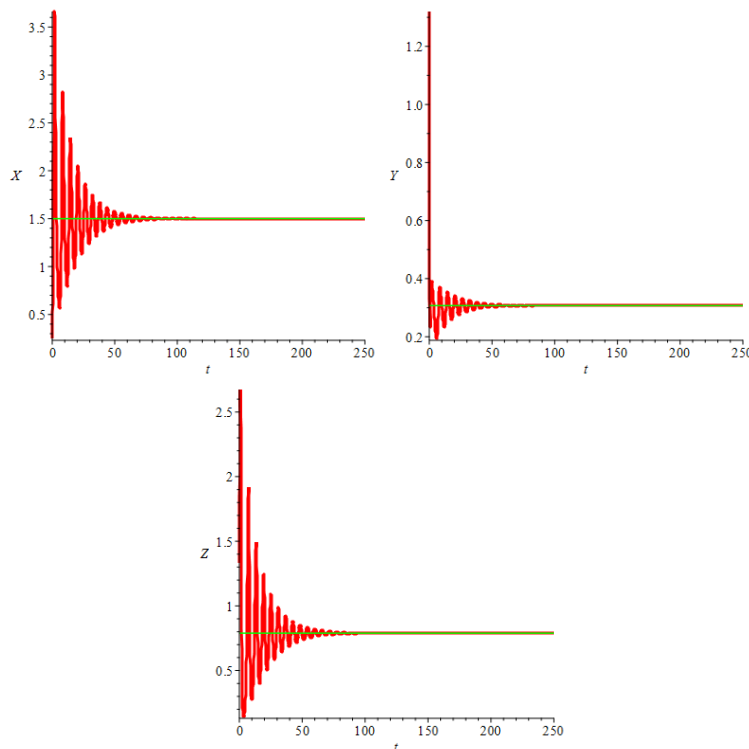
Kemudian plot tiga dimensi diberikan sebagai berikut:



Gambar 7. Potret Fase Solusi Sistem (4) dengan Limit Cycle Tidak Stabil

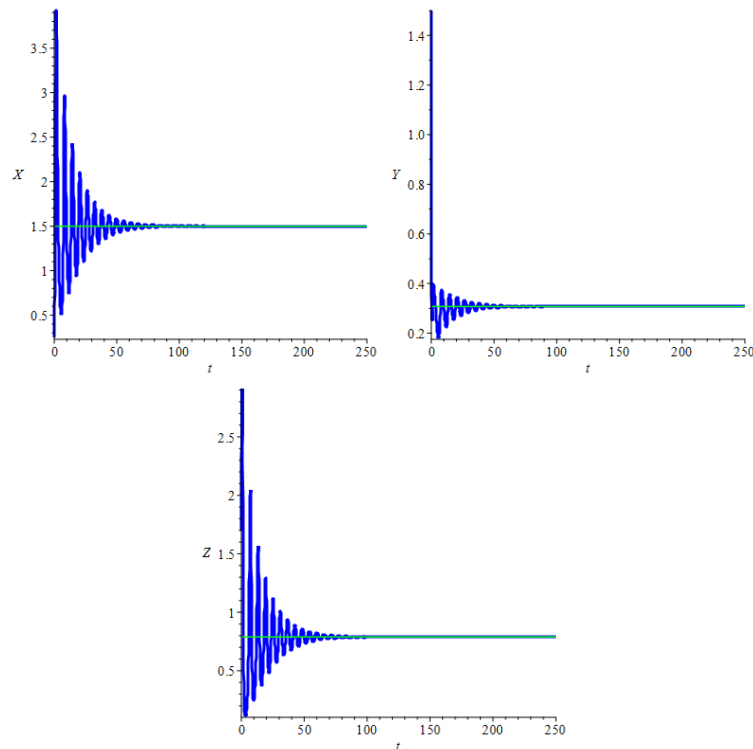
Pada Gambar 6 dan 7, menggambarkan komponen dari solusi sistem (4) dengan $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 0.025$, dan $\varepsilon = 0.02$. Dimana amplitudonya masing-masing naik dan turun, serta mengalami osilasi yang mendekati dan mencapai titik kesetimbangan sehingga gambar 6 dan 7 merupakan perilaku dari model *predator-prey* yang stabil. Orbit 3-dimensi yang sesuai ditampilkan pada gambar 7. Pada kedua gambar, warna yang sama menunjukkan nilai awal yang sama. Pada hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa ada siklus batas (*limit cycle*) yang tidak stabil untuk sistem (4) artinya dua nilai kondisi awal tersebut masing-masing berjalan menjauhi siklus batas dan bifurkasi hopf bersifat subkritis.

Kemudian pada gambar 8 dan 9 nilai parameternya yaitu $\sigma = 4.4$, $b_1 = 2.5$, $b_2 = 1.5$, $\beta = 5.2$, $\varepsilon = 0.02$ dan kondisi awal $P_1 = (0.25, 1.32, 1.33)$ sehingga didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* yang ditandai dengan warna hijau sebagai berikut:



Gambar 8. Solusi Sistem (4) dengan Syarat Awal $P_1 = (0.25, 1.32, 1.33)$

Kemudian dengan kondisi awal yang berbeda yaitu ketika $P_2 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.5, z(0) = 1.7)$ didapatkan grafik dengan memberikan titik kesetimbangan E^* sebagai berikut:



Gambar 9. Solusi Sistem (4) dengan Syarat Awal $P_2 = (0.25, 1.5, 1.7)$

Gambar 8 dan 9 merupakan hasil simulasi numerik yang menunjukkan dinamika model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* dengan dua syarat awal yang berbeda. Berdasarkan hasil simulasi, dengan syarat awal $P_1 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.32, z(0) = 1.33)$ dan $P_2 = (x(0) = 0.25, y(0) = 1.5, z(0) = 1.7)$ mengalami osilasi masing-masing naik dan turun pada waktu $t = 0 - 50$. Pada akhirnya yaitu pada $t = 100$ dan seterusnya, osilasi menuju ke titik kesetimbangan. Sehingga dapat dikatakan dengan nilai parameter dan kondisi tersebut yang mengikuti kondisi kestabilan titik kesetimbangan E^* yaitu ketika $\sigma > b_1$ dan $\varepsilon < \varepsilon_2(\beta)$ stabil secara lokal asimtotik. Dapat dilihat bahwa hasil terbaik yaitu ketika jumlah populasi *prey* lebih besar dari pada jumlah populasi *predator* dan jumlah populasi *predator* remaja lebih besar dari pada jumlah populasi *predator* dewasa.

KESIMPULAN

Pada analisis dinamik model *predator-prey* tanpa kanibalisme, terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu titik asal O yang merupakan *saddle*, titik E_0 yang selalu tidak stabil dan titik E^* yang stabil secara global asimtotik. Pada analisis dinamik model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator*, terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu titik asal O yang selalu tidak stabil, titik E_0 yang stabil secara lokal asimtotik dengan kondisi tertentu dan titik E^* yang stabil secara lokal asimtotik dan global asimtotik dengan kondisi tertentu. Sensitivitas titik kesetimbangan pada parameter β dan ε , diilustrasikan secara geometris untuk menghasilkan daerah yang sesuai pada bidang $\beta - \varepsilon$. Dapat dilihat bahwa hasil terbaik adalah untuk model *predator-prey* dengan faktor kanibalisme pada *predator* yang stabil secara lokal asimtotik yaitu ketika ε lebih kecil dari fungsi minimum $\varepsilon_2(\beta)$ dan $\varepsilon \leq \varepsilon_2(0)$ pada titik E^* . Berdasarkan simulasi numerik dengan memberikan beberapa syarat awal, dapat disimpulkan bahwa terdapat perilaku model *predator-prey* dengan kanibalisme yang stabil dan tidak stabil serta terdapat siklus batas yang memungkinkan terjadinya bifurkasi hopf.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Olinick, Michael, *Mathematical Modeling in The Social and Life Sciences*, America: Wiley, 2014.
- [2] Zill, D., Wright, W., & Cullen, M., *Differential Equations with Boundary Value Problems (8th ed.)*, New York: Cengage Learning, 2013.
- [3] Waluya, S.B., *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006.
- [4] Hariyanto, *Persamaan Diferensial Biasa*, Jakarta: Universitas Terbuka, 1992.
- [5] Basheer, Aladeen, dkk. "Prey Cannibalism Alters The Dynamics of Holling-Tanner-Type Predator-Prey Models," *Nonllinier Dyn Springer and Business Media Dordrecht*, 2016.
- [6] Basheer, Aladeen, Jingjing Lyu, dkk. "The Destabilizing Effect of Cannibalism in A Spatially Explicit Three-Species Age Structured Predator-Prey Model," *Wiley Hindawi*, 2017.
- [7] Biswas, Santosh, dkk. "A Model Based Theoretical Study on Cannibalistic Prey-Predator System with Disease in Both Populations," *Differ Equ Dyn Syst*, 2014.
- [8] Biswas, Santosh dkk. "Cannibalistic Predator-Prey Model with Disease in Predator- A Delay Model," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol 25(10), 2015.
- [9] Zhang, Fengqin, Yuming Chen, and Jianquan Li, "Dynamical Analysis of A Stage-Structured Predator-Prey Model with Cannibalism," *Mathematical Biosciences*, 307, 2019.
- [10] Boyce, W.E., & Diprima, R. C., *Elementery Differential Equations and Boundary Value Problem (7th ed.)*, New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [11] Ndi, Meksianis Zadrak, *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi Dan Penyebaran Penyakit*, Yogyakarta: DEEPUBLISH, 2018.
- [12] DiStefano III, J. J., Stubberud, A. R., & Williams, I. J., *Feedback and Control System (Second Ed.)*, United States: McGraw-Hill Education, 1990.
- [13] Lina, Oktavia L., "Penggunaan Metode Lyapunov untuk Menguji Kestabilan Sistem Linier," *Jurnal Matematika UNAND*, Vol 3(2), 2014.
- [14] Sundari, Reni & Erna Apriliani, "Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan," *Jurnal Sains dan Seni ITS*, Vol 6(1), 2017.
- [15] Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, New York: Perseus Books Group, 1994.