Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 1(3) (2022), Pages 150-155
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder dan Ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey

Nahdliyatul Ummah*, Hairur Rahman, Dewi Ismiarti

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Email: nadyaummah9@gmail.com*, hairur@math.uin-malang.ac.id, dewi.ismiarti@yahoo.com

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman Ruang Morrey beserta ruang lemahnya yaitu perumuman ruang Morrey lemah. Penelitian ini berfokus pada pengaplikasian ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah berdasarkan karakteristik kedua ruang tersebut di himpunan bilangan riil berdimensi-n.

Kata kunci: Ketaksamaan Hölder; Ketaksamaan Minkowski; Perumuman Ruang Morrey; Syarat cukup

Abstract

The purpose of this research is to show the sufficient condition for Hölder inequality and Minkowski inequality in generalization of Morrey space and its weak space, namely generalization of weak Morrey space. This research focuses on the application of Hölder inequality and Minkowski inequality in generalization of Morrey space and generalization of weak Morrey space based on the characteristics of the two spaces in the set of n-dimensional real numbers.

Keywords: Hölder inequality; Minkowski inequality; Morrey Room Publications; Sufficient conditions

PENDAHULUAN

Perumuman ruang Morrey merupakan pengembangan dari ruang Morrey yang definisinya dituliskan oleh Nakai pada tahun 1994[8], dan penelitian tentang perumuman ruang Morrey banyak dilakukan (lihat [9,10]). . Ruang Morrey sendiri diperkenalkan oleh C.B Morrey pada tahun 1938[5]. Ketaksamaan Hölder merupakan salah satu ketaksamaan dasar yang diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan disempurnakan oleh Otto Hölder (1889) [4]. Sedangkan ketaksamaan Minkowsi merupakan ketaksamaan dasar yang merupakan pengembangan dari ketaksamaan segitiga yang diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman tahun 1907[6]. Karena perumuman ruang Morrey merupakan ruang fungsi, maka ketaksamaan yang digunakan adalah ketaksamaan Hölder integral dan ketaksamaan Minkowsi Integral atas fungsi kontinu [12]. Penelitian tentang pengaplikasian ketaksamaan Hölder banyak dijumpai, seperti penelitian yang dilakukan oleh Ifronika, dkk. [1], Pachpatte[12] dan Finner [14]. Sedangkan penelitian tentang pengaplikasian ketaksamaan Minkowski juga banyak dijumpai, seperti yang dilakukan oleh Wang dan Wu[7], Hutnik [11] dan Kalory [15].

Sebelumnya akan ditunjukkan terlebih dahulu definisi ruang Morrey dan ruang Morrey lemah, sebagaimana dasar dari perumuman ruang Morrey dan perumuman ruang Morrey lemah.

Definisi 2.1. [2] Misalkan $0 \le p \le q < \infty$. Untuk suatu fungsi f merupakan fungsi di $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ norm ruang Morrey didefinisikan sebagai

$$||f||_{\mathcal{M}^p_q} \coloneqq \sup_{a \in \mathbb{R}, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Submitted: 17 Desember 2021 Reviewed: 2 Januari 2022 Accepted: 20 Februari 2022
doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v1i3.14369

Dalam definisi di atas, $B(a,r)$ didefinisikan sebagai bola buka yang berpusat di $a \in \mathbb{R}$ dan berjari-jari $r > 0$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $p = q$. Sehingga dapat dilihat bahwa ruang Morrey merupakan perumuman dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.2. [3] Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$ ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan fungsi terukur f di $\mathbb{R}^n$ untuk $||f||_{w\mathcal{M}_q^p} < \infty$ yang memenuhi:

$$||f||_{w\mathcal{M}_q^p} = \underset{a\in\mathbb{R},\ \gamma>0}{sup} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gamma | x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dengan $|\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $\{x \in B(a,r) : |f(x) > \gamma\}$. Ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ bukan perluasan dari ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, namun ruang Lebesgue lemah $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $p = q$. Perhatikan bahwa $\|\cdot\|_{w\mathcal{M}}qp$ mendefinisikan quasi-norm.

Definisi 2.3. [1]Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\phi \in \mathcal{G}_p$, perumuman ruang Morrey $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi

$$||f||\mathcal{M}_\phi^p = \underset{a\in\mathbb{R},r>0}{sup} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Perumuman ruang Morrey $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan pengembangan dari ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $\phi(r) = r^{-\frac{d}{q}}, 1 \leq p \leq q < \infty$.

Definisi 2.4.[1] Misalkan $\phi \in \mathcal{G}_p$, perumuman ruang Morrey lemah $w\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur f di $\mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$||f||_{w\mathcal{M}_\phi^p} = \underset{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0}{sup} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}} \left(|\{x \in B(a,r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}} \right) < \infty.$$

Pada bab selanjutnya akan dibahas teorema hasil beserta dengan pembuktian teoremanya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 3.1 Misalkan $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ dan $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 \leq \phi$.

(2) $||fg||_{\mathcal{M}_\phi^p} \leq ||f||_{\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} ||g||_{\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in \mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in \mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Ambil f dan g fungsi kontinu di $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$

Diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 \leq \phi$

Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} ||fg||_{\mathcal{M}p,\phi} &= \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} |g(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \left(\frac{1}{\phi_1(r)} \times \frac{1}{\phi_2(r)} \right) \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)|^{p_1} |g(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx\times\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\times\frac{1}{\phi_2(r)}\right)\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\frac{1}{\phi_1(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx\right)$$
$$\times\frac{1}{\phi_2(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)$$

$$= \left\|f\right\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{\phi_1}}\left\|g\right\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{\phi_2}}$$

Teorema 3.2 Misalkan $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ dan $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1\times\phi_2\leq\phi$.

(2) $\left\|f+g\right\|_{\mathcal{M}^p_\phi}\leq\left\|f\right\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{\phi_1}}+\left\|g\right\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{\phi_2}}$ untuk semua $f\in\mathcal{M}^{p_1}_{\phi_1}(\mathbb{R}^n)$ dan $g\in\mathcal{M}^{p_2}_{\phi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Ambil f dan g fungsi kontinu di $\mathcal{M}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$

Diketahui $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1\times\phi_2\leq\phi$.

Kemudian berangkat dari definisi $\|f+g\|_{\mathcal{M}^p_\phi(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh

$$\left\|f+g\right\|_{\mathcal{M}^p_\phi} = \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)+g(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}+|g(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}+\frac{1}{\phi_2(r)}\right)\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}+|g(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\phi_2(r)}\right)\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx+\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\left(\frac{1}{\phi_1(r)}+\frac{1}{\phi_2(r)}\right)\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r>0}\frac{1}{\phi_1(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(x)|^{p_1}dx\right)$$
$$+\frac{1}{\phi_2(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|g(x)|^{p_2}dx\right)$$

$$= \left\|f\right\|_{\mathcal{M}^{p_1}_{\phi_1}}+\left\|g\right\|_{\mathcal{M}^{p_2}_{\phi_2}}$$

Teorema 3.3 Misalkan $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ dan $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$, maka pernyataan berikut ekuivalen:
(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 \le \phi$.
(2) $\left\|fg\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \le \left\|f\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} \left\|g\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti Ambil f dan g fungsi kontinu di $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$
Diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 \le \phi$.
Kemudian berangkat dari definisi $\|fg\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\left\|fg\right\|_{w\mathcal{M}_{p,\phi}} &= \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&= \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)||g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\le \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)\times\phi_2(r)\right)\left(|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}\times|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}\right)}\Big(|\{x\in B(a,r): |f(x)||g(x)|\\
&\qquad > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\Big)\\
&\le \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}\right)\left(\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}\Big(|\{x\in B(a,r): |f(x)||g(x)|\\
&\qquad > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\Big)\\
&\le \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_1(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p_1}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_1}}\right)\\
&\times \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_2(r)|B(a,b)|^{\frac{1}{p_2}}}\left(|\{x\in B(a,r): |g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p_2}}\right)\\
&= \left\|f\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}}\left\|g\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}
\end{aligned}
$$

Teorema 3.4 *Misalkan* $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ *dan* $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}p$*, maka pernyataan berikut equivalent:*

(1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ *dan* $\phi_1 \times \phi_2 \le \phi$.
(2) $\left\|f+g\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}} \le \left\|f\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}} + \left\|g\right\|_{w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}}$ *untuk semua* $f \in w\mathcal{M}_{\phi_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g \in w\mathcal{M}_{\phi_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n)$.

Bukti. Ambil f dan g fungsi kontinu di $w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)$
Diketahui $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le \frac{1}{p}$ dan $\phi_1 \times \phi_2 \le \phi$.
Kemudian berangkat dari definisi $\|f+g\|_{w\mathcal{M}_{\phi}^{p}(\mathbb{R}^n)}$ diperoleh:

$$
\left\|f+g\right\|_{w\mathcal{M}p,\phi} = \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)+g(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)+g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{(\phi_1(r)+\phi_2(r))\left(|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}+|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}\\
&\quad \left(|\{x\in B(a,r): |f(x)+g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\left(\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}\right)\left(\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}\right)}\\
&\quad \left(|\{x\in B(a,r): |f(x)+g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p}}\right)\\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R},r\,,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_1(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_1}}}\left(|\{x\in B(a,r): |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_1}}\right)\\
&\quad + \sup_{a\in\mathbb{R},r,\gamma>0} \frac{\gamma}{\phi_2(r)|B(a,r)|^{\frac{1}{p_2}}}\left(|\{x\in B(a,r): |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_2}}\right)\\
&= \|f\|_{w\mathcal{M}^{p_1}_{\phi_1}} + \|g\|_{w\mathcal{M}^{p_2}_{\phi_2}}
\end{aligned}
$$

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di Perumuman Ruang Morrey dan Perumuman Ruang Morrey lemah. Dari Teorema 3.1, Teorema 3.2, Teorema 3.3 dan Teorema 3.4 diperoleh bahwa $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leq\frac{1}{p}$ dan $\phi_1\times\phi_2\leq\phi$, dengan $1<p,p_1,p_2<\infty$ dan $\phi,\phi_1,\phi_2\in\mathcal{G}p$, merupakan syarat cukup ketaksamaan Hölder dan ketaksamaan Minkowski di kedua ruang tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ifronika, Idris, Masta, dan Gunawan. 2018. *Generalized Hölder's Inequality in Morrey Spaces*. Matematički Vesnik, 70 (4): 326-337.

[2] Sawano, Y., Fazio, dan Hakim. 2020. *Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operatos and PDE's Volume I.* India: CRC Press.

[3] Limanta, K. M. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*. Tugas Akhir Program Sarjana. Institut Teknologi Bandung.

[4] Li, Y., Gu, X., dan Zhao, J. 2018. The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Hölder's Inequality. *Symmetry*, 10.

[5] Grafakos, Loukas .2008 : Classical Fourier Analysis Second Edition,, Springer, New York.

[6] Hardy, J. E. 1934. *Inequalities.* London: Cambridge University Press

[7] Wu, H. W. 2016. *Anisotropic Herz-Morrey Spaces with Variable Exponents*. Khayyam Journal of Mathematics, 177-187.

[8] Ali, Vagif , Noi and Sawano. 2017. *Generalized Hardy–Morrey Spaces*. Journal of Analysis and its Applications, 36 : 129–149

[9] Nakamaru, Noi dan Sawano. 2016. *Generalized Morrey spaces and trace operator.* Department of Mathematics and Information Science, Tokyo Metropolitan University, 59 (2): 281–336.

[10] Mizuhara, Takahiro. 1990. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces* Department of Mathematics Yamagata University Yamagata, Japan.

[11] Hutnik, O. (2000). *Some integral inequalities of Holder and Minkowski.* Mathematics Subject Classication, 17-32.

[12] Pachpatte , B. G. 1998. *On Some Generalizations of Hardy's Integral Inequality* Department of Mathematics and Statistics, Marathwada University, 234, 15-30.
[13] Mudholkar, Govind AND Marshall. 1984. *An Extension of HGlder's Inequality.* University of Rochester, Rochester, New York,102, 435-44 1
[14] Finner Helmut. 1992. *A generalization of Holder's inequality and some probibality ineqqualities*. Universitat Trier. 20 (2): 1983-1901
[15] Karoly, oczky, Erwin, Deane, Gaoyong. 2012. *The log-Brunn–Minkowski inequality*. Communicated by the Managing Editors of AIM 231: 1978-1997