

Model Matematika Vibrasi Dawai Dikenai Massa yang Berjalan di Atasnya

Miftakul Janah*, Ari Kusumastuti

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
Malang

miftakuljanah24@gmail.com*, arikusumastuti@gmail.com,

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas tentang formulasi model matematika vibrasi dawai ketika dikenai massa. Terdapat dua variabel yang dihasilkan dari formulasi model tersebut, yaitu lendutan dawai $y(t)$ dan sudut dawai $\theta(t)$. Lendutan dawai $y(t)$ dan sudut dawai $\theta(t)$ dipengaruhi oleh gaya gesek, gaya tegangan, gaya pegas, dan gaya berat. Kemudian dilakukan identifikasi terhadap energi potensial dan kinetik yang bekerja sehingga diperoleh persamaan Lagrange dari lendutan dan sudut dawai tersebut. Berdasarkan langkah formulasi yang telah dijelaskan, model matematika yang diperoleh berupa persamaan diferensial biasa orde satu pangkat dua. Selanjutnya model dihitung secara numerik dengan diberikan nilai terhadap parameter yang terlibat. Sehingga diketahui bahwa dengan massa dawai 0.005 kg, 0.05 kg, 0.5 kg, massa dawai 0.075 kg, dan jari-jari benda 0.07 m, diketahui bahwa lendutan dawai $y(t)$ semakin besar jika massa benda semakin besar. Sedangkan sudut dawai $\theta(t)$ berada dalam keadaan setimbang sebelum dikenai massa dan mengalami vibrasi setelah dikenai massa.

Kata kunci : Konstruksi Model; Massa; Model Dawai; Model Matematika; Vibrasi Dawai.

Abstract

This study discusses the formulation of a mathematical model of string vibration when subjected to mass. There are two variables resulting from the formulation of the model, namely the deflection of the string $y(t)$ and the angle of the string $\theta(t)$. The deflection of the string $y(t)$ and the angle of the string $\theta(t)$ are affected by the friction force, tension force, spring force, and gravity. Then the identification of the working potential and kinetic energy is carried out to obtain the Lagrange equation of the deflection and angle of the string. Based on the formulation steps that have been described, the mathematical model obtained is an ordinary differential equation of the order of one to the power of two. Furthermore, the model is calculated numerically by assigning values to the parameters involved. It is known that with a string mass of 0.005 kg, 0.05 kg, 0.5 kg, a string mass of 0.075 kg, and an object radius of 0.07 m, it is known that the deflection of the string $y(t)$ is greater if the object's mass is greater. While the angle of the string $\theta(t)$ is in a state of equilibrium before being subjected to a mass and experiencing vibration after being subjected to a mass.

Keywords : Model Building; Mass; String Model; Mathematical Model; String Vibration.

PENDAHULUAN

Banyak fenomena alam di sekitar kita yang sulit dipahami secara langsung. Di antaranya adalah masalah getaran, gelombang, penyebaran penyakit dan lain-lain. Salah satu upaya untuk memahaminya adalah dengan membentuk suatu ukuran yang tepat dan dapat mewakili masalah tersebut dalam keadaan riilnya. Dalam matematika, istilah ini dikenal sebagai model matematika [1]. Model matematika dapat berupa abstraksi, penyederhanaan, atau konstruksi matematika terkait masalah-masalah dalam dunia nyata [2]. Model matematika dapat disajikan dalam bahasa matematika dengan tujuan agar masalah yang diteliti menjadi lebih sederhana untuk dianalisis lebih lanjut [3].

Salah satu masalah yang sulit dipahami secara langsung adalah masalah model vibrasi pada dawai yang dikenai massa. Suatu dawai ketika dikenai pembebanan massa akan mengakibatkan terjadinya peregangan dan lendutan dawai [4], sehingga muncul gaya-gaya dan energi-energi yang dapat diteliti. Untuk mengendalikan efek lendutan dawai tersebut, identifikasi gaya-gaya yang terlibat merupakan hal yang penting. Di antaranya adalah hukum Newton [5], hukum Stokes [6], dan hukum Hooke [7]. Kemudian juga melibatkan energi potensial berat (E_{p_w}) [8], energi potensial gesek (E_{p_k}) [9], energi potensial pegas (E_{p_p}) [10], energi potensial tegangan (E_{p_T}) [11], dan energi kinetik dawai (E_k) [12]. Variabel dan parameter yang terlibat adalah panjang dawai (l) yang menjadi jarak antara dua buah ujung dawai, massa dawai (m) yang didefinisikan sebagai perkalian antara massa jenis (ρ) dan satuan panjang dawai (l), modulus elastisitas dawai (E) yang menyatakan kelenturan dawai, dan besar simpangan dawai (u) yang menyatakan peregangan dawai. Dalam masalah vibrasi pada dawai tersebut diasumsikan bahwa dawai tersebut lentur, berada pada posisi kesetimbangan dan dikenai massa tunggal m yang didorong dari salah satu ujung.

Beberapa penelitian mengenai vibrasi dawai telah dilakukan, di antaranya oleh Ohene [13] yang membahas model vibrasi dawai pada jembatan gantung Adomi di Ghana. Dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde empat, diketahui bahwa besarnya konstanta pegas dapat mempengaruhi kestabilan sudut defleksi. Rurin [14] meneliti tentang gerak vertikal dawai yang dipengaruhi gaya peredam. Setelah dianalisis secara dinamik, gerak vertikal dawai tersebut memiliki amplitudo yang bergerak ke arah tetap menuju stabil. Mufid dan Kusumastuti [15] melakukan penelitian mengenai gerakan dua buah dawai yang menggantung pada sebuah balok. Dengan menggunakan analisis dinamik, dapat diketahui pengaruh eksternal terhadap kestabilan dan perilaku sudut defleksi. Berdasarkan nilai eigennya, terdapat tiga solusi dari hasil analisis pembebanan massa pada balok yang digantung. Kebaruan penelitian ini adalah pada konstruksi model matematika vibrasi dawai dengan gaya dorong. Formulasi ini dilakukan sebagaimana langkah di atas. Jika model sudah didapatkan, langkah selanjutnya adalah validasi model. Validasi ini bertujuan untuk melihat tingkat signifikansi antara model dengan keadaan sesungguhnya. Jika model dirasa belum signifikan, maka dilakukan uji ulang validasi terhadap model.

Penelitian ini difokuskan pada formulasi model matematika vibrasi pada dawai dengan massa yang berjalan di atasnya. Dari formulasi tersebut akan didapatkan model lendutan $y(t)$ dan sudut lendutan $\theta(t)$, kemudian dilakukan plot solusi terhadap model. Penelitian ini menjadi penting karena pengetahuan tentang besar lendutan $y(t)$ dan sudut lendutan $\theta(t)$ untuk berbagai macam dawai dari bahan yang berbeda-beda dapat diketahui dari hasil plot grafik. Selanjutnya plot grafik ini akan memberikan saran yang berguna untuk teknologi berbasis dawai dengan massa yang berjalan di atasnya.

METODE

Langkah-langkah yang dilakukan dari penelitian ini adalah

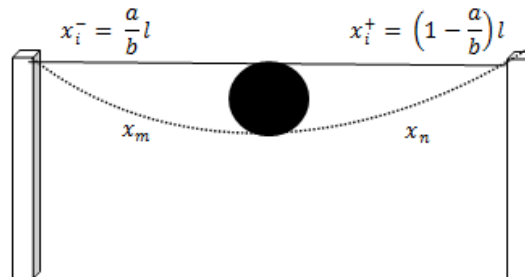
1. Memformulasi model matematika vibrasi pada dawai.
 - a. Mendefinisikan masalah vibrasi dawai dengan massa berjalan di atasnya.
 - b. Membangun asumsi dari masalah vibrasi dawai dengan massa berjalan di atasnya.
 - c. Mengidentifikasi gaya-gaya yang terjadi.
 - d. Memformulasikan semua energi potensial yang terjadi dari gaya-gaya yang mempengaruhinya.
 - e. Memformulasikan energi kinetik.
 - f. Menyusun persamaan Lagrange.
 - g. Menurunkan persamaan Lagrange terhadap $y(t)$ dan $\theta(t)$ sehingga diperoleh model matematika untuk perubahan $y(t)$ dan $\theta(t)$.
2. Plot dilakukan dengan metode Runge Kutta orde 4 untuk membangkitkan profil grafik $y(t)$ dan $\theta(t)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Formulasi Model Matematika Vibrasi pada Dawai

1.1 Identifikasi Masalah

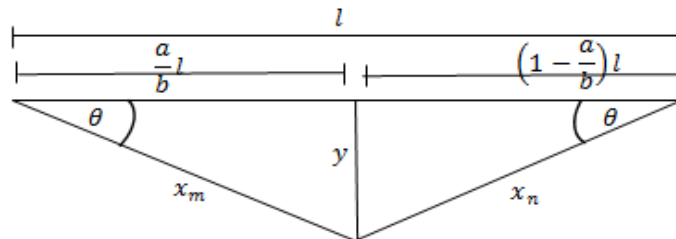
Secara umum, ilustrasi vibrasi dawai akibat dikenai massa yang meluncur di atasnya adalah sebagai berikut.



Gambar 1. Ilustrasi Vibrasi Dawai

Berdasarkan ilustrasi vibrasi dawai pada Gambar 1 tersebut, dawai diikat pada dua pengait yang ketinggiannya adalah a, b suatu bilangan bulat positif, l adalah panjang dawai, dan x_m, x_n adalah kemuluran dawai di sisi kiri dan sisi kanan secara berturut-turut akibat sudut θ . Dawai yang mengalami vibrasi adalah dawai yang lentur. Tingkat keelastisan atau kelenturan dari dawai ini termuat dalam modulus elastisitas (E) sebesar $1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$.

Dawai yang digunakan dalam penelitian ini adalah dawai dikenai massa dengan gaya dorong di sepanjang dawai. Kondisi dawai yang dimaksud dapat dilihat pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Partisi dawai ketika Dikenai Massa

Gambar 2 menunjukkan bahwa terdapat peregangan dawai (e) akibat pembebanan massa. Karena diasumsikan dawai tersebut lentur, maka terjadilah lendutan. Lendutan ini menyebabkan adanya sudut dawai (θ). Selain sudut dawai, terdapat juga simpangan (u), kemiringan dawai di sisi kiri (x_m), dan kemiringan dawai di sisi kanan (x_n) akibat lendutan tersebut.

1.2 Asumsi Dasar

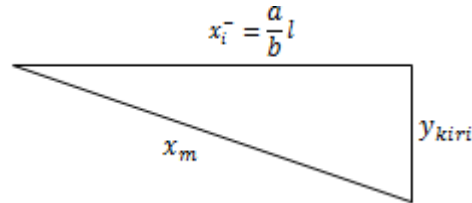
Asumsi-asumsi dasar yang digunakan untuk memformulasikan model vibrasi dawai yang dikenai massa dengan dorong adalah sebagai berikut.

- Dawai yang diteliti adalah dawai elastis yang memiliki batas elastisitas sebesar $1 \times 10^7 \text{ N/m}^2$.
- Massa yang meluncur adalah massa yang mendapat gaya dorong di sepanjang dawai yang tegang tetapi lentur.
- Dawai yang dikenai massa mengakibatkan lendutan dawai sehingga membentuk simpangan dan sudut dawai.
- Terjadi gaya gesek antara dawai dengan massa, dawai dengan udara, dan massa dengan udara. Gesekan-gesekan tersebut yang memperlambat laju vibrasi dawai.
- Vibrasi dawai berupa gerak bolak balik di sepanjang dawai yang mendapat faktor peredam, sehingga dawai akan kembali pada posisi setimbang.

1.3 Identifikasi Gaya dan Formulasi Energi Potensial

a. Peregangan (e) pada Dawai

Dawai yang dikenai massa menyebabkan terjadinya peregangan (e). Peregangan tersebut terjadi di sisi kiri dawai (e^-) dan sisi kanan dawai (e^+). Berdasarkan Gambar 2 dapat dilakukan partisi pada sisi kiri dawai dan kanan dawai untuk mengetahui masing-masing peregangannya.



Gambar 3. Peregangan di Sisi Kiri

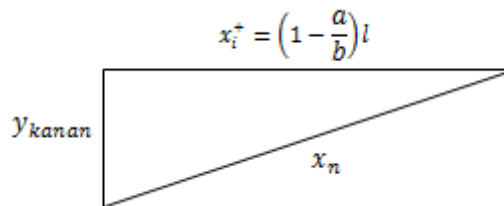
Berdasarkan Gambar 3, kemiringan simpangan di sisi kiri (x_m) dapat diketahui dengan menggunakan kaidah *Pythagoras*.

$$x_m = \frac{a}{b}l\sqrt{(1 + (\tan \theta)^2)},$$

sehingga dapat diketahui besar pertambahan panjang di sisi kiri (x^-) sebagai berikut

$$x^- = \frac{a}{b}l\left(\sqrt{1 + (\tan \theta)^2} - 1\right). \quad (1)$$

Kemiringan simpangan di sisi kanan (x_n) adalah



Gambar 4. Peregangan di Sisi Kanan

Sedangkan kemiringan di sisi kanan (x^+) sebagai berikut

$$x_m = \frac{a}{b}l\sqrt{(1 + (\tan \theta)^2)},$$

sehingga dapat diketahui besar pertambahan panjang di sisi kiri (x^-) sebagai berikut

$$x^+ = \left(1 - \frac{a}{b}\right)l\left(\sqrt{1 + (\tan \theta)^2} - 1\right). \quad (2)$$

Setelah besar pertambahan panjang di sisi kiri (x^-) pada persamaan (1) dan sisi kanan (x^+) pada persamaan (2) diketahui, maka besar peregangan di sisi kiri (e^-) dan sisi kanan (e^+) adalah

$$e^- = \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2}}{\frac{a}{b}l} - 1\right) \quad (3)$$

dan

$$e^+ = \left(\frac{\sqrt{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2}}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)l} - 1\right). \quad (4)$$

1.4 Identifikasi Gaya dan Energi Potensial

a. Gaya Gesek dan Energi Potensialnya

Gaya gesek (F_k) terbagi menjadi dua, yaitu gesekan antara dawai dengan benda dan gesekan antara benda dengan udara. Pertama, gaya gesek antara dawai dengan benda (F_{k1}) didefinisikan dengan

$$F_{k1} = \mu_k N,$$

sedangkan gaya gesek antara benda dengan udara (F_{k2}) didefinisikan dengan

$$F_{k2} = k\eta v.$$

Sehingga energi potensial gaya gesek (Ep_k)

$$Ep_k = F_r + (\mu_k \cdot (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k\eta v) \frac{a}{b} l \sqrt{(1 + (\tan \theta)^2)} = m \cdot a. \quad (5)$$

b. Gaya Tegangan dan Energi Potensialnya

Gaya tegangan yang terjadi pada dawai dikenai massa didefinisikan dengan

$$F_T = E \times e \times A.$$

Gaya tegangan yang terjadi dibagi menjadi dua, yaitu gaya tegang di sisi kiri (F_{T-}) dan gaya tegang di sisi kanan (F_{T+}),

$$F_{T-} = E \times e^- \times A$$

dan

$$F_{T+} = E \times e^+ \times A.$$

Sehingga energi potensial tegangan totalnya adalah

$$Ep_{T \text{ tot}} = -\frac{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)l} EA + \sqrt{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2} EA + \frac{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2}{\frac{a}{b}l} EA - \sqrt{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2} EA. \quad (6)$$

c. Gaya berat dan Energi Potensialnya

Gaya berat (F_w) yang terjadi pada dawai dikenai massa didefinisikan dengan

$$F_w = m \times g \times \sin \theta$$

Karena gaya berat berada pada lintasan simpangan. Maka dalam menentukan energi potensial berat (Ep_w) melibatkan simpangan (y).

$$Ep_w = -m_b \cdot g \sin \theta \left(\frac{a}{b}l\right) \tan \theta. \quad (7)$$

d. Gaya Pegas dan Energi Potensialnya

Gaya pegas (F_p) yang terjadi pada dawai dikenai massa didefinisikan dengan

$$F_p = -k_p y$$

di mana k_p adalah koefisien gaya pegas dan y adalah simpangan dawai. Karena gaya pegas berada pada lintasan yang sama dengan gaya berat, maka energi potensialnya adalah

$$Ep_p = \frac{1}{2} k_p y^2. \quad (8)$$

e. Energi Potensial Total

Energi potensial model (Ep_M) adalah jumlahan dari seluruh energi potensial yang telah diidentifikasi. Dengan demikian, energi potensial model (Ep_M) adalah jumlahan dari persamaan (5), (6), (7), dan (8). Dikarenakan terjadi perubahan kecepatan selama massa berjalan di atas dawai, maka total dari seluruh energi potensialnya menjadi

$$\begin{aligned}
 Ep_M &= (-F_r + (\mu_k \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta + k\eta v) - m g \cos \theta) \frac{a}{b} l \sqrt{(1 + (\tan \theta)^2)} \\
 &\quad - \frac{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)l} EA + \sqrt{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2} EA + \frac{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2}{\frac{a}{b}l} EA \\
 &\quad - \sqrt{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2} EA + k_p y - m g \sin \theta \left(\frac{a}{b}l\right) \tan \theta - (m_b + m_d) \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

1.5 Energi Kinetik

Energi kinetik yang terjadi pada dawai yang dikenai massa ada dua, yaitu energi kinetik pada dawai dan energi kinetik pada benda. Energi kinetik dawai (EK_d) didefinisikan dengan

$$EK_d = \frac{1}{2} m_d \left(\frac{du}{dt}\right)^2, \tag{10}$$

sedangkan energi kinetik benda (EK_b) didefinisikan dengan

$$EK_b = \frac{1}{4} m_b r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{11}$$

Berdasarkan persamaan (10) dan (11), maka energi kinetik totalnya adalah

$$EK_M = \frac{1}{2} m_d \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} m_b r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \tag{12}$$

1.6 Menyusun Persamaan Lagrange

Persamaan *Lagrange* pada vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 L &= EK_M - EP_M \\
 L &= \frac{1}{2} \left(m_d \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4} m_b r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) + F_r \\
 &\quad + (\mu_k \cdot (m_b + m_d) \cdot g \cdot \sin \theta + k\eta v) \frac{a}{b} l \sqrt{(1 + (\tan \theta)^2)} \\
 &\quad - \frac{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)l} EA + \sqrt{\left(\left(1 - \frac{a}{b}\right)l\right)^2 + y^2} EA + \frac{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2}{\frac{a}{b}l} EA \\
 &\quad - \sqrt{\left(\frac{a}{b}l\right)^2 + y^2} EA - \frac{1}{2} k_p y^2 - m_b \cdot g \sin \theta \left(\frac{a}{b}l\right) \tan \theta - (m_b + m_d) \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

1.7 Menurunkan Persamaan Lagrange

Gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange* yang memenuhi kaidah berikut

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{dL}{dy} = 0$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d \left(\frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$$

Setelah persamaan (13) diturunkan memenuhi kaidah *Lagrange* tersebut, didapatkan dua model matematika vibrasi dawai yaitu model lendutan dawai $y(t)$ dan sudut dawai $\theta(t)$.

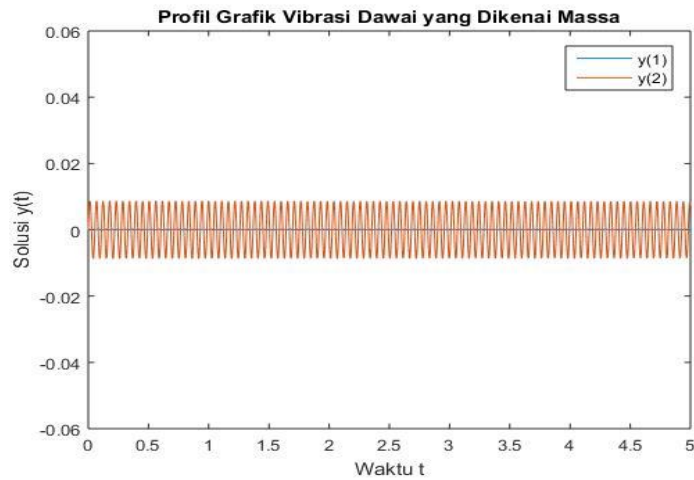
$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(- \frac{2EA \left(\left(\left(1 - \frac{a}{b} \right) l \right)^2 + y^2 \right)}{\left(1 - \frac{a}{b} \right) l} + \frac{2EA \left(\left(\frac{a}{b} l \right)^2 + y^2 \right)}{\frac{a}{b} l} + \frac{EA}{\sqrt{\left(\left(1 - \frac{a}{b} \right) l \right)^2 + y^2}} - \frac{EA}{\sqrt{\left(\frac{a}{b} l \right)^2 + y^2}} - k_p \right) \frac{y}{(2m_d + m_b)} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 = & \frac{1}{2} m_b r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \\ & - \left(\mu_k \cdot (m_b + m_d) \cdot g \right. \\ & \cdot \frac{a}{b} l \left(\cos \theta \sqrt{1 + (\tan \theta)^2} + \sin \theta \tan \theta \sqrt{1 + (\tan \theta)^2} \right) \\ & - k \eta v \frac{a}{b} l \sqrt{1 + (\tan \theta)^2} \tan \theta \\ & \left. + m_b \cdot g \left(\frac{a}{b} l \right) (\cos \theta \tan \theta + \sin \theta (1 + (\tan \theta)^2)) \right) \quad (15) \end{aligned}$$

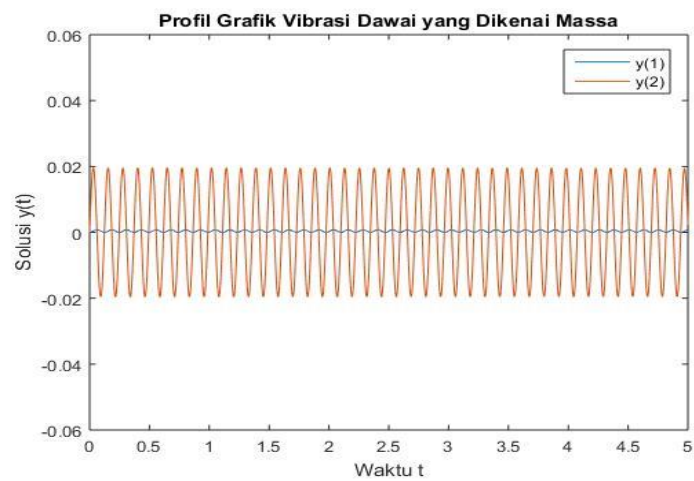
2. Plot Solusi Model Matematika Vibrasi Dawai

2.1 Plot lendutan dawai $y(t)$

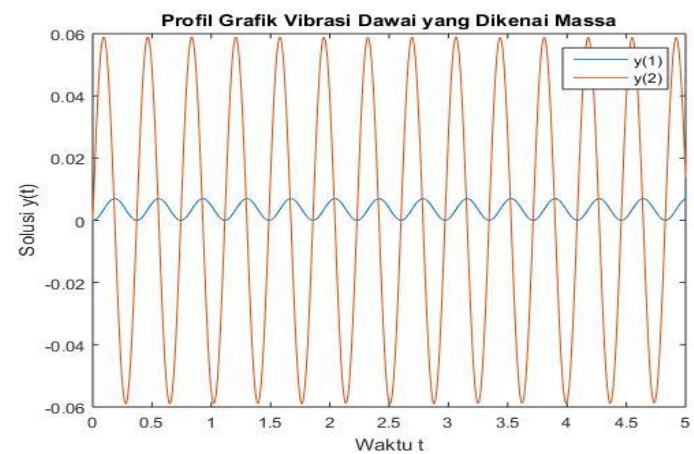
Setelah dilakukan plot solusi terhadap model lendutan dawai pada persamaan (14), diperoleh grafik lendutan $y(t)$ sebagai berikut



Gambar 5. Plot Grafik Lentutan Dawai $y(t)$ ketika $m_b = 0.005$



Gambar 6. Plot Grafik Lentutan Dawai $y(t)$ ketika $m_b = 0.05$

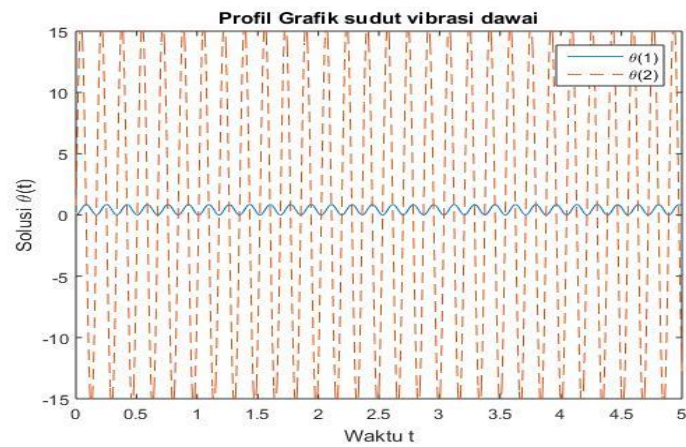


Gambar 7. Plot Grafik Lentutan Dawai $y(t)$ ketika $m_b = 0.5$

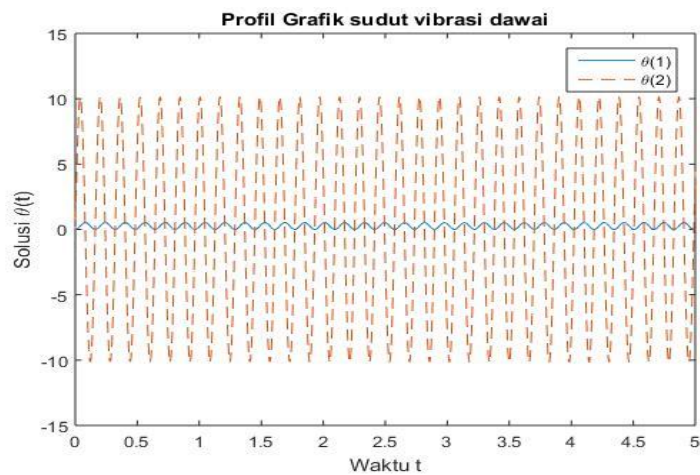
Pada ketiga gambar tersebut diketahui bahwa kondisi dawai sebelum dikenai massa adalah setimbang atau $y(t) = 0$. Setelah dikenai massa benda (m_b) sebesar 0.005 kg , 0.05 kg , 0.5 kg , dengan jari-jari benda $r = 0.07 \text{ m}$ dan massa dawai $m_d = 0.075 \text{ kg}$, nilai lentutan dawai $y(t)$ berturut-turut adalah 0.008 m , 0.02 m , dan 0.06 m .

2.2 Plot sudut dawai $\theta(t)$

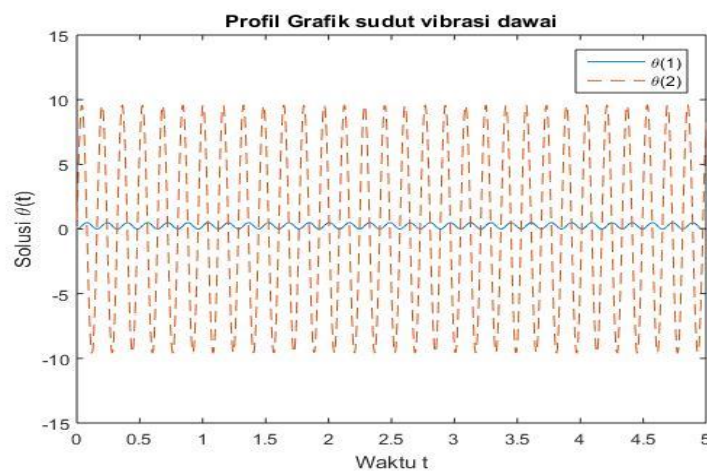
Setelah dilakukan plot solusi terhadap model sudut dawai pada persamaan (15), diperoleh grafik lendutan $\theta(t)$ sebagai berikut



Gambar 8. Plot Grafik Sudut Dawai $\theta(t)$ ketika $m_b = 0.005$



Gambar 9. Plot Grafik Sudut Dawai $\theta(t)$ ketika $m_b = 0.05$



Gambar 10. Plot Grafik Sudut Dawai $\theta(t)$ ketika $m_b = 0.5$

Pada ketiga gambar tersebut diketahui bahwa kondisi dawai sebelum dikenai massa adalah setimbang atau $\theta(t) = 0$. Setelah dikenai massa benda (m_b) sebesar 0.005 kg, 0.05 kg, 0.5 kg, dengan jari-jari benda $r = 0.07$ m dan massa dawai $m_d = 0.075$ kg, nilai sudut dawai $\theta(t)$ berturut-turut adalah 15°, 10°, dan 9°.

KESIMPULAN

Model matematika vibrasi dawai dikenai massa dengan gaya dorong berupa persamaan diferensial orde satu pangkat dua sebagaimana pada persamaan (14) dan (15). Setelah dilakukan plot solusi model lendutan dawai $y(t)$ dan sudut dawai $\theta(t)$ dengan massa dawai (m_d) dan jari-jari benda (r) yang sama untuk massa benda (m_b) yang berbeda, diketahui bahwa lendutan dawai semakin besar jika massa benda semakin besar. Sedangkan sudut dawai dalam keadaan setimbang sebelum dikenai massa dan mengalami vibrasi setelah dikenai massa.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : FMIPA Universitas Diponegoro.
- [2] Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling*. Malang : UIN Maliki Press.
- [3] Zadrak Ndi, Meksianis. 2018. *Pemodelan Matematika*. Yogyakarta : CV Budi Utama.
- [4] D. Young, Hugh, dkk. 2000. *Fisika Universitas Jilid II*. Jakarta : Erlangga.
- [5] Utomo, Pristiadi. 2007. *Fisika Interaktif untuk SMA/MA*. Jakarta : Azka Press.
- [6] Arifudin, M Achya. 2007. *Fisika untuk SMA Kelas XII*. Jakarta : Interplus.
- [7] Yaz, M. Ali. 2007. *Fisika SMA Kelas XI*. Jakarta : Quadra.
- [8] Istiyono, Edi. 2009. *Fisika 2 SMP Kelas VIII*. Jakarta : Quadra.
- [9] Sutresna, Nana, dkk. 2006. *Ilmu Pengetahuan Alam untuk Kelas VIII*. Bandung : Grafindo Media Pratama.
- [10] Kamajaya. 2007. *Ilmu Pengetahuan Alam untuk Kelas VIII*. Bandung : Grafindo Media Pratama.
- [11] Halliday, D., dkk. 2010. *Fisika Dasar Edisi Ketujuh, Jilid II*. Jakarta : Erlangga.
- [12] Kanginan, Marthen. 2006. *Fisika untuk SMA Kelas XI*. Jakarta : Erlangga.
- [13] Ohene. K. R. 2012. *A mathematical model of a suspension bridge-case study : Adomi bridge, Atimpoku, Ghana*. Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology, and Innovation. Vol 1(3). 047-062.
- [14] Anista, Rurin. 2015. *Analisis gerak vertikal dawai*. Cauchy. 3(4), 188.
- [15] Mufid, I., & Kusumastuti, A. 2015. *Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai*. Cauchy, 3(4), 188.