

## Metode Backward Time Central Space dalam Penyelesaian Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik

Atik Damayanti\*, Ari Kusumastuti, Nurul A. Hidayati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

damayantiatik2@gmail.com\*, arikusumastuti@gmail.com,  
nurulangraini130809@gmail.com

### Abstrak

Penelitian ini dilakukan untuk memperoleh solusi numerik dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik. Model matematika ini merupakan representasi dari fenomena vibrasi dawai pada alat musik petik yang dikenai simpangan. Model tersebut dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017) dan berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah metode BTCS (*Backward Time Central Space*). Solusi numerik diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut, 1). Melakukan diskritisasi model matematika, serta mendiskritisasi kondisi awal dan kondisi batas. 2). Melakukan analisis kestabilan solusi numerik untuk mengetahui syarat kestabilan solusi dan melakukan analisis konsistensi untuk mengetahui kekonvergenan solusi numerik yang diperoleh. 3). Mensimulasikan solusi numerik dan melakukan interpretasi grafik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik stabil tanpa syarat dan memiliki orde  $error$  ( $\Delta x^2, \Delta t^3$ ).

**Kata Kunci:** Vibrasi Dawai Alat Musik Petik; Simulasi Numerik; Simpangan Dawai; Metode Implisit; *Backward Time Central Space*; Solusi  $u(x; t)$

### Abstract

This research was conducted to obtain a numerical solution of the mathematical model of string vibration on stringed instruments. This mathematical model is a representation of the phenomenon of string vibration on a stringed instrument subject to deviation. The model was constructed by Kusumastuti, et al (2017) and is in the form of a second-order partial differential equation. The method used in completing this research is the BTCS (*Backward Time Central Space*) method. The numerical solution is obtained by the following steps, 1). Discretize mathematical models, as well as discretize initial conditions and boundary conditions. 2). Performing stability analysis of numerical solutions to determine the terms of solution stability and conducting consistency analysis as a condition of the convergence of the obtained numerical solutions. 3). Simulate numerical solutions and perform graph interpretations. The results show that the numerical solution of the mathematical model of string vibration on stringed instruments is unconditionally stable and has an error order ( $\Delta x^2, \Delta t^3$ ).

**Keywords:** String Vibration stringed instrument; Numerical Simulate; String Deviation; Implicit Method; *Backward Time Central Space*;  $u(x; t)$  Solution

## PENDAHULUAN

Fokus penelitian ini adalah melakukan interpretasi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik pada penelitian Kusumastuti pada tahun 2017 [1]. Interpretasi model bertujuan untuk melihat seberapa realistis model matematika yang telah dikonstruksi terhadap kondisi riil nya [2]. Salah satu cara adalah dengan menggunakan interpretasi dari plot grafik solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik yang dimaksud [3]. Simulasi ini dilakukan dengan

mempertimbangkan hasil grafik model dengan analisis kestabilan [4]. Solusi numerik pada penelitian ini menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS). Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Agus Purwanto pada tahun 2006, yaitu analisis sinyal suara yang dihasilkan oleh alat musik gitar semi-akustik [5]. Dalam penelitian ini, untuk mendapatkan komponen-komponen penyusun sinyal suara seperti amplitudo, rasio amplitudo, frekuensi fundamental dan frekuensi harmonik, serta memperoleh spektrum sinyal suara, digunakan program *SOUND FORGE* sebagai alat perekam suara yang dihasilkan dawai gitar yang dipetik, seperti yang dilakukan Gulla [6]. Data suara hasil perekaman tersebut kemudian dianalisis dengan menerapkan FFT. Setelah menambahkan faktor peredam pada model sinyal suara yang telah dikonstruksi berdasarkan komponen-komponen yang telah didapatkan, diperoleh hasil suara hampir sama dengan suara asli dari gitar yang dipetik.

Penelitian sebelumnya mengenai vibrasi dawai alat musik petik juga pernah dilakukan oleh Kusumastuti, dkk pada tahun 2017 yang meneliti mengenai konstruksi model matematika vibrasi dawai pada alat musik tradisional Sasando. Proses dalam konstruksi model matematika vibrasi dawai Sasando ini memanfaatkan persamaan *Lagrange*, dan berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{1}{2} c^2 + 2 \frac{c^2}{l} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Model tersebut kemudian dicari solusinya secara analitik [7] dan secara numerik [8]. Analisis solusi numerik dilakukan dengan metode *Central Time Central Space* (CTCS) dihasilkan bahwa solusi stabil tetapi dengan syarat  $\Delta t \leq 0,1$ .

Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut, penelitian ini dimaksudkan untuk melakukan analisis numerik menggunakan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) untuk memperbaiki performa *Central Time Central Space* (CTCS) dari penelitian sebelumnya. Manfaat dari penelitian ini yaitu untuk memprediksi besar simpangan maksimal yang diberikan pada dawai alat musik petik sehingga diperoleh nada tanpa *noise* akibat vibrasi tanpa osilasi yang besar.

## METODE

### Langkah-langkah penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik menggunakan metode implisit [9], meliputi:
  - a) Melakukan diskritisasi model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
  - b) Membentuk diagram stensil skema numerik BTCS dari model vibrasi dawai pada alat musik petik.
  - c) Melakukan diskritisasi kondisi awal serta kondisi batas dengan metode *Backward Time Central Space* (BTCS).
2. Analisis kestabilan dan analisis orde *error* metode implisit dari model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik [10], meliputi:
  - a) Menganalisis kestabilan dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) untuk gerak dawai pada alat musik petik menggunakan metode *von Neumann*.
  - b) Menentukan analisis orde *error* dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) dengan menentukan nilai limit dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) ketika  $\Delta t \rightarrow 0$ .
  - c) Melakukan verifikasi kestabilan metode *Backward Time Central Space* (BTCS) menggunakan  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  dari poin 2b).

- d) Melakukan verifikasi analisis orde *error* dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) dengan menentukan nilai limit dari metode *Backward Time Central Space* (BTCS) ketika  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Model Diskrit Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik

Berdasarkan model (1) pada penelitian Kusumastuti,dkk (2017) dengan:

Dengan kondisi awal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) && \text{untuk setiap} && 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{untuk setiap} && 0 < x < l \end{aligned}$$

Dan kondisi batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 && \text{untuk setiap} && t > 0 \\ u(l, t) &= 0 && \text{untuk setiap} && t > 0 \end{aligned}$$

akan di diskritisasi dengan menggunakan metode *Backward Time Central Space* dan model diskrit tersebut akan dilakukan analisis kestabilan dengan menggunakan kestabilan *von-Neumann* [11].

Sistem persamaan (1) di diskritisasi menggunakan metode *Backward Time Central Space* sebagai berikut[12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{\Delta t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \tag{2}$$

Sehingga diperoleh hasil diskritisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n \\ &- \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} \\ &+ \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} \\ &+ \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Kelompokkan waktu  $n + 1$  di ruas kiri sedangkan waktu  $n$  dan  $n - 1$  di ruas kanan.

Sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} - \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} = \\ \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} \end{aligned}$$

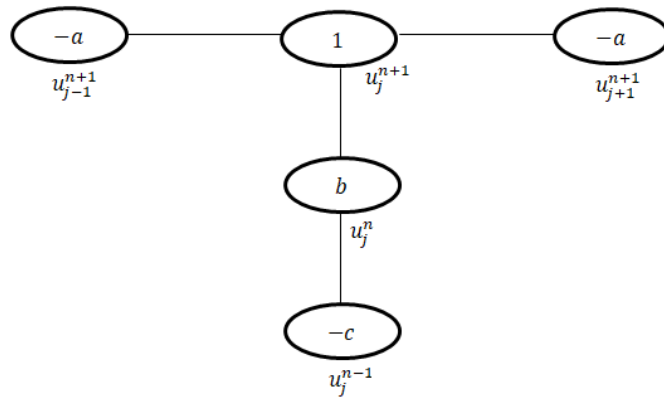
Misalkan

$$\begin{aligned} \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) &= a \\ \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) &= b \\ \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) &= c \end{aligned}$$

Sehingga persamaan tersebut menjadi

$$u_j^{n+1} - (a)u_{j+1}^{n+1} - (a)u_{j-1}^{n+1} = (b)u_j^n - (c)u_j^{n-1} \tag{4}$$

Diagram stensil dari skema numerik pada persamaan (4) dengan metode implisit BTCS adalah sebagai berikut:



Gambar 1 Diagram Stensil BTCS

Nilai yang sudah diketahui sebelumnya digunakan untuk mencari nilai yang belum diketahui. Kemudian substitusi syarat awal dan syarat batas untuk mencari nilai  $u$  yang belum diketahui, [13] sehingga diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut:

Untuk  $j = 1$  diperoleh:

$$u_1^{0+1} - (a)u_{1+1}^{0+1} - (a)u_{1-1}^{0+1} = (b)u_1^0 - (c)u_1^{0-1}$$

$$u_1^1 - (a)u_2^1 - (a)u_0^1 = (b)u_1^0 - (c)u_1^{-1}$$

Namun terdapat masalah baru yaitu nilai  $(a)u_0^1$  merupakan nilai yang sudah diketahui pada batas kiri, dan  $(b)u_1^0, (c)u_1^{-1}$  juga merupakan nilai yang sudah diketahui pada kondisi awal, maka hasil iterasi pada persamaan tersebut menjadi:

$$u_1^1 - (a)u_2^1 = (b)u_1^0 - (c)u_1^{-1} + (a)u_0^1$$

$$u_1^1 - (a)u_2^1 = (b - c)u_1^0 + (a)u_0^1$$

Untuk  $j = 2$  diperoleh:

$$u_2^1 - (a)u_3^1 - (a)u_1^1 = (b)u_2^0 - (c)u_2^{-1}$$

$$u_2^1 - (a)u_3^1 - (a)u_1^1 = (b - c)u_2^0$$

Untuk  $j = 3$  diperoleh:

$$u_3^1 - (a)u_4^1 - (a)u_2^1 = (b)u_3^0 - (c)u_3^{-1}$$

$$u_3^1 - (a)u_4^1 - (a)u_2^1 = (b - c)u_3^0$$

Untuk  $j = 4$  diperoleh:

$$u_4^1 - (a)u_5^1 - (a)u_3^1 = (b)u_4^0 - (c)u_4^{-1}$$

$$u_4^1 - (a)u_5^1 - (a)u_3^1 = (b - c)u_4^0$$

Untuk  $j = 5$  diperoleh:

$$u_5^1 - (a)u_6^1 - (a)u_4^1 = (b)u_5^0 - (c)u_5^{-1}$$

$$u_5^1 - (a)u_6^1 - (a)u_4^1 = (b - c)u_5^0$$

Untuk  $j = N_x$  diperoleh:

$$u_{N_x}^{n+1} - (a)u_{N_x+1}^{n+1} - (a)u_{N_x-1}^{n+1} = (b)u_{N_x}^n - (c)u_{N_x}^{n-1}$$

$$u_{N_x}^{n+1} - (a)u_{N_x+1}^{n+1} - (a)u_{N_x-1}^{n+1} = (b - c)u_{N_x}^n$$

Persamaan-persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk perkalian matriks, sehingga menjadi:

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & -a & 1 & -a & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & -a & 1 & -a & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ \vdots \\ u_{N_x+1}^1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (b-c)u_1^0 + (a)u_0^1 \\ (b-c)u_2^0 \\ (b-c)u_3^0 \\ (b-c)u_4^0 \\ (b-c)u_5^0 \\ \vdots \\ (b-c)u_{N_x}^0 \end{bmatrix}$$

Kedua ruas matriks di atas dikalikan dengan  $A^{-1}$ , sehingga menjadi

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

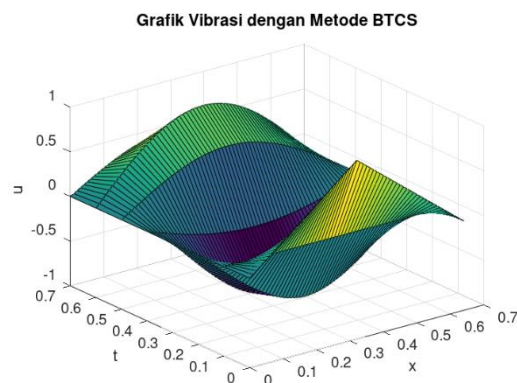
Karena  $A^{-1}A = \mathbf{1}$ , maka nilai matrik  $X$  dapat dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$X = A^{-1}B$$

Dalam menyelesaikan persamaan tersebut, maka digunakan bantuan *software* OCTAVE untuk memudahkan perhitungannya.

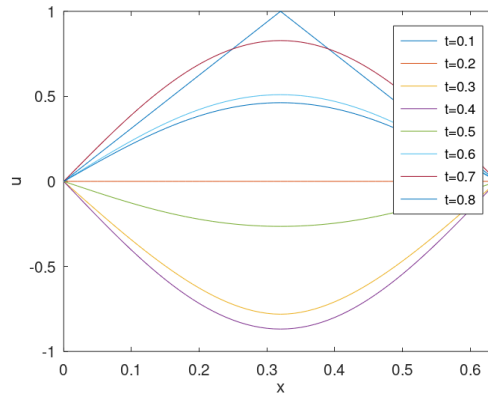
## 2. Simulasi dan interpretasi grafik

Simulasi grafik untuk solusi numerik pada persamaan (3) dilakukan dengan menggunakan *software* OCTAVE. Diambil  $\Delta t = 0.1$ , sehingga menghasilkan *output* grafik yaitu:



**Gambar 2** Hasil Simulasi Model Matematika Vibrasi Dawai pada Alat Musik Petik

Gambar 2 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi  $u(x, t)$  yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai pada alat musik petik yang berubah terhadap nilai  $x$  dan waktu  $t$  pada interval  $x = \{x|0 \leq x \leq 0.64\}$  dan  $t = \{t|0 \leq t \leq 0,7\}$ . Terlihat semakin lama, pergerakan solusi  $u(x, t)$  menuju posisi semula  $(0,0)$ . Tampilan grafik selanjutnya sebagai berikut



Gambar 3 Grafik Simpangan Dawai  $u(x, t)$

Gambar 3 menunjukkan hasil simulasi untuk solusi  $u(x, t)$  yang menggambarkan pergerakan simpangan dawai Sasando yang berubah terhadap nilai  $x$  pada interval  $x = \{x|0 \leq x \leq 0.64\}$ . Terlihat terjadi gerak bolak balik atau gerak osilasi yang disertai dengan perubahan pergerakan simpangan dawai  $u(x, t)$  yang semakin kecil menuju titik  $(0,0)$ .

Dari kedua hasil simulasi ini, dapat kita simpulkan perilaku gerak dawai pada alat musik petik semakin lama bergerak kembali ke keadaan semula yakni pada posisi semula dawai. Hal ini sesuai dengan keadaan riil untuk gerak dawai pada alat musik petik dalam dunia nyata yakni gerak dawai tidak berlangsung selama-lamanya artinya dapat berhenti pada suatu waktu tertentu. Sehingga dapat dikatakan metode BTCS dalam penyelesaian model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik yang diperoleh sudah bersifat *reliable* dan model yang telah dikonstruksi pada penelitian sebelumnya sudah valid.

### 3.1 Analisis Keabsahan Solusi Metode Implisit

#### 3.1.1 Analisis Kestabilan Metode Implisit BTCS

Langkah selanjutnya yaitu melakukan analisis kestabilan. Hal ini bertujuan untuk mengetahui metode BTCS stabil atau tidak stabil [14]. Dalam penelitian ini akan dilakukan analisis kestabilan *von Neumann* dengan cara menyubstitusikan  $u_j^n = \lambda^n e^{ikjh}, \forall i = \sqrt{-1}$  [15] pada persamaan beda (3), sehingga diperoleh

$$\lambda^{n+1} e^{ikjh} = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^n e^{ikjh} - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n-1} e^{ikjh} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n+1} e^{ik(j+1)h} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{n+1} e^{ik(j-1)h}$$

Agar lebih sederhana, persamaan tersebut dibagi dengan  $\lambda^n e^{ikjh}$ , sehingga diperoleh

$$\lambda = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda e^{ikh} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda e^{-ikh}$$

Karena  $e^{ikh} = \cos kh + i \sin kh$  dan  $e^{-ikh} = \cos kh - i \sin kh$ , maka

$$\lambda = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda (\cos kh + i \sin kh) + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda (\cos kh - i \sin kh)$$

$$\lambda = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \lambda^{-1} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) (\lambda \cos kh + \lambda i \sin kh + \lambda \cos kh - \lambda i \sin kh)$$

Sehingga diperoleh

$$(l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t - c^2 l \Delta t^2 \cos kh - 4c^2 \Delta t^2 \cos kh) \lambda^2 - (2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t) \lambda + (l\Delta x^2) = 0$$

akar-akar persamaan dari persamaan tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)}{2(l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t - c^2 l \Delta t^2 \cos kh + 4c^2 \Delta t^2 \cos kh)} \pm \frac{\sqrt{(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - 4(l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t - c^2 l \Delta t^2 \cos kh - 4c^2 \Delta t^2 \cos kh)(l\Delta x^2)}}{2(l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t - c^2 l \Delta t^2 \cos kh + 4c^2 \Delta t^2 \cos kh)} \leq 1 \quad (5)$$

Terlihat bahwa persamaan (4) mengandung  $\cos kh$ , selanjutnya diambil titik diskritnya yaitu  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$ ,  $\cos kh = 1$  sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

Saat  $\cos kh = -1$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 8c^2 l \Delta t^2 + 32c^2 \Delta t^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 0$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 1$ , diperoleh

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2(2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2 - (4l\Delta x^2 + 4k_d l \Delta x^2 \Delta t)(l\Delta x^2)}{(2l\Delta x^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t)^2} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = -1$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 4c^2 l \Delta t^2 + 16c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 0$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Saat  $\cos kh = 1$ , diperoleh

$$|\lambda_2| = \left| -\frac{1}{2l\Delta x^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right| \leq 1$$

Berdasarkan penguraian analisis kestabilan tersebut, jelas bahwa pembilang pada persamaan baik saat  $\cos kh = -1$ ,  $\cos kh = 0$  dan  $\cos kh = 1$  lebih kecil daripada penyebutnya, sehingga kesimpulan yang dapat diambil yaitu  $|\lambda_1|$  dan  $|\lambda_2| \leq 1$  selalu stabil tanpa syarat. Artinya skema BTCS akan tetap stabil untuk sembarang nilai parameter yang digunakan.

### 3.1.2 Analisis Konsistensi

Analisis konsistensi metode beda hingga implisit skema BTCS dapat dicari dengan menerapkan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan beda (3). Penerapan ekspansi deret Taylor pada persamaan beda (3) adalah sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots$$

$$u_j^{n-1} = u_j^n - \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots$$

$$\begin{aligned}
 u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n + \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \\
 &\quad \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots \\
 u_{j-1}^{n+1} &= u_j^n - \Delta x u_x \Big|_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_j^n + \\
 &\quad \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \dots
 \end{aligned}$$

Perhitungan dilakukan pada persamaan (3) dengan cara menyederhanakan  $u_{j+1}^{n+1}$  dan  $u_{j-1}^{n+1}$  terlebih dahulu, Kemudian persamaan yang didapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3), sehingga

$$\begin{aligned}
 &\left( u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\
 &\quad \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( u_j^n - \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots \right) + \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( 2u_j^n + 2\Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n \right) \\
 &\left( u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \\
 &\quad \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( u_j^n - \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n - \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n - \dots \right) - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \left( 2u_j^n + 2\Delta t u_t \Big|_j^n + \Delta x^2 u_{xx} \Big|_j^n + \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_j^n + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \dots \right) = 0
 \end{aligned}$$

Menjadi

$$\begin{aligned}
 &u_j^n - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) 2u_j^n + u_t - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_t - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) 2u_t \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{2} u_{tt} - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{6} u_{ttt} - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{6} u_{ttt} - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u_j^n - \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \\
 &\quad \left( \frac{2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n + u_t - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_t - \\
 &\quad \left( \frac{2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_t \Big|_j^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} + \\
 &\quad \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{2} u_{tt} - \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - \\
 &\quad \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{6} u_{ttt} - \\
 &\quad \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{6} u_{ttt} - \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 =
 \end{aligned} \tag{6}$$

0



Agar lebih sederhana, persamaan (6) dikalikan dengan  $2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t$  sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
 & (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_j^n - (4l\Delta x^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_j^n + (2l\Delta x^2)u_j^n - (2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2)u_j^n + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_t - (2l\Delta x^2)u_t - (2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2)u_t \Big|_j^n \Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{2}u_{tt} + (2l\Delta x^2)\frac{1}{2}u_{tt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0 \\
 & (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)u_t - (2l\Delta x^2)u_t - (2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2)u_t \Big|_j^n \Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{2}u_{tt} + (2l\Delta x^2)\frac{1}{2}u_{tt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{tt} \Big|_j^n \Delta t^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xx} \Big|_j^n \Delta x^2 - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Error pemotongan yang telah ditemukan persamaan (7) memiliki orde  $(\Delta x^2, \Delta t^3)$  dan error pemotongan pertama dari persamaan (7) yaitu:

$$\begin{aligned}
 & (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0 \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Dikatakan konsisten jika persamaan tersebut memenuhi kondisi:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2\Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2l\Delta t^2 + 8c^2\Delta t^2 + 2k_d l\Delta x^2\Delta t)\frac{1}{6}u_{ttt} - (2l\Delta x^2)\frac{1}{6}u_{ttt} - (c^2l\Delta t^2 + 4c^2\Delta t^2)\frac{1}{3}u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0
 \end{aligned}$$

Jumlah limit dari persamaan tersebut akan semakin kecil jika  $\Delta x^2$  dan  $\Delta t^3$  memiliki nilai sangat kecil, karena berapa pun  $u_{ttt}$  dan  $u_{xxt}$  jika dikalikan dengan nilai  $\Delta t^3$  dan  $\Delta x$  yang sangat kecil, maka nilainya pun juga kecil, sehingga error pemotongan akan semakin mendekati nol. Untuk memperjelas keterangan di atas, dapat dilihat pada tabel berikut ini

**Tabel 1** Nilai Error untuk  $u(x, t)$  pada  $t \in [0, 0.7]$  dan  $x \in [0, 0.64]$  dengan  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t = 0.1$

$\Delta x$	Waktu (t)					
	5.5	5.7	5.9	6.1	6.3	6.5
0.01	0.0059	0.0039	0.0075	0.00096	0.0060	0.0044
0.05	0.0293	0.0194	0.0372	0.00478	0.0300	0.0219
0.1	0.0568	0.0377	0.0722	0.0093	0.0582	0.0424

Perhitungan error ini dikerjakan dengan formula  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$ , di mana nilai  $u_j^n$  adalah nilai  $u(x, t)$  yang ditampilkan pada iterasi skema BTCS untuk suatu  $\Delta x$  dan  $u_j^{n-1}$  adalah nilai yang ditampilkan oleh OCTAVE untuk suatu  $\Delta x$ . Selisih nilai  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$  ditampilkan di setiap titik diskrit  $x$  pada interval waktu  $t \in [0, 0.7]$ . Selanjutnya untuk  $\Delta x \in [0.01, 0.1]$  maka dapat dihitung bahwa nilai  $\left(\frac{0.0059}{0.0293}\right)^2 = 0.04$  ekuivalen dengan  $\left(\frac{0.01}{0.05}\right)^2$ , hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema BTCS memenuhi kriteria  $\Delta x^2$

Selanjutnya untuk analisis orde error pada suatu  $\Delta t$  pada  $t \in [0, 0.7]$  merujuk pada tabel berikut:

**Tabel 2** Nilai Error untuk  $u(x, t)$  pada  $t \in [0, 0.7]$  dan  $x \in [0, 0.64]$  dengan  $\Delta t \rightarrow 0$  dan  $\Delta x = 0.05$

$\Delta t$	Spasial ( $x$ )					
	5.5	5.7	5.9	6.1	6.3	6.5
0.05	0.0047	0.0035	0.0013	0.0035	0.0012	0.0020
0.1	0.0091	0.0069	0.0026	0.0068	0.0022	0.0037
0.2	0.0157	0.0118	0.0044	0.0117	0.0040	0.0063

Perhitungan *error* ini dikerjakan dengan formula  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$ , di mana nilai  $u_j^n$  adalah nilai  $u(x, t)$  yang ditampilkan pada iterasi skema BTCS untuk suatu  $\Delta t$  dan  $u_j^{n-1}$  adalah nilai yang ditampilkan oleh OCTAVE untuk suatu  $\Delta t$ . Selanjutnya selisih nilai  $|u_j^n - u_j^{n-1}|$  ditampilkan di setiap titik diskrit  $x$  pada interval waktu  $t \in [0, 0.7]$ . Selanjutnya untuk  $\Delta t \in [0.05, 0.2]$  maka dapat dihitung bahwa nilai  $\left(\frac{0.0047}{0.0091}\right)^3 = 0.125$  ekuivalen dengan  $\left(\frac{0.05}{0.1}\right)^3$  hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema BTCS memenuhi kriteria  $\Delta t^3$ .

## KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode implisit skema *Backward Time Central Space* (BTCS), diperoleh:

$$u_j^{n+1} = \left( \frac{2l\Delta x^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^n - \left( \frac{l\Delta x^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_j^{n-1} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j+1}^{n+1} + \left( \frac{c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2}{l\Delta x^2 + c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2 + k_d l \Delta x^2 \Delta t} \right) u_{j-1}^{n+1} =$$

2. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa solusi numerik model matematika vibrasi dawai pada alat musik petik dengan metode BTCS stabil tanpa syarat, serta memiliki orde  $(\Delta t^3, \Delta x^2)$  dan *error* pemotongan dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) u_{xxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + (2l\Delta x^2 + 2c^2 l \Delta t^2 + 8c^2 \Delta t^2 + 2k_d l \Delta x^2 \Delta t) \frac{1}{6} u_{ttt} - (2l\Delta x^2) \frac{1}{6} u_{ttt} - (c^2 l \Delta t^2 + 4c^2 \Delta t^2) \frac{1}{3} u_{ttt} \Big|_j^n \Delta t^3 = 0$$

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kusumastuti A, Brylliant DN, Hidayati NA. Construction analysis of the string motion model on Sasando mu-17sical instrument. IOP Conference Series Earth and Environmental Science 2020; 456:012075. doi: 10.1088/1755-181315/456/1/01207519
- [2] Permata HW, Kusumastuti A. Solusi numerik model gerak osilasi vertikal dan torsional pada jembatan gantung. 37Jurnal Riset Mahasiswa Matematika 2021; 1(1):1-13. doi 10.18860/jrmm.v1i1.13409
- [3] Giordano, Nicholas, "The Physics of Vibrating Strings", American Institute of Physics
- [4] Sukarasa, I Made, "Analisis Kestabilan Numerik Metode Beda Hingga pada Persamaan Getaran Membran dan Simulasinya", Bali: SENAPATI, 2018.
- [5] Purwanto, Agus, "Analisis dan Sintesa Bunyi Dawai pada Gitar Semi-Akustik", Seminar Nasional MIPA, (240-246), 2006.
- [6] Gulla, Jan, "Modelling the Wave Motion of a Guitar String", Essay tidak dipublikasikan, 2011

- [7] Kusumastuti A, Jamhuri M, Hidayati NA. Analytical solution of the string vibration model on Sasando musical instrument. *Journal of Physics: Conference Series* 2019; 1321(2). doi: 10.1088/1742-6596/1321/2/02208821
- [8] Kusumastuti A, Khudzaifah M, Widayani H, Zuhriah A. Numerical solution of Sasando string motion model. In: *22 Proceedings of the International Conference on Mathematics and Islam; Malang, Indonesia; 2018*. pp. 537–541. doi:2310.5220/000852500537054124
- [9] Zauderer, E., "Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition". New York: John Wiley & Sons, Inc, 2006
- [10] Strauss, A. W., "Partial Differential Equations an Introduction Second Edition", Amerika: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [11] Flaherty, E Joseph, "Modeling, Mesh Generation, and Adaptive Numerical Method for Partial Differential Equations" Springer-Verlag, 1993
- [12] Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi
- [13] Triatmodjo, B., "Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer", Yogyakarta: Beta Offset, 2002
- [14] Kusumastuti A, Nurhayati SSY. Analysis of torque vertical on string model. *Jurnal Teknologi* 2016; 78(5): 351-354. doi: 10.11113/jt.v78.8335
- [15] Morton, K. W. & Mayers David, "Numerical Solution of Partial Differential Equation Second Edition", New York: Cambridge University, 2005, 1998