

Analisis Dinamik Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR

Ester Meyliana*, Ari Kusumastuti, Juhari

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

estermeyliana06@gmail.com*, arikusumastuti@gmail.com, juhari@uin-malang.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas tentang analisis dinamik pada model matematika penyebaran COVID-19 dengan menggunakan kasus harian di Indonesia yang diklasifikasikan menjadi empat variabel yaitu, *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R) yang kemudian dianalisis dinamikanya dengan menghitung titik kesetimbangan dan mencari sifat kestabilan. Dua titik kesetimbangan dari model ini yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit P_0^* dan titik kesetimbangan endemik P_1^* . Kemudian, dilakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan dengan menggunakan parameter yang diberikan. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan P_0^* menghasilkan empat nilai eigen yang mana salah satunya bernilai positif. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan P_1^* menghasilkan dua nilai eigen riil negatif dan sepasang nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif. Potret fase dan simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan untuk semua variabel S , E , I , dan R akan stabil asimtotik lokal menuju titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan endemik P_1^* . Sehingga, berdasarkan analisis dinamik yang diperoleh menunjukkan bahwa untuk titik kesetimbangan bebas penyakit P_0^* tidak stabil dan untuk titik kesetimbangan endemik P_1^* stabil asimtotik lokal.

Kata kunci: Analisis Dinamik; Model Matematika Penyebaran COVID-19; Titik Kesetimbangan; Potret Fase

Abstract

This study discusses the dynamic analysis of the mathematical model of the spread of COVID-19 using daily cases in Indonesia which are classified into four variables, namely, Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), and Recovered (R) which are then analyzed dynamically by calculate the equilibrium point and look for stability properties. The two equilibrium points of this model are the disease-free equilibrium point P_0^* and the endemic equilibrium point P_1^* . Then, it is linearized around the equilibrium point using the given parameters. Linearization around the equilibrium point P_0^* produces four eigenvalues, one of which is positive. Linearization around the equilibrium point P_1^* yields two negative real eigenvalues and a pair of complex eigenvalues with negative real parts. Phase portraits and numerical simulations have shown that all variables S , E , I , and R will be asymptotically stable locally towards the equilibrium point, namely the endemic equilibrium point P_1^* . Thus, based on the dynamic analysis obtained, it is shown that the disease-free equilibrium point P_0^* is unstable and the endemic equilibrium point P_1^* is locally asymptotically stable.

Keywords: Dynamic Analysis; Mathematical Model of the Spread of COVID-19; Equilibrium Points; Phase Portrait

PENDAHULUAN

COVID-19 merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh *coronavirus* jenis baru yang kemudian diberi nama *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) [1]. Virus ini merupakan jenis virus varian baru yang memiliki tingkat penyebaran atau penularan lebih tinggi dibandingkan varian virus sebelumnya [2]. Menurut *United Nations Environment*

(UNEP) bahwa *Coronavirus* merupakan penyakit zoonosis, sehingga terdapat kemungkinan virus berasal dari hewan dan ditularkan ke manusia [3]. Masa inkubasi virus COVID-19 berlangsung selama 14 hari [2][15]. Model matematika digunakan secara luas untuk mewakili transmisi penyakit di suatu daerah tertentu [4]. Berbagai model epidemi matematika yang menggambarkan transmisi COVID-19 telah dibahas di [1], [5], [6], [12], dan [13]. Model matematika penyebaran COVID-19 yang akan digunakan dalam penelitian ini merujuk pada [5], yang disajikan dalam bentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) bergantung waktu. Model tersebut menjelaskan proses terjadinya reinfeksi COVID-19 dalam populasi makro manusia di Indonesia. Model matematika penyebaran COVID-19 pada penelitian ini dibagi menjadi empat sub populasi individu dalam suatu sistem persamaan diferensial biasa, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda N + \varphi_1 R - \alpha SI - \mu S + \beta_1 E \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha SI - \beta_1 E - \beta_2 E - \mu_i E \\ \frac{dI}{dt} &= \beta_2 E - \theta_1 I - \mu_i I \\ \frac{dR}{dt} &= \theta_1 I - \varphi_1 R - \mu R \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proses reinfeksi COVID-19 yang terjadi pada penelitian ini akan digambarkan dengan model matematika pada populasi SEIR. Model matematika ini memuat empat sub populasi individu dalam suatu sistem persamaan yang terdiri atas variabel *Susceptible* (*S*), *Exposed* (*E*), *Infected* (*I*), dan *Recovered* (*R*). Selanjutnya keempat sub populasi tersebut merupakan variabel dalam penelitian ini. Di mana *Susceptible* merupakan sub populasi individu rentan yang dapat terinfeksi atau tertular, *Exposed* merupakan sub populasi individu yang terpapar dengan merujuk pada kasus yang dicurigai, *Infected* merupakan sub populasi individu terinfeksi yang telah dinyatakan positif melalui fasilitas kesehatan dan juga akibat tidak adanya penanganan atau pengobatan secara langsung pada individu terpapar, dan *Recovered* merupakan sub populasi individu sembuh dari penyakit karena adanya *treatment* yang sukses. Namun, individu yang telah sembuh hanya akan memiliki kekebalan sementara yang akan menyebabkan individu tersebut menjadi individu yang rentan terinfeksi atau tertular COVID-19 kembali. Terdapat beberapa parameter yang berperan dalam proses penyebaran COVID-19, diuraikan sebagai berikut.

Tabel 1 Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran COVID-19 [5]

Variabel	Definisi	Nilai dan Satuan
Λ	Laju kelahiran alami	$6,25 \times 10^{-3}$ /Hari
μ	Laju kematian alami	0,00712/Hari
α	Laju perubahan individu rentan menjadi individu terpapar	$3,586 \times 10^{-6}$ /Orang/Hari
θ_1	Laju perubahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh karena adanya <i>treatment</i> yang sukses	0,086/Hari
μ_i	Laju kematian pada populasi yang disebabkan oleh COVID-19	0,087/Hari
β_1	Laju perubahan individu terpapar kembali menjadi individu rentan	7012/Hari
β_2	Tingkat perubahan individu terpapar menjadi individu terinfeksi	0,4/Hari
φ_1	Laju perubahan individu sembuh kembali menjadi individu rentan karena adanya penurunan imunitas	0,9629/Hari

Dan juga terdapat beberapa nilai awal yang digunakan pada penelitian ini, sebagai berikut.

Tabel 2 Nilai Awal Model Matematika Penyebaran COVID-19 (Desember 2020-Agustus 2021)

Variabel	Definisi	Nilai Awal
N	Banyaknya penduduk di Indonesia	270,20 juta
S	Banyaknya individu rentan terhadap waktu	267968836
E	Banyaknya individu terpapar terhadap waktu	132723
I	Banyaknya individu terinfeksi terhadap waktu	228835
R	Banyaknya individu sembuh terhadap waktu	1869606

Berdasarkan uraian tersebut, akan dilakukan analisis perilaku dinamik model matematika penyebaran COVID-19 pada populasi SEIR di Indonesia.

METODE

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Menentukan titik-titik kesetimbangan pada model SEIR.
- Linierisasi sistem persamaan diferensial yang terlibat.
- Menghitung nilai eigen dan mengidentifikasi jenis kestabilan semua titik-titik kesetimbangan model berdasarkan nilai eigen.
- Melakukan interpretasi dari potret fase (perilaku titik kesetimbangan model) dari model penyebaran COVID-19.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Titik-Titik Kesetimbangan

Titik-titik kesetimbangan pada sistem persamaan model matematika penyebaran COVID-19 tersebut dapat diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$. Dimana pada saat titik kesetimbangan didapatkan, maka laju pertumbuhan dari setiap persamaan akan tetap. Dengan kata lain, tidak ada perubahan jumlah populasi (keadaan setimbang). Berdasarkan sistem persamaan model matematika tersebut diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*)$ dan titik kesetimbangan endemik $P_1^*(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$, yaitu

- Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$P_0^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*) = \left(\frac{\Lambda N}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \tag{3.1}$$

- Titik kesetimbangan endemik

$$P_1^*(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$$

dengan.

$$\begin{aligned} S_2^* &= \frac{\mu_i^2 + \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_1 + \mu_i \theta_1 + \beta_1 \mu_i + \beta_2 \mu_i}{\alpha \beta_2} \\ E_2^* &= - \frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \emptyset + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\mu_i + \theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha\beta_2(\emptyset + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))} \\ I_2^* &= - \frac{(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \emptyset + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)(\varphi_1 + \mu)}{\alpha(\emptyset + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$R_2^* = -\frac{\theta_1(-N\Lambda\alpha\beta_2 + \phi + \mu_i\beta_1\mu + \beta_1\mu\theta_1)}{\alpha(\phi + \mu_i\varphi_1(\mu_i + \beta_2 + \theta_1))}$$

2. Linierisasi

Untuk menganalisis kestabilan pada titik-titik kesetimbangan, maka akan dilakukan linierisasi pada sistem persamaan model matematika penyebaran COVID-19, dengan kaidah yang sesuai pada [7] seperti pada penelitian [5].

- a. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit $P_0^*(S_1^*, E_1^*, I_1^*, R_1^*)$

Berdasarkan sistem persamaan (1.1) yang akan dilinierisasi maka akan mendapatkan matriks Jacobi [11], sebagai berikut (3.3)

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Kemudian, matriks Jacobi (3.3) disubstitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit (3.1), sehingga didapatkan

$$J(P_0^*) = \begin{bmatrix} -\mu & \beta_1 & -\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- b. Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan endemik $P_1^*(S_2^*, E_2^*, I_2^*, R_2^*)$

Berdasarkan sistem persamaan (1.1) dengan mensubstitusikan nilai titik kesetimbangan endemik pada (3.3) maka akan didapatkan matriks Jacobi sebagai berikut (3.5)

$$J(P_1^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3. Analisis Kestabilan titik-titik kesetimbangan

Untuk menentukan kestabilan pada titik kesetimbangan dilakukan menggunakan kaidah analisis dinamik, maka akan dihitung nilai eigen dengan menentukan akar-akar karakteristik pada matriks Jacobi [7].

- a. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan bebas penyakit dengan menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Dengan menggunakan matriks Jacobi (3.4), kemudian

$$\det(J(P_0^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu & \beta_1 & -\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu - \beta_2 & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & \beta_1 & -\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & \beta_1 & -\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & \varphi_1 \\ 0 & -\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
 & = (-\mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} & 0 \\ \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} \\
 & = (-\mu - \lambda)(-\varphi_1 - \mu - \lambda) \begin{bmatrix} -\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda & \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} \\ \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda \end{bmatrix} \\
 & = (-\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda)(-\mu_i - \theta_1 - \lambda) - \beta_2 \left(\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} \right) \\
 & = \lambda^2 + (\beta_1 + \mu + \mu_i + \beta_2 + \theta_1)\lambda + (\mu_i + \theta_1)(\beta_1 + \mu + \beta_2) + \beta_2 \frac{\alpha\Lambda N}{\mu} = 0
 \end{aligned}$$

Dari dua faktor pertama diperoleh,

$$\lambda_1 = -\mu < 0 \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = -\varphi_1 - \mu < 0$$

Dua nilai eigen lainnya merupakan solusi dari persamaan berikut

$$(-\beta_1 - \mu - \beta_2 - \lambda)(-\mu_i - \theta_1 - \lambda) - \beta_2 \left(\frac{\alpha\Lambda N}{\mu} \right) = 0$$

Atau dapat ditulis sebagai polinom pangkat dua sebagai berikut,

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\lambda = 0 \tag{3.31}$$

dengan,

$$a_1 = (\beta_1 + 2\mu_i + \beta_2 + \theta_1)$$

$$a_2 = (\mu_i + \theta_1)(\beta_1 + \mu + \beta_2) - \beta_2 \frac{\alpha\Lambda N}{\mu}$$

Kemudian, nilai akar-akar persamaan karakteristik tersebut dapat dianalisis kestabilannya jika memenuhi syarat berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz berikut:

$$a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0$$

Berdasarkan kriteria tersebut, untuk nilai eigen λ_3 dan λ_4 pada persamaan karakteristik akan stabil jika memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Kemudian, dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2, maka akan didapatkan nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$\lambda_1 = -0,0071200000000000$$

$$\lambda_2 = -0,9700200000000000$$

$$\lambda_3 = 0,312142354616299$$

$$\lambda_4 = -7012,89226235462$$

Berdasarkan nilai eigen yang didapatkan dapat diketahui bahwa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 < 0$, tetapi untuk $\lambda_3 > 0$. Dan juga tidak memenuhi syarat pada kriteria Routh-Hurwitz tersebut. Sehingga, secara keseluruhan sifat kestabilannya adalah tidak stabil.

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Pada tahap berikut akan ditentukan kestabilan endemik dengan menggunakan titik kesetimbangan endemik. Dengan menggunakan matriks Jacobi (3.4), kemudian

$$\det(\mathbf{J}(P_1^*) - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \alpha I^* - \lambda & \beta_1 & -\alpha S^* & \varphi_1 \\ \alpha I^* & -\beta_1 - \mu_i - \beta_2 - \lambda & \alpha S^* & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\mu_i - \theta_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & -\varphi_1 - \mu - \lambda \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian (3.7) yang diperoleh adalah:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

Dengan,

$$a_1 = \alpha I^* + 2\mu_i + \varphi_1 + \beta_1 + \beta_2 + 2\mu + \theta_1$$

$$a_2 = 2\mu_i\alpha I^* - S^*\alpha\beta_2 + \alpha\varphi_1 I^* + \alpha\beta_1 I^* + \alpha\beta_2 I^* + \alpha I^*\mu + \alpha I^*\theta_1 + \mu_i\varphi_1 + \mu_i\beta_1 + \mu_i\beta_2 + 3\mu_i\mu + \varphi_1\beta_1 + \varphi_1\beta_2 + 2\varphi_1\mu + \varphi_1\theta_1 + 2\beta_1\mu + \beta_1\theta_1 + 2\beta_2\mu + \beta_2\theta_1 + \mu^2 + 2\mu\theta_1$$

$$a_3 = \mu_i^2\alpha I^* + 2\mu_i\alpha\varphi_1 I^* + \mu_i\alpha\beta_2 I^* + 2\mu_i\alpha I^*\mu + \mu_i\alpha I^*\theta_1 - S^*\alpha\varphi_1\beta_2 - 2S^*\alpha\beta_2\mu + \alpha\varphi_1\beta_2 I^* + \alpha\varphi_1 I^*\theta_1 + \alpha\beta_2 I^*\mu + \alpha\beta_2 I^*\theta_1 + \alpha I^*\mu\theta_1 + \mu_i^2\varphi_1 + 2\mu_i^2\mu + \mu_i\varphi_1\beta_1 + \mu_i\varphi_1\beta_2 + 2\mu_i\varphi_1\mu + \mu_i\varphi_1\theta_1 + 2\mu_i\beta_1\mu + 2\mu_i\beta_2\mu + 2\mu_i\mu^2 + 2\mu_i\mu\theta_1 + \varphi_1\beta_1\mu + \varphi_1\beta_1\theta_1 + \varphi_1\beta_2\mu + \varphi_1\beta_2\theta_1 + \varphi_1\mu\theta_1 + \beta_1\mu^2 + 2\beta_1\mu\theta_1 + \beta_2\mu^2 + 2\beta_2\mu\theta_1 + \mu^2\theta_1$$

$$a_4 = \mu_i^2\alpha\varphi_1 I^* + \mu_i^2\alpha I^*\mu + \mu_i\alpha\varphi_1\beta_2 I^*\mu + \mu_i\alpha\varphi_1 I^*\theta_1 + \mu_i\alpha\beta_2 I^*\mu + \mu_i\alpha I^*\mu\theta_1 - S^*\alpha\varphi_1\beta_2\mu - S^*\alpha\beta_2\mu^2 + \alpha\beta_2 I^*\mu\theta_1 + \mu_i^2\varphi_1\mu + \mu_i^2\mu^2 + \mu_i\varphi_1\beta_1\mu + \mu_i\varphi_1\mu\theta_1 + \mu_i\beta_1\mu^2 + \mu_i\beta_1\mu^2 + \mu_i\beta_2\mu^2 + \mu_i\mu^2\theta_1 + \varphi_1\beta_1\mu\theta_1 + \varphi_1\beta_2\mu\theta_1 + \beta_1\mu^2\theta_1 + \beta_2\mu^2\theta_1$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik akan bersifat stabil jika memenuhi syarat berikut.

1. $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ dan
2. $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

Selanjutnya, menggunakan nilai parameter yang sudah disajikan pada Tabel 1, maka diperoleh $a_1, a_2,$ dan a_3 sebagai berikut.

$$a_1 = 7015,300577 > 0$$

$$a_3 = 273,7928204 > 0$$

$$a_4 = 15,11846886 > 0$$

dan

$$a_1 a_2 a_3 = 1,475894340 \times 10^{10}$$

$$a_3^2 + a_1^2 a_4 = 8,112011451 \times 10^8$$

Dengan demikian, jelas bahwa $a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_4 > 0$. Dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ ketika digunakan nilai parameter pada Tabel 2.2. Maka, dapat disimpulkan bahwa P_1^* stabil asimtotik lokal karena memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz. Lebih lanjut untuk nilai eigen dari persamaan karakteristik (3.31) dengan menggunakan parameter pada Tabel 2.2 adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -7323,70294680509$$

$$\lambda_2 = -0,0182001870337431 + 0,0424297154345613I$$

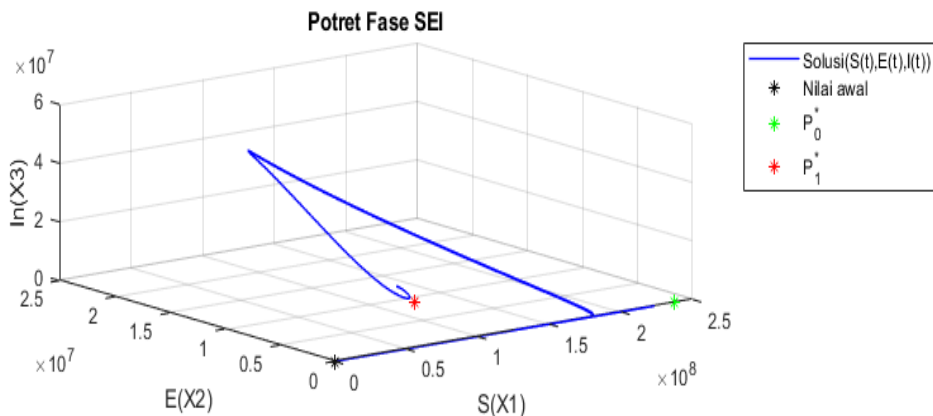
$$\lambda_3 = -0,0182001870337431 - 0,0424297154345613I$$

$$\lambda_4 = -0,968469920848185$$

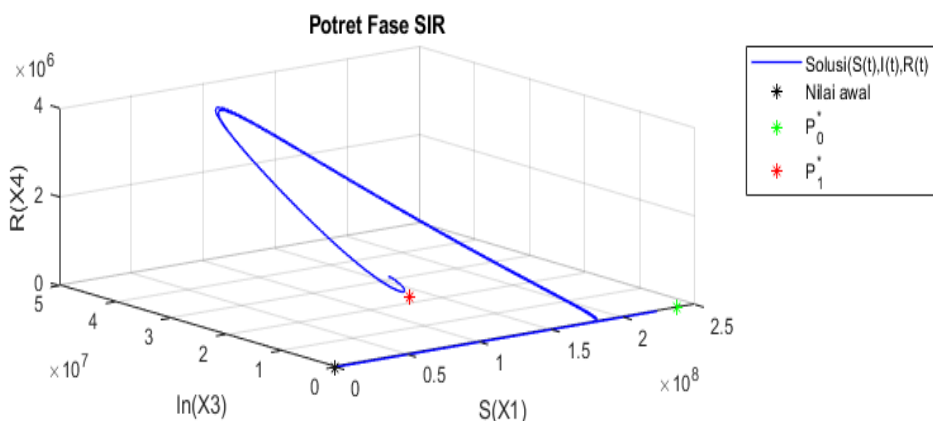
Berdasarkan nilai Eigen tersebut dapat diketahui secara keseluruhan nilai Eigen tersebut secara keseluruhan mempunyai bagian real negatif. Untuk $\lambda_1, \lambda_4 < 0$ dan untuk $\lambda_2, \lambda_3 = -x \pm yi$. Sehingga, secara keseluruhan sifat kestabilannya adalah stabil asimtotik.

4. Potret Fase dan Simulasi Numerik

Potret fase merupakan bidang fase yang mewakili himpunan lintasan variabel pada sistem persamaan [14]. Persamaan model COVID-19 memiliki empat variabel dan tidak bisa diamati keseluruhan secara bersamaan, sehingga keempat persamaan tersebut ditampilkan setiap tiga persamaan dalam satu gambar tanpa mengubah nilai dari titik kesetimbangan yang diperoleh sebelumnya. Diperoleh potret fase sebagai berikut.

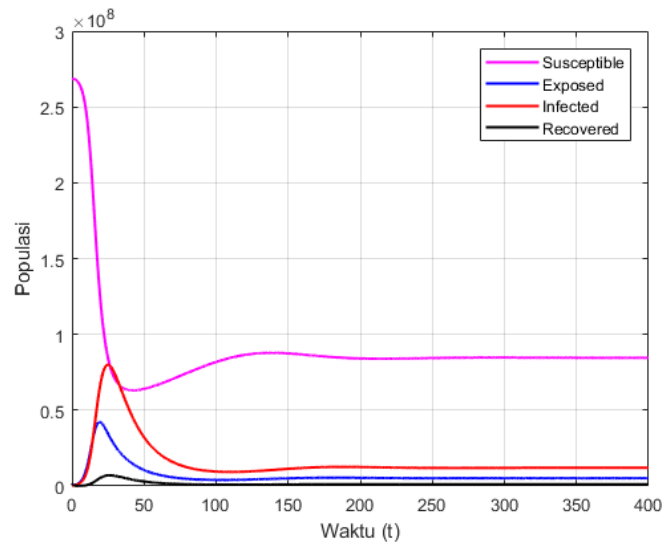


Gambar 4.1 Potret Fase $X_1, X_2,$ dan X_3 Menuju Titik Kesetimbangan Endemik



Gambar 4.2 Potret Fase $X_1, X_3,$ dan X_4 Menuju Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan kedua gambar tersebut dapat diketahui bahwa sistem persamaan model matematika COVID-19 pada penelitian ini mendekati titik P_1^* dengan waktu $t \rightarrow 400$ sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan tersebut stabil menuju titik kesetimbangannya, yaitu titik kesetimbangan endemik dengan nilai $P_1^*(8,457614689 \times 10^7, 3,751758724 \times 10^6, 8,674586645 \times 10^6, 7,690712063 \times 10^5)$.



Gambar 4.3 Grafik Simulasi Model Matematika Penyebaran COVID-19 Pada Populasi SEIR

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa setiap individu yang terinfeksi dapat menularkan penyakit COVID-19 kepada individu rentan, sehingga terjadilah penyebaran penyakit COVID-19 yang meluas. Populasi individu rentan terhadap penyakit COVID-19 akan mengalami kestabilan secara asimtotik pada waktu tertentu dengan populasi mencapai $8,457614689 \times 10^7$.

Populasi individu rentan menjadi individu terpapar akan mengalami penurunan karena adanya upaya pencegahan sebelum menjadi individu terinfeksi misalnya dengan melakukan karantina dll., dan juga dengan adanya kematian akibat penyakit pada populasi tersebut. Populasi individu terpapar akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai $3,751758724 \times 10^6$.

Populasi individu yang terpapar menjadi individu terinfeksi akan mengalami penurunan karena terdapat laju penyembuhan dan kematian yang disebabkan oleh penyakit pada populasi tersebut. Populasi orang yang terinfeksi akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai $8,674586645 \times 10^6$.

Populasi orang yang sembuh juga akan mengalami penurunan karena terdapat kematian alami dan juga laju perubahan dari individu sembuh kembali menjadi individu rentan karena berhubungan dengan sistem imunitas seseorang yang akan mengalami kestabilan dengan populasi mencapai $7,690712063 \times 10^5$.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dinamik yang telah dilakukan didapatkan dua titik kesetimbangan dari model matematika penyebaran COVID-19, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan yang pertama yaitu P_0^* dengan kondisi di mana tidak adanya penyebaran penyakit, menghasilkan nilai eigen yang mana salah satunya bernilai positif, kedua di sekitar titik kesetimbangan P_1^* dengan kondisi dimana adanya penyebaran penyakit, menghasilkan dua nilai eigen riil negatif dan dua nilai eigen kompleks dengan bagian riil negatif. Sehingga, berdasarkan analisis dinamik yang diperoleh menunjukkan bahwa untuk titik kesetimbangan bebas penyakit P_0^* tidak stabil dan untuk titik kesetimbangan endemik P_1^* stabil asimtotik yang artinya penyakit COVID-19 akan tetap ada namun seiring berjalannya waktu akan menjadi konstan, artinya untuk setiap individu rentan, terpapar, terinfeksi, dan sembuh akan stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ndairou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*, 135, 109846.

- [2] Marzuki, I., Bachtiar, E., Zuhriyatun, F., Purba, A. M. V., Kurniasih, H., Purba, D. H., ... & Airlangga, E. (2021). *COVID-19: Seribu Satu Wajah*. Yayasan Kita Menulis.
- [3] Handayani, D., Hadi, D. R., Isbaniah, F., Burhan, E., & Agustin, H. (2020). Corona virus disease 2019. *Jurnal Respirologi Indonesia*, 40(2), 119-129.
- [4] Sasmita, N. R., Ikhwan, M., Suyanto, S., & Chongsuvivatwong, V. (2020). Optimal control on a mathematical model to pattern the progression of coronavirus disease 2019 (COVID-19) in Indonesia. *Global Health Research and Policy*, 5(1), 1-12.
- [5] Hidayati, N. A., Suryanto, A., & Kusumawinahyu, W. M. DYNAMICAL ANALYSIS OF FRACTIONAL ORDER ZIKV MODEL.
- [6] Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
- [7] Boyce, W.E & DiPrima, R.C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Von Hoffmann Press.
- [8] Wahab, W & Subiantoro A. 2013. *Fundamental of Control System Stability Crtiterion-Routh Hurwitz*. <http://staff.ui.ac.id/internal/130702176/material/Lecture5-StabilityCriterion-Routh-HurwitzTest20Oct08.pdf>. (diakses pada 12 April 2021).
- [9] Andari, Ari. 2017. *Aljabar Linier Elementer*. Malang: UB Press.
- [10] Ndi, Meksinanis Zadrak. 2018. *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. Sleman: Deepublish Publisher
- [11] Hardiningsih, A, Y. 2010. *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Skokastik Pada Waktu Diskrit*. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.
- [12] Garba, S. M., Lubuma, J. M. S., & Tsanou, B. (2020). Modeling the transmission dynamics of the COVID-19 Pandemic in South Africa. *Mathematical biosciences*, 328, 108441.
- [13] Biswas, M. H. A., Islam, M. A., Akter, S., Mandal, S., Khatun, M. S., Samad, S. A., ... & Khatun, M. R. (2020). Modelling the effect of self-immunity and the impacts of asymptomatic and symptomatic individuals on COVID-19 outbreak. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 125(3), 1033-1060.
- [14] Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- [15] Di Gennaro, F., Pizzol, D., Marotta, C., Antunes, M., Racalbutto, V., Veronese, N., & Smith, L. (2020). Coronavirus diseases (COVID-19) current status and future perspectives: a narrative review. *International journal of environmental research and public health*, 17(8), 2690.