Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 1(4) (2022), Halaman 202-210
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Ruang ℓ^p pada Norm-2 Lengkap

Sri Utami*, Hairur Rahman, Dewi Ismiarti

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: sriutami61811@gmail.com*, hairur@mat.uin-malang.ac.id, dewi.ismiarti@yahoo.com

Abstrak

Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan Riil yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$. Fungsi pada ruang vektor X yang bernilai Riil yang memenuhi sifat-sifat norm-2 dinotasikan dengan $\|\cdot,\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2. Ruang norm-2 dikatakan lengkap atau disebut ruang Banach-2 jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang tersebut. Penelitian ini dilakukan untuk membuktikan ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap. Langkah pertama untuk membuktikan kelengkapan tersebut adalah dengan membuktikan norm yang terdapat pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ memenuhi sifat-sifat norm-2. Selanjutnya membuktikan norm yang diturunkan dari norm-2 ekuivalen dengan norm pada ℓ^p. Selanjutnya menunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang ℓ^p konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang ℓ^p. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa$(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$a merupakan ruang norm-2 yang lengkap.

Kata kunci: Ruang ℓ^p; Ruang Norm-2; Ruang Banach.

Abstract

The space ℓ^p with $1 \leq p < \infty$ is the set of real numbers that satisfy $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$. The function in the vector space X which has real value which fulfills the norm-2 properties is denoted by $\|\cdot,\cdot\|$ and the pair $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ is called the norm-2 space. A norm-2 space is said to be complete or called a Banach-2 space if every Cauchy sequence in the space converges to an element in that space. This research was conducted to prove the ℓ^p space in the complete norm-2. The first step to prove the completeness is to prove that the norm contained in ℓ^p with $1 \leq p < \infty$ satisfies the properties of norm-2. Next, prove that the norm derived from norm-2 is equivalent to the norm in ℓ^p. Next shows that every Cauchy sequence in space ℓ^p converges to an element in space ℓ^p. Based on this proof, it is found that $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|)$ is a complete norm-2 space.

Keywords: ℓ^p space; Norm-2 space; Banach space.

PENDAHULUAN

Konsep ruang norm pertama kali diperkenalkan oleh S. Banach, H. Hahn dan N. Wiener pada tahun 1922, kemudian teorinya dikembangkan oleh S. Banach pada tahun 1932. Ruang norm adalah ruang yang dibangun dari ruang vektor dengan norm yang didefinisikan di dalamnya. Fungsi pada ruang vektor X yang bernilai Riil yang memenuhi sifat-sifat norm dinotasikan dengan $\|\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm [1].

Konsep ruang norm-2 diperkenalkan oleh Gahler pada tahun 1960-an, yakni suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norm-2. Pada hal ini, norm-2 adalah suatu fungsi Riil dari dua buah vektor dengan sifat-sifat yang serupa dengan sifat-sifat norm. Oleh sebab itu, konsep norm-2 dapat dilihat sebagai bentuk perkembangan dari konsep norm. Norm-2 dinotasikan dengan $\|\cdot,\cdot\|$ dan pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2 [2].

Terdapat beberapa contoh ruang norm yang dilengkapi dengan masing-masing karakteristiknya, salah satunya adalah ruang ℓ^p. Menurut Alsina, dkk (2010) ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah himpunan barisan bilangan Riil $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ yang memenuhi $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ [3]. Norm-2 pada ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ terdapat dua versi yaitu versi Gahler dan versi Gunawan.

Submitted: 21 Desember 2021 Reviewed: 29 Maret 2022 Accepted: 26 April 2022
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v1i4.14464

Pada tahun 2001, Hendra Gunawan dan M. Mashadi mengkaji hubungan antara ruang Banach-2 dengan ruang Banach, yang dibuktikan dengan kekonvergenan norm-2 ekuivalen dengan norm yang diturunkan dari norm-2. Terkait dengan hal tersebut, maka terdapat ide mengenai ekuivalensi di ruang norm. Oleh karena itu, perlu untuk mengkaji tentang ruang ℓ^p pada norm-2 lengkap.

Pada penelitian sebelumnya, Sukran Konca, dkk (2016) dalam tulisannya "*A New 2-Inner Product on the Space of p-Summable Sequences*" membahas tentang hasil kali dalam-2 dan norm-2 pada ℓ^p yang memenuhi hukum jajargenjang. Selain itu, pada penelitian tersebut juga membuktikan ruang $(\ell_v^2, \|\cdot,\cdot\|_{2,v,w})$ merupakan ruang Banach-2 [2].

Penulis terinspirasi dari penelitian tersebut sehingga penulis meneliti ruang ℓ^p pada ruang norm-2 lengkap.

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 2.1

Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$. Norm dinotasikan dengan $\|\cdot\|$. Norm pada X adalah suatu fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat sebagai berikut:

a. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$; (Sifat Tak negatif)
   $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
b. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$. (Sifat Homogenitas)
c. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. (Ketaksamaan Segitiga)

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ dinamakan ruang norm [1].

Definisi 2.2

Misalkan X ruang vektor riil dengan dim $(X) \geq 2$. Norm-2 pada X adalah suatu pemetaan $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \geq 0$; (Sifat Tak negatif)
   $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ bergantung linier.
b. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$. (Sifat Simetris)
c. $\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$. (Sifat Homogenitas)
d. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$. (Ketaksamaan Segitiga)

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang norm-2 [2].

Berikut ini didefinisikan barisan konvergen dan barisan Cauchy yang bersumber dari jurnal ditulis oleh Raflesia, Ulfasari [6]:

Definisi 2.3

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-2. Suatu barisan $(\boldsymbol{x_k})$ di X dikatakan konvergen ke $\boldsymbol{x} \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ berlaku:

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| < \varepsilon \text{ untuk setiap } \boldsymbol{y} \in X. \tag{3}$$

Definisi 2.4

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-2. Suatu barisan $(\boldsymbol{x_k})$ di X dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, k \geq K(\varepsilon)$ berlaku:

$$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\| < \varepsilon \text{ untuk setiap } \boldsymbol{y} \in X. \tag{4}$$

Definisi 2.5

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-2, X dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy $(\boldsymbol{x_k})$ dalam X konvergen ke suatu $\boldsymbol{x} \in X$. Ruang norm-2 yang lengkap disebut ruang Banach-2.

Definisi 2.6 (Ruang $\boldsymbol{\ell^p}$)

Ruang ℓ^p dengan $(1 \leq p < \infty)$ adalah ruang vektor yang merupakan ruang barisan bilangan riil yang elemennya dinotasikan dengan $\boldsymbol{x} = (x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ sedemikian sehingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ konvergen sehingga $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$.

Norm pada ℓ^p didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_n)$ [3].

Definisi 2.7 (Ruang $\boldsymbol{\ell^\infty}$)

Ruang ℓ^∞ adalah ruang vektor yang merupakan ruang barisan bilangan kompleks atau bilangan riil yang terbatas. Secara umum, elemen dari ℓ^∞ditulis dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3 \dots)$ atau $\boldsymbol{x} = (x_n)$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $x_n \in \mathbb{C}$ atau $\mathbb{R}$. Sehingga berlaku, $|x_n| \le M$ dengan $M \in \mathbb{R}$ dan konstanta $M > 0$.

Norm pada ℓ^∞ didefinisikan dengan:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \text{ untuk setiap } \boldsymbol{x} = (x_n) \text{ dan } x_n \in \mathbb{C} \text{ atau } \mathbb{R}. \tag{9}$$

PEMBAHASAN

Didefinisikan norm-2 pada ℓ^p dengan $1 \le p < \infty$ sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{11}$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} = (x_i)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_i)$ di ℓ^p.

Ketika $p = \infty$, didefinisikan norm-2 pada ℓ^∞ sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}} \left|det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right| \tag{12}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \ell^\infty$ dan $\boldsymbol{y} = (y_i) \in \ell^\infty$.

Teorema 3.1.

Fungsi yang didefinisikan pada (11) merupakan norm-2 pada ℓ^p.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p \ge 0$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_i y_j - x_j y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak $|x_i y_j - x_j y_i| \ge 0$ sehingga

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_i y_j - x_j y_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge 0$$

untuk setiap $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p \ge 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = 0$ maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_i y_j - (x_j y_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Karena berlaku (13) dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ adalah sebarang elemen di ℓ^p, maka ada kemungkinan (x_i) bukan kelipatan (x_j). Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, misalkan

$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$

$\begin{pmatrix} x_i \\ x_j\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} y_i \\ y_j\end{pmatrix}$

atau $(x_i) = k(y_i)$ dan $x_j = k(y_j)$ dengan k adalah suatu skalar.

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

($\Longleftarrow$) Jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$.
Diketahui $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier, misalkan

$$\binom{x_i}{x_j} = k\binom{y_i}{y_j} \text{ dengan } k \text{ adalah suatu skalar.}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} ky_i & ky_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|ky_i(y_i) - ky_j(y_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa, jika $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$

b. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|_p$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(x_i y_j) - (x_j y_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(y_j x_i) - (y_i x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} y_j & y_i \\ x_j & x_i \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|_p.
\end{aligned}$$

c. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p$.

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} \alpha x_i & \alpha x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\alpha|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p.
\end{aligned}$$

d. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_p + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_p$.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_p = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\det\begin{pmatrix} x_i + y_i & x_j + y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| (x_i + y_i)\, z_j - (x_j + y_j) z_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det\begin{pmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{p}} + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{p}}.$$

Jadi, fungsi yang didefinisikan pada (20) merupakan norm-2 pada ℓ^p.

Secara umum, misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ruang norm-2, dapat dipilih $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di X, sehingga dapat didefinisikan $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ di X sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \text{ dengan } 1 \leq p < \infty.$$

Sehingga, norm $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ di $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di ℓ^2.

Apabila $p = \infty$ norm $\|\boldsymbol{x}\|_\infty^*$ di $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_\infty, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_\infty\}, \tag{15}$$

Teorema 3.2.

Misalkan $(\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p, maka fungsi

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \boldsymbol{x} \in \ell^p$$

mendefinisikan norm di ℓ^p.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p = \left(\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)} \end{pmatrix} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ a_i^{(2)} & a_j^{(2)} \end{pmatrix} \right|^p$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_i a_j^2 - (x_j a_i^2) \right|^p.$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak $\left| x_i a_j^2 - (x_j a_i^2) \right| \geq 0$. Begitu pula dengan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \geq 0$, sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \geq 0$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$.

$(\Longrightarrow)$ Jika $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ akan ditunjukan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$. Karena $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ maka $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{a_1}$ bergantung linier, sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \beta \boldsymbol{a_1}$. Dengan mensubstitusikan $\boldsymbol{x} = \beta \boldsymbol{a_1}$ maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = \|\beta \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = |\beta| \|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$. Karena $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ bebas linier, maka $\|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p \neq 0$. Persamaan $|\beta| \|\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ hanya dapat terpenuhi jika $\beta = 0$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$(\Longleftarrow)$ Jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ akan ditunjukan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$.

Karena $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ artinya $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga diperoleh

$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\|0, \boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|0, \boldsymbol{a_2}\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} = 0.$

Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

b. Akan ditunjukkan $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

$$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p^* &= \left[\|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \left[|\alpha|^p(\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p)\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= [|\alpha|^p]^{\frac{1}{p}}\left[\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p^* .\end{aligned}$$

c. Akan ditunjukkan $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^* \le \|\boldsymbol{x}\|_p^* + \|\boldsymbol{y}\|_p^*$ dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^* &= [\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_1}\|^p + \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_2}\|^p]^{\frac{1}{p}}\\ &\le [(\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_1}\|)^p + (\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}}\\ &\le [(\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}} + [(\|\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_2}\|)^p]^{\frac{1}{p}}\\ &= \|\boldsymbol{x}\|_p^* + \|\boldsymbol{y}\|_p^*.\end{aligned}$$

Karena $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ memenuhi sifat-sifat norm maka $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ mendefinisikan norm pada ℓ^p.

Lemma 3.3

Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$, maka berlaku $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p. Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p,\|\cdot,\cdot\|_p)$ maka berlaku $\lim_{k,m\to\infty}\|\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x_m},\boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k,m\to\infty}\|\boldsymbol{x_k}-\boldsymbol{x_m},\boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p.

Definisi 3.4

Misalkan X adalah ruang vektor dan terdapat dua norm di X yang dinotasikan $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|^*$. Norm $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|^*$ ekuivalen jika terdapat $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in X$ berlaku

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{x}\|^* \le \beta\|\boldsymbol{x}\|.$$ [5]

Teorema 3.5

Misalkan $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^p, maka norm $\|\cdot\|_p^*$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot\|_p$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^p$. Tanpa mengurangi keumuman, $\boldsymbol{a_1} = a_j^{(1)} = (1,0,0,\dots)$ dan $\boldsymbol{a_2} = a_j^{(2)} = (0,1,0,\dots)$ dengan $i,j \in \mathbb{N}$.

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p = \sum_{j\ne1}^{\infty}|x_j|^p.$$

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p = \sum_{j\ne2}^{\infty}|x_j|^p.$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{j\ne1}^{\infty}|x_j|^p + \sum_{j\ne2}^{\infty}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j\ge3}^{\infty}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j\ge3}^{\infty}|x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_1}\|_p^p + \|\boldsymbol{x},\boldsymbol{a_2}\|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p^* .$$

Sehingga diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_p^*$.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \left[|x_1|^p + |x_2|^p + 2\sum_{j\ge3}^{\infty}|x_j|^p\right] \le 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_p .$$

Sehingga diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^* \le 2^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_p^*$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_p^* \le 2^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_p$. Jadi, terbukti bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_p^*$ ekuivalen dengan norm $\|\boldsymbol{x}\|_p$.

Teorema 3.6

Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$. Begitu pula dengan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan barisan $(\boldsymbol{x_k}), (\boldsymbol{x_m}) \in \ell^p$.

a. $(\Longrightarrow)$ Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$ akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$.
   Dari **Lemma 3.3** diperoleh $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ sehingga,
   $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p^* = \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_p + \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0 + 0 = 0.$
   Karena $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p^* = 0$ artinya barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p^*$. Berdasarkan **Teorema 3.5** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p$.
   $(\Longleftarrow)$ Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm $\|\cdot\|_p$ akan ditunjukkan barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$.
   Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^p$ dan pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K(\varepsilon)$ dengan $k \in \mathbb{N}$ berlaku
   $$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}.$$
   Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku
   $$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|_p &\leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_p && \text{(Ketaksamaan Hadamard)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p} \|\boldsymbol{y}\|_p \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

b. $(\Longrightarrow)$ Jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.
   Dari **Lemma 3.3** maka diperoleh $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p = 0$ dan $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0$ sehingga, $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p^* = \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_p + \lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_p = 0 + 0 = 0.$
   Karena $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p^* = 0$ artinya $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_p^*$.
   Berdasarkan **Teorema 3.5** maka $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy terhadap norm $\|\cdot\|_p$.
   $(\Longleftarrow)$ Jika $(\boldsymbol{x_k}) \in \ell^p$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ akan dibuktikan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$.
   Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in \ell^p$. Pilih $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K(\varepsilon)$ berlaku
   $$\|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p < \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p}.$$
   Pilih $K_1(\varepsilon) = K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, m \geq K_1(\varepsilon)$ berlaku
   $$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{y}\|_p &\leq \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_p && \text{(Ketaksamaan Hadamard)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{y}\|_p} \|\boldsymbol{y}\|_p \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Akibat 3.7

Ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ merupakan ruang Banach-2.

Bukti: Misalkan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$. Berdasarkan **Teorema 3.6** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$. Karena ℓ^p terhadap norm $\|\cdot\|_p$ merupakan ruang norm yang lengkap, akibatnya $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm $\|\cdot\|_p$. Berdasarkan **Teorema 3.6** diperoleh $(\boldsymbol{x_k})$ juga konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ terhadap norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_p$. Sehingga diperoleh bahwa $(\ell^p, \|\cdot,\cdot\|_p)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap atau disebut dengan ruang Banach-2.

Langkah yang sama untuk membuktikan bahwa $(\ell^\infty, \|\cdot,\cdot\|_\infty)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap.

Teorema 3.8
Fungsi yang didefinisikan pada (12) merupakan norm-2 pada ℓ^{∞}.

Teorema 3.9
Misalkan ($\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^{∞}, maka fungsi

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}^{*} = \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_{\infty}, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_{\infty}\}, \qquad \boldsymbol{x} \in \ell^{p}$$

mendefinisikan norm di ℓ^{p}.

Teorema 3.10
Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^{\infty}$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_{\infty}$, maka berlaku $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_{\infty} = 0$ dan $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_{\infty} = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^{∞}. Jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^{\infty}, \|\cdot,\cdot\|_{\infty})$ maka berlaku $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_1}\|_{\infty} = 0$ dan $\lim_{k,m\to\infty} \|\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_m}, \boldsymbol{a_2}\|_{\infty} = 0$ dengan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ himpunan bebas linier di ℓ^{∞}.

Teorema 3.11
Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}^{*}$ ekuivalen dengan norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}$ pada ℓ^{∞}.
Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in \ell^{\infty}$ dan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di ℓ^{∞}.
Tanpa mengurangi keumuman, $\boldsymbol{a_1} = \left(a_j^{(1)}\right)_j = (1,0,0,0 \dots)$ dan $\boldsymbol{a_2} = \left(a_j^{(2)}\right)_j = (0,1,0,0 \dots)$ dengan $j \in \mathbb{N}$.
Diperoleh, $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}/\{1\}} |x_n|$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}/\{2\}} |x_n|$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}^{*} &= \sup\{\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|_{\infty}, \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|_{\infty}\} \\
&= \sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}/\{1\}} |x_n|, \sup_{n\in\mathbb{N}/\{2\}} |x_n|\right\} \\
&= \sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots\} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa, $\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}^{*} = \|\boldsymbol{x}\|_{\infty}$.

Teorema 3.12
Barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^{\infty}$ dalam norm-2 $\|\cdot,\cdot\|_{\infty}$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x_k})$ konvergen ke $\boldsymbol{x} \in \ell^{\infty}$ dalam norm $\|\cdot\|_{\infty}$. Begitu pula dengan $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\ell^{\infty}, \|\cdot,\cdot\|_{\infty})$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x_k})$ barisan Cauchy di ruang norm $(\ell^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$.

Akibat 3.13
Ruang norm-2 $(\ell^{\infty}, \|\cdot,\cdot\|_{\infty})$ merupakan ruang Banach-2.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa fungsi $\|\cdot,\cdot\|$ pada ℓ^{p} dengan $1 \leq p < \infty$ memenuhi sifat norm-2, sehingga $(\ell^{p}, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norm-2. Selanjutnya, $(\ell^{p}, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap dengan menunjukkan setiap barisan Cauchy dalam ruang ℓ^{p} konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang ℓ^{p}.

REFERENSI

[1] E. Kreyzig, Introductory Functional Analysis with Applications, New York: John Willey & Sons, 1978.

[2] S. Konca, M. Idris and H. Gunawan, "A new 2-inner product p-summable sequences," *Egyptian Mathematical Journal,* vol. 24, pp. 244-249, 2016.

[3] C. Alsina, J. Sikorska and M. S. Thomas, Norm Derivatives Characterizations Of Inner Product Spaces, vol. 1. No.3, Singapore: World Scientific, 2010.

[4] M. N. Aris and M. Nur, "Kelengkapan Ruang lp pada Ruang Norm-n," *Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi,* vol. 10, pp. 124-131, 2014.

[5] M. A. Ackoglu, P. F. Bartha and D. M. Ha, Analysis in Vector Spaces, vol. 1, New York: John Willey, 2009.

[6] U. Rafflesia, "Kekonvergenan Suatu Barisan Pada Ruang Norm-2," *Jurnal Gradien,* vol. 4, pp. 333-336, 2008.

[7] A. Kobin, Analysis of Banach Spaces, New York: Springer, 2014.

[8] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis Second Edition, New York: Springer, 1990.

[9] H. Gunawan, "The Space of p-summable Sequences and Its Natural n-Norm," *Mathematics Subject Classification,* pp. 1-13, 2001.

[10] R. G. Bartle and D. R. Sherbet, Introduction to Real Analysis Fourth Edition, Amerika: John Willey & Sons, 2000.

[11] S. Kumarasen, Topology of Metric Spaces, Mumbai: Alpha Science Ltd, 2005.

[12] J. Manuhutu, Y. A. Lesnua and H. Batkunde, "Ruang Norm-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2," *Jurnal Matematika Integratif,* vol. 10, pp. 139-145, 2014.

[13] M. Nur, "Ruang Norm-n dan Ruang Hasil Kali Dalam," *Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi,* pp. 86-91, 2012.

[14] F. Y. Rumlawang, "Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces," *Pure and Applied Mathematical Journal,* pp. 42-46, 2020.

[15] S. M. Gazali, Fungsional-n Linear Terbatas dan Ortogonalitas di Ruang Norm-n, Bandung: ITB, 2012.