Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 1(5) (2022), Pages 256-263
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian

Nurul Hafidhoh Anwar[1], M. Nafie Jauhari[2], Dewi Ismiarti[2]

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

nurulhafidhohanwar2@gmail.com, nafie.jauhari@mat.uin-malang.ac.id, dewiismi@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Pewarnaan titik (*vertex coloring*) pada graf G adalah pemberian warna pada titik-titik di G sedemikian sehingga titik-titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai semua titik G disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Suatu graf disebut planar jika dapat digambarkan pada bidang sehingga tidak ada sisi-sisinya yang berpotongan. Dari graf planar dapat dibentuk suatu graf yang disebut graf dual. Setiap wilayah dari graf planar dapat diwakili oleh titik dari graf dual. Dua titik dari graf dual terhubung langsung jika titik yang mewakili wilayah pada graf planar bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama. Graf berlian yang dinotasikan dengan Br_n adalah salah satu model graf yang digunakan untuk merepresentasikan struktur jaringan. Pada penelitian ini ditunjukkan bilangan kromatik dari dual graf berlian adalah

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

Kata kunci: Pewarnaan Titik, Bilangan Kromatik, Graf Dual, Graf Berlian

Abstract

A vertex coloring of a graph G, is an assigments of colors to the vertices of G, such that no two adjacent vertices are assigned the same color. The least number of colors needed for an vertices coloring of a graph G is the chromatic number, denoted by $\chi(G)$. A graph is said to be planar if it can be drawn in the plane so that no edges crossing except at endpoints. A dual graph is constructed from the planar graph. Each region in planar graph can be represented by a vertex of the dual graph. Two vertices are connected if the region represented by these vertices are neugbours and have a common border. A diamond graph denoted by Br_n, can be used to model structure networks. In this study, it is shown that the chromatic number of dual diamond graph is

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ and } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

Keywords: Vertex Coloring, Chromatic Number, Dual Graph, Diamond Graph

PENDAHULUAN

Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari titik dan sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Graf banyak digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan. Caranya dengan merepresentasikan masalah ke dalam graf, sehingga dapat mempermudah menemukan solusi dari permasalahan tersebut. Misalnya, graf digunakan untuk merepresentasikan jaringan komunikasi yang menghubungkan pusat data. Titik graf mewakili pusat data dan sisi graf mewakili jaringan komunikasi [1]. Graf G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$ yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ yang saling lepas dari $V(G)$. Terdapat fungsi *incidence* (keterkaitan) $\psi_G(e)$ yang menghubungkan setiap sisi dari G dengan pasangan tak

Submitted: 20 Desember 2021 Reviewed: 26 Juli 2022 Accepted: 28 Agustus 2022

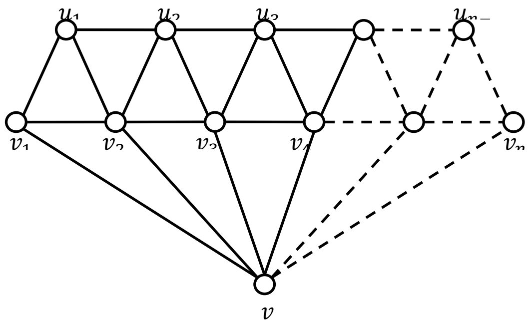
terurut (tidak harus berbeda) dari titik G. Jika e adalah sisi dan u dan v adalah titik-titik G sehingga $\psi_G(e) = \{u, v\}$, maka e dikatakan menghubungkan (join) titik u dan v, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Banyaknya titik di G disebut orde G, dinotasikan dengan $v(G)$. Sedangkan banyaknya sisi di G disebut ukuran, dinotasikan dengan $e(G)$ [2]. Misalkan u dan v adalah dua titik yang berbeda di G dan $\psi_G(e) = \{u, v\}$ adalah suatu sisi di G. Titik u dan titik v dikatakan terhubung langsung/bertetangga *(adjacent)* di G jika dihubungkan oleh sisi e. Sedangkan sisi e terkait/bersinggungan *(incident)* dengan titik u dan v [3]. Derajat titik v di graf G yang dinotasikan dengan $d_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait dengan titik v (untuk setiap *loop* dihitung sebagai dua sisi). Jika G adalah graf sederhana, $d_G(v)$ adalah banyaknya tetangga v di G. Titik berderajat nol disebut debagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Derajat minimum G dinotasikan dengan $\delta(G)$, sedangkan derajat maksimum G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ [2].

Terdapat beberapa bentuk graf, salah satunya adalah graf planar. Suatu graf disebut planar jika dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan/bersilangan kecuali mungkin pada titik-titik akhir sisi tersebut [4]. Suatu graf mungkin saja planar meskipun biasanya digambar dengan sisi yang saling berpotongan, karena graf tersebut dapat digambarkan kembali dengan cara berbeda tanpa adanya perpotongan [1]. Selanjutnya, dari graf planar dapat dibentuk suatu graf yang disebut graf dual. Setiap wilayah dari graf planar dapat digambarkan sebagai titik dari graf dual. Dua titik dari graf dual terhubung langsung jika dan hanya jika titik yang mewakili wilayah pada graf planar bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama [4]. Graf planar adalah salah satu bentuk graf. Graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan/bersilangan kecuali mungkin pada titik-titik akhir dari sisi-sisi tersebut. Graf G disebut graf planar jika dan hanya jika berupa graf sederhana. Graf planar yang digambar pada bidang disebut graf bidang *(plane graph)* [5].

Misalkan G adalah graf planar yang direpresentasikan sebagai graf bidang. Dapat dibentuk graf lain G^* yang disebut dual dari G yang dibentuk melalui tahap sebagai berikut. Pertama, di dalam setiap wilayah *(region)*/muka *(face)* dari G dapat dibentuk suatu titik v^* (titik-titik ini adalah titik di G^*). Kedua, setiap sisi e dari G dapat digambar suatu garis e^* yang memotong sisi e dan menghubungkan titik v^* (garis-garis ini adalah sisi di G^*) [6]. Graf Berlian yang dinotasikan Br_n adalah graf dengan definisi sisi dan titik sebagai berikut [7] :

$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \le i \le n\} \cup \{u_i | 1 \le i \le n-1\}$,

$E(Br_n) = \{vv_i | 1 \le i \le n\} \cup \{v_i v_i | 1 \le i \le n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \le i \le n-2\} \cup$
$\{u_i v_i | 1 \le i \le n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\}$



Gambar Graf Br_n

Salah satu topik pada graf yang biasa digunakan untuk memodelkan permasalahan adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf menjadi salah satu topik pada teori graf yang sangat menarik, terutama karena sejarahnya yang menarik, hasil teoritisnya yang beragam, masalah yang belum terpecahkan, dan berbagai aplikasinya [8]. Terdapat tiga macam pewarnaan dalam graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*map coloring*) [9]. Misalkan G suatu graf. Pewarnaan-k dari graf G yaitu pewarnaan semua titik-titik dengan menggunakan k warna sedemikian sehingga dua titik G yang berhubungan langsung memiliki warna yang berbeda. Jika G memiliki pewarnaan-k maka G dapat diwarnai dengan k

warna. Suatu pewarnaan-k dari graf G biasanya ditunjukkan dengan melabeli titik-titik dari graf G dengan warna $1,2,3,\dots,k$ [5]. Di dalam pewarnaan graf tidak hanya mewarnai titik dengan warna yang berbeda dari warna titik tetangganya saja, akan tetapi diharapkan dapat menggunakan warna seminimal mungkin. Banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi warna yang berbeda pada titik yang terhubung langsung disebut bilangan kromatik [1]. Bilangan kromatik dari graf G adalah banyaknya minimum warna berbeda yang digunakan untuk mewarnai suatu graf G, sehingga dua titik yang terhubung langsung memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan k-kromatik jika $\chi(G) = k$. Bilangan kromatik pada pewarnaan titik dinotasikan dengan $\chi(G)$ [9].

Penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh Mostafa Javedankherad, dkk (2020) tentang aplikasi pewarnaan graf pada jaringan dengan memodelkan jaringan ke dalam bentuk graf, lalu melakukan pewarnaan pada graf tersebut [10]. Penelitian lain oleh Nurdin Hinding, dkk (2018) yang menyatakan bahwa jaringan erat kaitannya dengan graf berlian. Artikel tersebut membahas tentang jaringan yang dibentuk menggunakan graf berlian. Artikel tersebut membahas tentang jaringan yang dibentuk menggunakan graf berlian [11]. Berdasarkan latar belakang tersebut, pada penelitian ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai pewarnaan graf dengan lebih fokus pada pewarnaan titik dengan judul "Bilangan Kromatik Titik dari Dual Graf Berlian".

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka, yaitu dengan cara mempelajari teori-teori yang berhubungan dengan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian. Sumber penelitian ini diperoleh dari beberapa buku, skripsi, dan literatur ilmiah yang mendukung dan berkaitan dengan penelitian. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode analisis deskriptif, yaitu mendeskripsikan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian.

Langkah-langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan graf berlian Br_n, untuk $n = 2,\dots,6$, menentukan dualnya kemudian menentukan bilangan kromatiknya untuk memunculkan dugaan.
2. Mencari dual dari graf berlian Br_n, untuk $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
3. Menentukan pewarnaan titik dari dual graf berlian Br_n, untuk $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
4. Menentukan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian Br_n, untuk $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh data sebagai berikut.

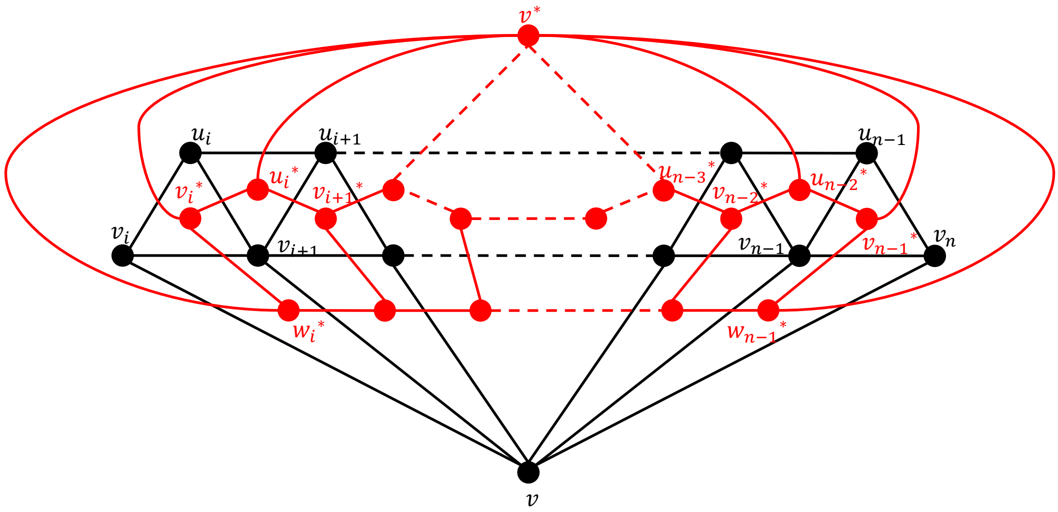
Tabel 1 Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{V(Br_n{}^*)}$	$\boldsymbol{\chi(Br_n{}^*)}$
2	3	3
3	6	4
4	9	3
5	12	3
6	15	3

Keterangan:
n = banyaknya titik v pada graf berlian
$V(Br_n{}^*)$ = Banyak titik dari dual graf berlian
$\chi(Br_n{}^*)$ = bilangan kromatik titik dari dual graf berlian
Berdasarkan tabel di atas, maka diperoleh dugaan bahwa bilangan kromatik dari dual graf berlian adalah sebagai berikut

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

Perhatikan gambar dual dari graf berlian $Br_n{}^*$ berikut.



Gambar 1 Dual dari graf berlian $\mathrm{Br_n}^*$

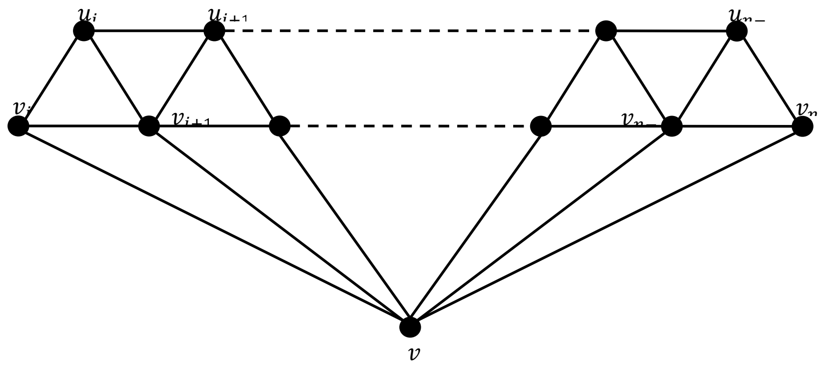
Misalkan v^* adalah titik yang mewakili wilayah yang tidak ada batasnya yang terdapat di luar graf. Misalkan $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2, \ldots, n-2$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $u_i, u_{i+1}, v_{i+1} \in V(Br_n)$.
Misalkan $v_i{}^*$, $i = 1,2, \ldots, n-1$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $v_i, v_{i+1}, u_i \in V(Br_n)$.
Misalkan $w_i{}^*$, untuk $i = 1,2, \ldots, n-1$ didefinisikan sebagai titik yang mewakili wilayah yang dibangun oleh titik $v, v_i, v_{i+1} \in V(Br_n)$.

Teorema 1 *Bilangan kromatik dari dual graf berlian adalah*

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \; dan \; n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

Bukti.

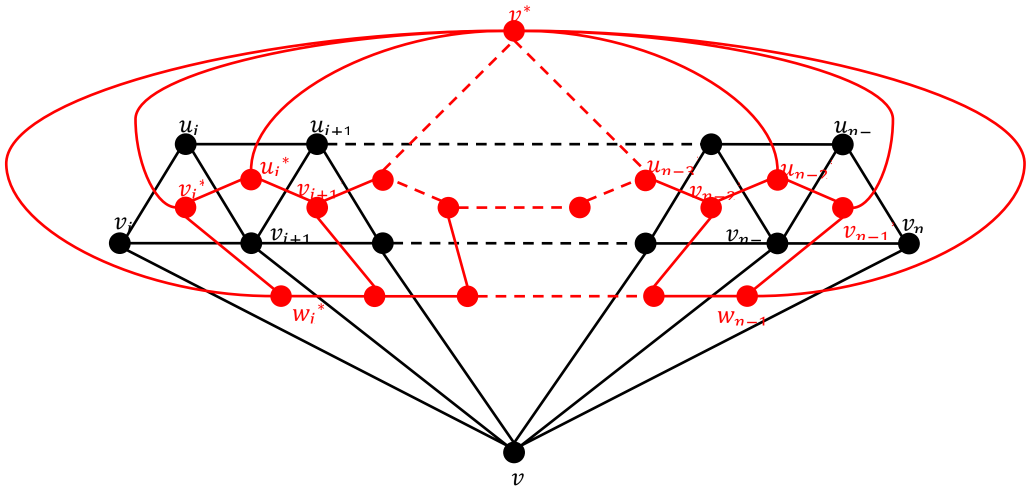
Perhatikan dual dari graf berlian $Br_n{}^*$ berikut



Gambar 2 Graf berlian Br_n

Dari gambar di atas, diketahui $V(Br_n) = \{u_1, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}, v_1, v_{i+1}, \ldots v_n\}$.

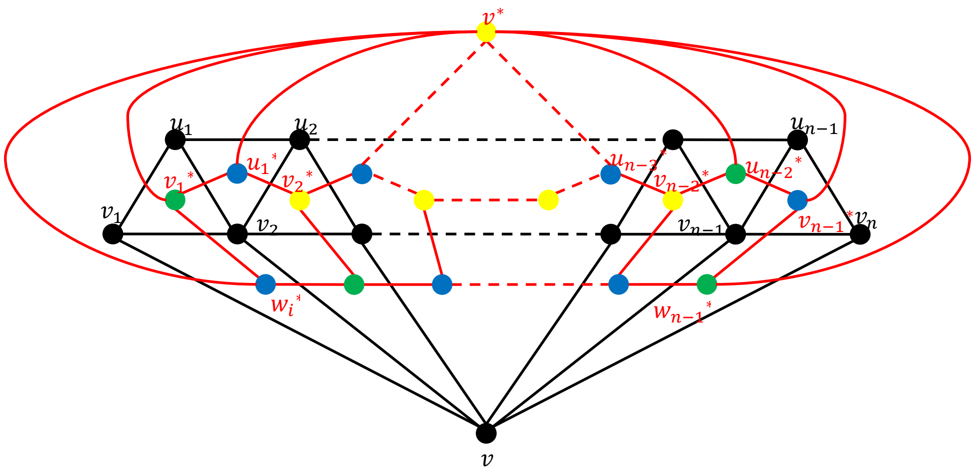
Selanjutnya, akan dibentuk dual dari graf berlian $Br_n{}^*$. Misalkan graf $Br_n{}^*$ yang merupakan dual dari graf berlian Br_n, dibentuk dengan membuat titik $u_i{}^*, \ldots, u_n{}^*, v_i{}^*, \ldots, v_{n-1}{}^*, w_i{}^*, \ldots, w_{n-1}{}^*$ untuk setiap wilayah di graf Br_n (termasuk satu wilayah di wilayah luar graf Br_n). Dua titik pada graf $Br_n{}^*$ yang mewakili dua wilayah terhubung langsung jika kedua wilayahnya bertetangga dan dibatasi oleh sisi yang sama.



Gambar 3 Dual dari graf berlian $Br_n{}^*$

Didefinisikan dual dari graf berlian Br_n adalah $Br_n{}^*$. Misalkan $u_i{}^*, \dots, u_n{}^*, v_i{}^*, \dots, v_{n-1}{}^*, w_i{}^*, \dots, w_{n-1}{}^*$ adalah titik dual dari graf berlian. Selanjutnya akan dilakukan pewarnaan titik pada graf $Br_n{}^*$. Dua titik yang saling terhubung langsung atau bertetangga harus diberi warna berbeda. Berikut digambarkan bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$.

1. Bilangan kromatik titik dari dual graf $Br_n{}^*$, untuk n ganjil.

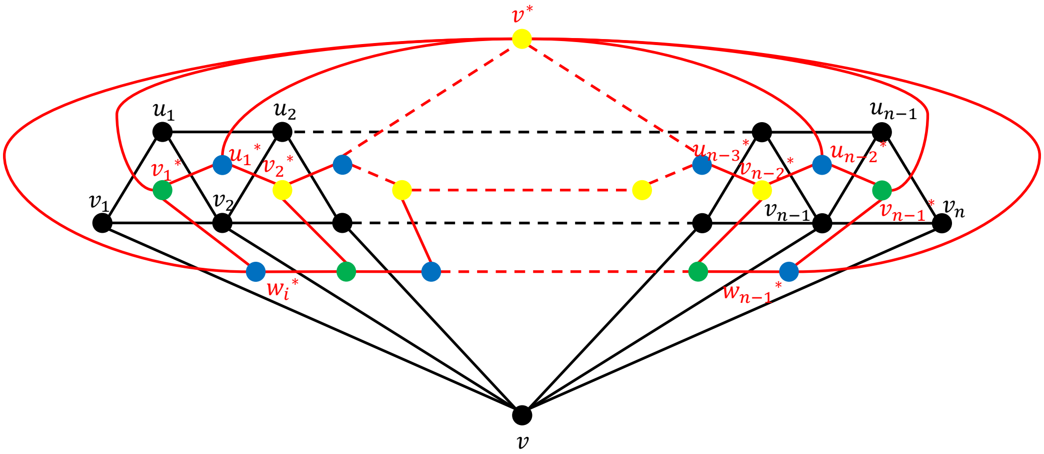


Gambar 4 Bilangan kromatik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$, untuk n ganjil

Dari gambar di atas, diketahui bahwa tidak terdapat dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna sama.

- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2,3, \dots, n-3$ selalu berwarna 3 (biru).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_1{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_1{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $w_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik w^* selalu berwarna 3 (biru) jika ganjil.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_{n-2}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_{n-2}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika ganjil.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_{n-1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_{n-1}{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) jika ganjil.
- Titik $u_i{}^*$ bertetangga dengan titik $v_{i+1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik $u_i{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) dan titik $v_{i+1}{}^*$ selalu berwarna 1 (kuning).

2. Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$, untuk n genap.

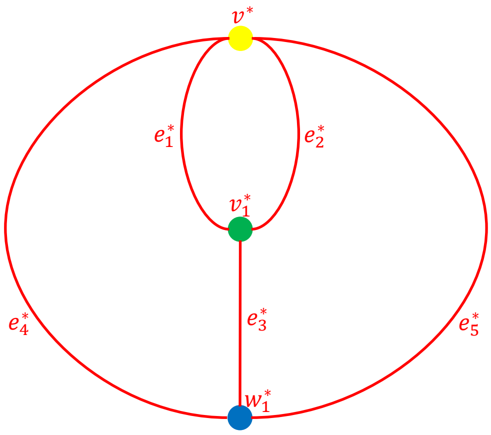


Gambar 5 Bilangan kromatik dari dual graf berlian $Br_n{}^*$, untuk n genap

Dari gambar di atas, diketahui bahwa tidak terdapat dua titik yang bertetangga yang mempunyai warna sama.

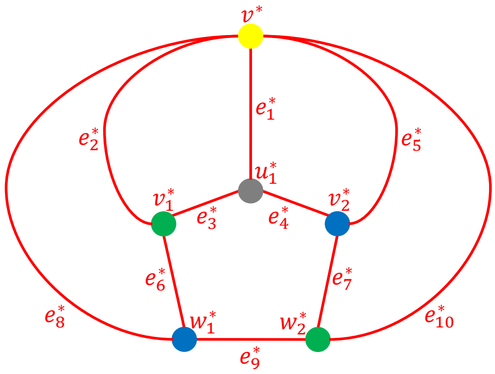
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_i{}^*$, untuk $i = 1,2,3, \dots, n-3$ selalu berwarna 3 (biru).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_1{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_1{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau).
- Titik v^* bertetangga dengan titik $w_i{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik w^* selalu berwarna 2 (biru) jika genap.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $u_{n-2}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $u_{n-2}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika genap.
- Titik v^* bertetangga dengan titik $v_{n-1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik v^* selalu berwarna 1 (kuning) dan titik $v_{n-1}{}^*$ selalu berwarna 2 (hijau) jika genap.
- Titik $u_i{}^*$ bertetangga dengan titik $v_{i+1}{}^*$ tidak pernah mempunyai warna sama karena, titik $u_i{}^*$ selalu berwarna 3 (biru) dan titik $v_{i+1}{}^*$ selalu berwarna 1 (kuning).

Misal untuk $n = 2$, telah diketahui bahwa $\chi(Br_2{}^*) = 3$, dapat dilihat pada gambar dibawah sebagai berikut



Gambar 6 Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_2{}^*$

Untuk $n = 3$, telah diketahui bahwa $\chi(Br_3{}^*) = 4$, dapat dilihat pada gambar dibawah sebagai berikut



Gambar 7 Bilangan kromatik titik dari dual graf berlian $Br_3{}^*$

Untuk $n \geq 4$, definisikan $x: V(Br_n{}^*) \to \mathbb{N}$ dengan

$x(v^*) = 1$

$x(u_i{}^*) = 3, i = 1,2,3, \ldots, n-3$

$$x(u_{n-2}{}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

$x(v_1{}^*) = 2$

$x(v_i{}^*) = 1, i = 2,3, \ldots, n-2$

$$x(v_{n-1}{}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$x(w_i{}^*) = \begin{cases} 2, & \text{jika } i \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kerena titik-titik yang terhubung langsung telah diwarnai dengan warna berbeda, maka x merupakan fungsi pewarnaan titik sejati pada $Br_n{}^*$. Dengan demikian

$$\chi(Br_n{}^*) \leq 3. \qquad (1)$$

Karena titik-titik $u_1{}^*, v_1{}^*, v^*$ membentuk suatu C_3, maka

$$\chi(Br_n{}^*) \geq 3. \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa $\chi(Br_n{}^*) = 3, \forall n \geq 4$.

Dengan demikian

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n \neq 3 \\ 4, & \text{jika } n = 3. \end{cases}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik dari graf berlian adalah sebagai berikut

$$\chi(Br_n{}^*) = \begin{cases} 3, & n = 2 \text{ dan } n \geq 4 \\ 4, & n = 3. \end{cases}$$

DAFTAR RUJUKAN

[1] K. H. Rosen, "Discrete Mathematics and Its Applications (7th ed)," The McGraw-Hill Companies , United States, 2012.

[2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, "Graduate Texts in Mathematics: Graph Theory," Springer, 2008.

[3] R. J. Wilson and J. J. Watkins, "Graph An Introductory Approach. Terjemahan: Theresia M.H Tirta," IKIP Surabaya University Press 376 hal, Surabaya , 1990.

[4] S. Lipschutz and M. L. Lipson, "Theory and Problems of Discrete Mathematics (3rd ed)," McGraw-Hill, United States, 2007.

[5] I. K. Budayasa, "Teori Graf & Aplikasinya," Unesa University Press, Surabaya, 2007.

[6] R. J. Wilson, "Introduction to Graph Theory (4th ed)," Addison Wasley Longman Limited, England, 1996.

[7] M. R. Syafnur, L. Yulianti and D. Welyyanti, "Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Berlian Brn untuk n=3 dan n=4, VII(2)," 105-111, 2018.

[8] G. Chartrand, L. Lesniak and P. Zhang, "Graphs & Digraphs (6th ed)," Chapman & Hall/RC, Boca Raton, 2016.

[9] J. L. Gross, J. Yellen and M. Anderson, "Graph Theory and Its Applications (3rd ed)," Chapman & Hall/ CRC, Boca Raton, 2019.

[10] M. Javedankherad, Z. Zeinalpour-Yazdi and F. Ashtiani, "Content Placement in Cache Networks Using Graph-Coloring," *IEEE Systems Journal,* vol. 14, no. 3, pp. 3129-3138, 2017.

[11] N. Hinding, D. Firmayasari, H. Basir, M. Bača and A. Semaničová-Feňovčíková, "On Irregularity Strength of Diamond Network," *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics,* vol. 15, no. 3, pp. 291-297, 2018.