Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 2(1) (2022), Pages 19-24
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

# Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

**Mohamad Abdul Ba'is*, Hairur Rahman, Erna Herawati**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

17610007@student.uin-malang.ac.id*, hairur@mat.uin-malang.ac.id, faridatul_mahya@uin-malang.ac.id

**Abstrak**

Ketaksamaan Hölder merupakan ketaksamaan dasar yang ada di analisis fungsional.Ketaksamaan Hölder banyak digunakan untuk membuktikan ketaksamaan lain. Pada penelitian ini dilakukan pengembangan pengaplikasian ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen. Ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah Ketaksamaan Hölder integral karena ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen merupakan ruang fungsi. Penelitian ini menunjukkan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen sesuai dengan norm fungsi dan karakteristiknya.

**Kata kunci**: Ketaksamaan Hölder; Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen; Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen; Syarat Cukup

**Abstract**

Hölder inequality is a basic inequality in functional analysis. The inequality used for proofing other inequalities. In this research, the development of the application of the Hölder inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent and Morrey spaces with variable exponent. The integral Hölder inequality is used because the Lebesgue spaces with variable exponent and Morrey spaces with variable exponent is a function space.This research shows the sufficient condition of Hölder inequality in Lebesgue spaces with variable exponent and the Morrey spaces with variable exponent according to the norm of the function and its characteristics.

**Keywords**: Hölder Inequality; Lebesgue Spaces with Variable Exponent; Morrey Spaces with Variable Exponent; Sufficient Condition

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan disiplin ilmu yang paling awal berkembang dan dikenal [1]. Ilmu matematika berkembang sangat pesat sejak sekitar 4000 tahun lalu. Salah satu cabang ilmu matematika yang termasuk induk dari ilmu matematika adalah bidang analisis yang juga mengalami perkembangan yang sangat pesat. Salah satu ruang dalam analisis yang memiliki peran penting yang sering dibahas adalah ruang Lebesgue atau dikenal dengan simbol $L^p$. Ruang lebesgue merupakan ruang Banach di mana $1 \leq p \leq \infty$. Ruang Lebesgue memiliki peranan penting dalam bidang ilmu di bidang analis terutama pada Analisis Fungsional, Teori Ukuran, Teori Integral, dan lainnya. Pada tahun 1991, Kovacik mengembangkan ruang Lebesgue dengan variabel eksponen atau bisa dilambangkan dengan $L^{p(\cdot)}$ [2]. Misalkan $1 \leq \mathrm{p}(\cdot) < \infty$ dan $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, ruang Lebesgue dengan variabel eksponen didefinisikan sebagai

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^{p(\cdot)}: \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \infty\right\}, \tag{1.1}$$

di mana normnya didefinisikan sebagai

Submitted: 20 Desember 2021 Reviewed: 26 Agustus 2022 Accepted: 28 Oktober 2022
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v2i1.14619

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}. \tag{1.2}$$

Masing-masing ruang fungsi memiliki kondisi lemahnya, begitu juga dengan ruang Lebesgue. Misalkan $1 \leq p(\cdot) < \infty$. $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Ruang Lebesgue lemah dengan variabel eksponen $wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ adalah himpunan semua fungsi terukur $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sehingga [3]

$$\|f\|_{wL^{p(\cdot)}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} < \infty, \tag{1.3}$$

dengan $|x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda$.

C.B. Morrey memberikan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu ruang Morrey atau dilambangkan dengan $\mathcal{M}_q^p$ di mana $1 \leq p \leq \infty$ [4]. Dalam perkembangannya, ruang Morrey yang dikembangkan oleh Almeida di mana $1 < q(\cdot) < \infty$ dan $p(\cdot)$ pada $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dikenal dengan ruang Morrey dengan Variabel Eksponen yang dilambangkan dengan $\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$.

Misalkan $1 \leq p(\cdot) \leq q(\cdot) < \infty$, $p(\cdot).q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, maka ruang Morrey dengan variabel eksponen $M_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai [3]

$$\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} < \infty\right\}, \tag{1.4}$$

di mana normanya didefinisikan sebagai,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}. \tag{1.5}$$

Sedangkan $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}$ sebagai ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen. Misalkan $1 \leq p(\cdot) \leq q(\cdot) < \infty$, $p(\cdot).q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, maka norm dari Ruang Morrey lemah dengan variabel eksponen $w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai [3]

$$\begin{aligned} \|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} = \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} &|B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma \\ &|\{x \in B(a.r) : |f(x)| > \gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} < \infty. \end{aligned} \tag{1.6}$$

dengan $|\{x \in B(a.r) : |f(x)| > \gamma\}|$ menyatakan ukuran lebesgue dari $\{x \in B(a.r) : |f(x)| > \gamma\}$.

Selain ruang fungsi, topik pembahasan yang banyak dibahas dalam penelitian adalah ketaksamaan. Salah satu ketaksamaan yang ada pada bidang analisis adalah Ketaksamaan Hölder. Ketaksamaan Hölder pertama kali diperkenalkan Leonard James Rogers pada tahun 1888 dan kemudian diperbaiki oleh Otto Hölder pada tahun 1889 [5]. Ketaksamaan Hölder sendiri merupakan salah satu ketaksamaan yang digunakan untuk membuktikan ketaksamaan-ketaksamaan lain bidang analisis. Pengaplikasian pertama pada ketaksamaan Hölder adalah di ruang Lebesgue menggunakan Hölder konjugat sebagai syarat cukup untuk membuktikannya. Setelah berjalannya waktu banyak pengembangan-pengembangan yang dilakukan oleh para peneliti. Salah satunya adalah Ifronika (2018) yang mengaplikasikan ketaksamaan Hölder di ruang Morrey di mana pada penelitian ini peneliti menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu membuktikannya [6]. Ketaksamaan Hölder yang digunakan adalah Ketaksamaan Hölder integral.

## METODE

### Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk membuktikan syarat cukup ketaksamaan Hölder pada ruang fungsi tersebut adalah:

1) Menunjukkan definisi norm masing-masing di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen.
2) Mengaplikasikan definisi norm masing-masing ruang tersebut pada ketaksamaan Hölder.

3) Membuktikan syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan ruang Morrey dengan variabel eksponen menggunakan definisi norm pada masing-masing ruang
4) Menarik kesimpulan atas hasil yang telah dibuktikan

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue dengan Variabel Eksponen

**Teorema 1.1** *Misalkan $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sedemikian sehingga $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. Jika $f(x) \in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g(x) \in L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ maka*

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}} \tag{1.7}$$

*di mana $fg \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

***Bukti.*** Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{L^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\ |\ g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} dx \times \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2(\cdot)} dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{L^{p_2(\cdot)}}
\end{aligned}$$

Jadi syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$.

### Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Lebesgue Lemah dengan Variabel Eksponen

**Teorema 1.2** *Misalkan $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sedemikian sehingga $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. Jika $f(x) \in wL^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ dan $g(x) \in wL^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ maka*

$$\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}} \tag{1.8}$$

*di mana $fg \in wL^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

***Bukti.*** Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{wL^{p(\cdot)}} &= \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)||g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \lambda \left( |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}}\ |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \right) \\
&\leq \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \times \sup_{\lambda>0} \lambda\, |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{wL^{p_1(\cdot)}}\|g\|_{wL^{p_2(\cdot)}}
\end{aligned}$$

Jadi syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$.

**Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Morrey dengan Variabel Eksponen**

**Teorema 1.3** *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *dan* $q(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ *dan* $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika*
$f(x) \in \mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in \mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}} \tag{1.9}$$

*di mana* $fg \in \mathcal{M}_{q\,(\cdot)}^{p\,(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

***Bukti.*** Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} &= \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)g(x)|^{p(\cdot)}\,dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\quad \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}|g(x)|^{p_2(\cdot)}\,dx\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&\quad \left\{\left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\,dx\right)\left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\,dx\right)\right\}^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |f(x)|^{p_1(\cdot)}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \\
&\quad \times \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \left(\int_{B(a.r)} |g(x)|^{p_2(\cdot)}\,dx\right)^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}}
\end{aligned}$$

Jadi syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan
$\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$.

**Syarat Cukup Ketaksamaan Hölder di Ruang Morrey Lemah dengan Variabel Eksponen**

**Teorema 1.4** *Misalkan* $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *dan* $q(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *sedemikian sehingga* $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$ *dan* $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. *Jika*
$f(x) \in w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *dan* $g(x) \in w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *maka*

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} \leq \|f\|_{w\mathcal{M}_{q_1(\cdot)}^{p_1(\cdot)}} \|g\|_{w\mathcal{M}_{q_2(\cdot)}^{p_2(\cdot)}} \tag{3.4}$$

*di mana* $fg \in w\mathcal{M}_{q\,(\cdot)}^{p\,(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

***Bukti.*** Diketahui $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$ kemudian dari definisi $\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}$ diperoleh,

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}} &= \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |f(x)g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q(\cdot)}-\frac{1}{p(\cdot)}}\gamma|\{x\in B(a.r): |f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}|B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&\qquad \gamma|\{x\in B(a.r): |f(x)||g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p(\cdot)}} \\
&\leq \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_1(\cdot)}-\frac{1}{p_1(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |f(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_1(\cdot)}} \\
&\times \sup_{a\in R^n.\ r.\gamma>0} |B(a.r)|^{\frac{1}{q_2(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}}\gamma\,|\{x\in B(a.r): |g(x)|>\gamma\}|^{\frac{1}{p_2(\cdot)}} \\
&= \|f\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}\|g\|_{w\mathcal{M}_{q(\cdot)}^{p(\cdot)}}
\end{aligned}
$$

Jadi syarat cukup ketaksamaan Hölder di ruang Lebesgue dengan variabel eksponen adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$, $\frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{q(\cdot)}$.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dibahas, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa syarat cukup ketaksamaan Hölder diruang Lebesgue dengan variabel eksponen dan lemahnya adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dan $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$. Sedangkan syarat cukup ketaksamaan Hölder diruang Morrey dengan variabel eksponen dan lemahnya adalah $p(\cdot).p_1(\cdot).p_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $q(\cdot).q_1(\cdot).q_2(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. $\frac{1}{p_1(\cdot)} + \frac{1}{p_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}\ dan\ \frac{1}{q_1(\cdot)} + \frac{1}{q_{2(\cdot)}} \leq \frac{1}{p(\cdot)}$.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] S. Krantz, An Episodic History of Mathematics, Louis: h.iii, 2006.

[2] O. K. d. J. Rakosnik, “On Space L^p(x) and W^k,p(x),” *Czechoslovak Math,* vol. 41, no. (116), p. 592–618, 1991.

[3] X. d. T. S. Shao, “Weak Type Estimates of Variable Kernel Fractional Integral and Their Commutators on Variable Exponent Morrey Spaces,” *Hindawi,* vol. 2, no. 1, pp. 1-11, 2019.

[4] C. Morrey, “On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations,,” *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 43, no. 2, p. 126–166, 1938.

[5] X. G. d. Z. J. Y. Li, “The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Holder Inequality,” *Symmetry,,* p. 10, 2018.

[6] I. M. A. A. d. G. H. Ifronika, “ Generalized Holder’s Inequality in Morrey Spaces,” *Matematicki Vesnik,* vol. 4, no. 70, p. 326–337, 2018.

[7] R. M. McLeod, K. Ranson dan L. Biehl, The generalized Riemann integral, JSTOR, 1980.

[8] C. Godsil dan G. F. Royle, Algebraic graph theory, vol. 207, Springer Science \& Business Media, 2013.

[9] A. Gara, M. A. Blumrich, D. Chen, G.-T. Chiu, P. Coteus, M. E. Giampapa, R. A. Haring, P. Heidelberger, D. Hoenicke, G. V. Kopcsay dan others, “Overview of the Blue Gene/L system architecture,” *IBM Journal of Research and Development,* vol. 49, no. 2, pp. 195-212, 2005.

[10] J. France, J. H. Thornley dan others, Mathematical models in agriculture., Butterworths, 1984.

[11] F. E. Browder, “Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space,” *Proceedings of the National Academy of Sciences,* vol. 54, no. 4, pp. 1041-1044, 1965.

[12] M. J. Berger dan J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations," *Journal of computational Physics,* vol. 53, no. 3, pp. 484-512, 1984.