Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 2(4) (2023), Pages 138-143
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan

Luluk Afifah*, Imam Sujarwo, Muhammad Khudzaifah

lulukafifah161096@gmail.com*, imsuha@mat.uin-malang.ac.id, khudzaifah@uin-malangac.id

Abstrak

Teori graf merupakan topik yang sampai saat ini masih menjadi materi yang sangat penting untuk dibahas. Hal tersebut dikarenakan sampai saat ini teori graf memiliki banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu sosial. Yang melatar belakangi penelitian ini adalah [1], [2], serta jurnal dari [3]. Penelitian ini membahas indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan.
Suatu graf nilradikal titik-titiknya merupakan unsur *nilpotent* tak nol, saat domainnya adalah gelanggang komutatif dengan satuan, ia membentuk graf komplit hanya jika gelanggang komutatif dengan satuan yang kita pakai dibatasi pada bilangan bulat positif modulo n ($\mathbb{Z}_n$). Dimana n merupakan kuadrat dari bilangan prima p yang kurang dari sama dengan 3 ($n = p^2, p \geq 3$). Diketahui pola umum indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan berturut-turut adalah $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$ dan $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)(p-2)^2$. Dalam pengaplikasiannya, bentuk umum tersebut dapat berguna sebagai parameter numerik suatu graf pada *chemical graph theory*, topologi molekuler, dan *mathematical chemistry*.

Kata Kunci: Indeks Harmonik; Indeks Gutman; Graf Komplit; Graf Nilradikal

Abstract

Graph theory is a topic that is still an important subject to discuss. This is because until now graph theory has many practical applications in various disciplines, for example in biology, computer science, economics, informatics engineering, linguistics, mathematics, health, and social sciences. This study discusses the Gutman index of nilradical graphs in the commutative ring with unity.
A nilradical graph whose vertices are non-zero nilpotent elements, when the domain is a commutative ring with units, it forms a complete graph only if the commutative ring with units we use is limited to a positive integer modulo n (Z_n). Where n is the square of the prime number p which is less than equal to 3. It is known that the general pattern of harmonic indices and Gutman indices of nilradical graphs in the commutative ring with unity are $H\left(N\left(Z_{n=p^2}\right)\right) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$ and $Gut\left(N\left(Z_{n=p^2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)(p-2)^2$ respectively. In its application, this general form can be used as a numerical parameter of a graph in chemical graph theory, molecular topology, and mathematical chemistry.

Keywords: Harmonic Indeks; Gutman Index; Complete Graph; Nilradical Graph

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan topik yang sampai saat ini masih menjadi materi yang sangat penting untuk dibahas. Hal tersebut dikarenakan sampai saat ini teori graf memiliki banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin ilmu, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematik, kesehatan, dan ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan.

Sebagaimana graf, Indeks topologi memiliki banyak kegunaan sampai saat ini dan masih menjadi topik hangat untuk dibahas, hal tersebut karena ada banyak cabang dari indeks topologi yang mungkin diteliti lebih lanjut disandingkan dengan graf-graf invariant. Salah satu indeks topologi yang menarik untuk diteliti adalah indeks harmonik dan indeks Gutman. Indeks

Submitted: 6 Juli 2022 Reviewed: 20 Februari 2023 Accepted: 28 April 2023
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v2i4.14902

harmonik merupakan indeks yang diperoleh dari perluasan *randic index*. Sedangkan, indeks Gutman merupakan modifikasi dari indeks Schultz. Yang mana keduanya merupakan perluasan dari indeks wiener. penelitian terkait indeks Gutman yang telah diteliti adalah indeks Gutman dari graf terhubung terbatas berorde n dan derajat minimum δ yang diteliti oleh Jaya Percival Mazorodzea, Simon Mukwembib, dan Tomas Vetrikc pada tahun 2014.

Graf yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah graf nilradikal. Graf nilradikal adalah graf yang titik-titiknya adalah unsur-unsur nilpotent tak-nol dan dua titiknya dihubungkan oleh satu sisi jika dan hanya jika hasil kali kedua titik tersebut adalah nol. penelitian tentang unsur-unsur nilradikal dari gelanggang monoid hasil kali yang khusus (unik) yang telah diteliti oleh Abdollah Alhevaz, Ebrahim Hashemi, dan Michal Ziembowski pada tahun 2017.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah disebutkan, belum ditemukan penelitian mengenai pola umum indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf nilradikal, sehingga dianggap perlu untuk melakukan penelitian terkait indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf nilradikal dengan domain gelanggang komutatif dengan satuan.

METODE

Penulisan penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Penulisan penelitian ini dilakukan dengan beberapa langkah, yakni sebagai berikut:

1. Menggambar graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 9, modulo 25, modulo 49, dan modulo 121.
2. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan gambar graf nilradikal $N(\mathbb{Z}_9), N(\mathbb{Z}_{25}), N(\mathbb{Z}_{49}), N(\mathbb{Z}_{121})$.
3. Menentukan pola umum indeks harmonik dan indeks Gutman berdasarkan gambar graf nilradikal $N(\mathbb{Z}_9), N(\mathbb{Z}_{25}), N(\mathbb{Z}_{49}), N(\mathbb{Z}_{121})$.
4. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gelanggang komutatif dengan satuan yang akan diteliti menurut jurnal rujukan yaitu jurnal dari Shalini Chandra, Om Prakash, dan Sheela Suthar adalah bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n$), dan kami membatasi penelitian kami pada nilai n nya, yang mana n tersebut adalah kuadrat bilangan prima yang lebih dari sama dengan 3 ($n = p^2, p \geq 3$). Alasan dipilihnya n adalah kuadrat dari bilangan prima adalah jika dipilih $n = 4$ atau $p = 2$ maka graf yang terbentuk adalah graf trivial atau graf yang hanya memiliki 1 titik saja. Sehingga, dipilihlah p yang lebih dari sama dengan 3, yaitu $p = \{3,5,7,11,13, \dots, \infty\}$. Karena n merupakan kuadrat dari p, maka $n = \{9,25,49,121,169, \dots, \infty\}$ yang mana graf-graf tersebut membentuk graf komplit, sehingga dapat ditemukan pola umum indeks harmonik dan indeks Gutman dari graf-graf tersebut. Kami hanya melakukan penelitian dengan 5 sampel saja yaitu, $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{49}, \mathbb{Z}_{121}, \mathbb{Z}_{169}$. Hal tersebut dikarenakan ketidakmampuan kami menghitung secara manual dalam menentukan titik-titik dari graf yang nilradikal dari bilangan prima lebih dari 13 ($p > 13$).

1. Indeks harmonik graf nilradikal

Percobaan pertama adalah pada bilangan bulat modulo 9. Bilangan tersebut memiliki unsur-unsur sebagai berikut $\{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7],[8]\}$. Apabila unsur-unsur tersebut dioperasikan dengan operasi perkalian $(\cdot)$ maka diperoleh tabel Cayley seperti dibawah ini:

Tabel 3. 1 Bilangan Bulat Modulo 9

$\mathbb{Z}_9/.$	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]

[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[1]	[3]	[5]	[7]
[3]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]
[4]	[0]	[4]	[8]	[3]	[7]	[2]	[6]	[1]	[5]
[5]	[0]	[5]	[1]	[6]	[2]	[7]	[3]	[8]	[4]
[6]	[0]	[6]	[3]	[0]	[6]	[3]	[0]	[6]	[3]
[7]	[0]	[7]	[5]	[3]	[1]	[8]	[6]	[4]	[2]
[8]	[0]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

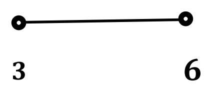
Berdasarkan definisi graf nilradikal, dari tabel 3.1 diketahui bahwa unsur-unsur yang hasil kalinya nol adalah [3] dan [6] atau dapat ditulis $\Gamma(\mathbb{Z}_9) = \{[3], [6]\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa [3] dan [6] merupakan unsur *nilpotent.*

$[3]^9 \equiv [0](mod\ 9)$

$[6]^9 \equiv [0](\ mod\ 9)$

Karena [3] dan [6] adalah unsur *nilpotent*, maka diperoleh gambar graf nilradikal dari $\mathbb{Z}_9$ berikut:

$\boldsymbol{N}(\mathbb{Z}_9)$



Gambar 1. 1 Graf Nilradikal $\boldsymbol{N}(\mathbb{Z}_9)$

Graf nilradikal dari bilangan bulat modulo 9 ($N(\mathbb{Z}_9)$) diatas memiliki 2 titik dan 1 sisi dan dari gambar 3.1 diketahui *degree* dari setiap titik, yaitu:

$deg(3) = 1$

$deg(6) = 1$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal $H(N(\mathbb{Z}_9))$ adalah

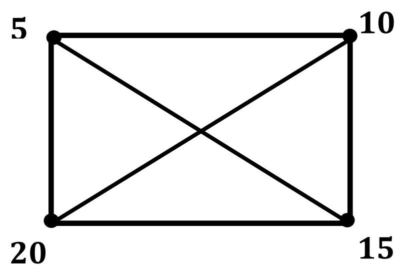
$$H(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{2}{deg(u) + deg(v)}$$

$$H(N(\mathbb{Z}_9)) = \frac{2}{deg(3) + deg(6)}$$

$$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Percobaan kedua yaitu pada bilangan bulat modulo 25. Dengan cara yang sama diperoleh gambar dari graf nilradikal pada bilangan bulat modulo 25 seperti berikut:

$\boldsymbol{N}(\mathbb{Z}_{25})$:



Gambar 1.2 graf nilradical $\boldsymbol{N}(\mathbb{Z}_{25})$

Sehingga indeks harmonik dari graf nilradikal $H(N(\mathbb{Z}_{25}))$ adalah

$$H(N(\mathbb{Z}_{25})) = \frac{2}{deg(5) + deg(10)} + \frac{2}{deg(5) + deg(15)} + \frac{2}{deg(5) + deg(20)} + \frac{2}{deg(10) + deg(15)} + \frac{2}{deg(10) + deg(20)} + \frac{2}{deg(15) + deg(20)}$$

$$=\frac{2}{3+3}+\frac{2}{3+3}+\frac{2}{3+3}+\frac{2}{3+3}+\frac{2}{3+3}+\frac{2}{3+3}=6\left(\frac{2}{3+3}\right)=6\left(\frac{2}{6}\right)=2$$

Dengan cara yang sama diketahui indeks harmonik graf nilradikal dari $\mathbb{Z}_{49}, \mathbb{Z}_{121}, \mathbb{Z}_{169}$ berturut-turut adalah 3,5,6. Sehingga dari sampel-sampel tersebut didapat bentuk umum indeks harmonik graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yaitu:

$$\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$$

Bukti:

jika $n = p^2$, dimana p adalah bilangan prima yang lebih besar sama dengan tiga $p \geq 3$, maka unsur-unsur *nilpotent* (*vertex*) dari $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah kelipatan dari p, yang banyaknya adalah $(p-1)$ dan titik-titik tersebut membentuk graf komplit (berdasarkan bukti dari Teorema 1 dan Teorema 2). Karena indeks harmonik adalah penjumlahan bobot dari $\frac{2}{deg(u)+deg(v)}$ yang mana banyaknya dua titik berpasangannya membentuk pola bilangan segitiga yaitu $\left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2+(p-2)\right)\right)$

Sehingga, pola umum untuk indeks harmonik graf nilradikal pada bilangan bulat modulo n adalah:

$$H(G)=\sum_{u,v\epsilon V(G)}\frac{2}{deg(u)+deg(v)}$$

$$H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2}))=\sum_{u,v\epsilon V(N(\mathbb{Z}_n))}\frac{2}{deg(u)+deg(v)}$$

$$=\frac{2}{deg(u)+deg(v)}\left(sebanyak\ \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{(p-2)+(p-2)}\left(sebanyak\ \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{2(p-2)}\left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)$$

$$=\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$$

Sehingga, $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2}))=\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$ (Terbukti).

2. Indeks Gutman Graf Nilradikal

Berdasarkan graf yang telah terbentuk pada Sub. Bab 1, maka indeks Gutman dari graf Nilradikal dari bilangan bulat modulo 9adalah:

$$Gut(G)=\sum_{u,v\in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$Gut(N(\mathbb{Z}_9))=deg(3)deg(6)d(3,6)$$

$$=(1)(1)(1)=1$$

Sampel kedua adalah bilangan bulat modulo 25, indeks Gutman dari bilangan bulat modulo 25 adalah:

$$Gut(G)=\sum_{u,v\in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$Gut(N(\mathbb{Z}_{25}))=deg(5)deg(10)d(5,10)+deg(5)deg(15)d(5,15)+deg(5)\ deg(20)d(5,20)+\cdots+deg(15)deg(20)d(15,20)$$

$$=(3)(3)(1)+(3)(3)(1)+(3)(3)(1)+\cdots+(3)(3)(1)$$

$$=6(3^2)(1)=54$$

Dengan cara yang sama diperoleh indeks Gutman dari $\mathbb{Z}_{49}, \mathbb{Z}_{121}, \mathbb{Z}_{169}$ berturut-turut adalah 375,3645,7986. Sehingga dari sampel-sampel tersebut didapat bentuk umum indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yaitu:

$$Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2}\right)(p-2)^2$$

Bukti:
jika $n = p^2$, dimana p adalah bilangan prima yang lebih besar sama dengan tiga $p \geq 3$, maka unsur-unsur *nilpotent* dari $N(\mathbb{Z}_n)$ adalah kelipatan dari p, dimana banyaknya unsur *nilpotent* yang habis dibagi p^2 adalah $(p-1)$ dan unsur-unsur tersebut membentuk graf komplit (berdasarkan bukti dari Teorema 1 dan Teorema 2). Sebagai akibat dari definisi 4, banyaknya *distance* (jarak) yang diperoleh membentuk pola bilangan segitiga yaitu $\left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)$ yang mana tiap jarak memiliki nilai yang sama yaitu 1, hal tersebut dikarenakan graf tersebut adalah graf komplit, yang juga menyebabkan *degree* (derajat) dari tiap titiknya sama yaitu sebanyak $(p-2)$. Sehingga bentuk umum dari indeks Gutman graf nilradikal pada bilangan bulat modulo n adalah:

$$Gut(G) = \sum_{u,v \in V(G)} deg(u)deg(v)d(u,v)$$

$$\begin{aligned}
Gut(N(\mathbb{Z}_n)) &= \sum_{u,v \in V(N(\mathbb{Z}_n))} deg(u)deg(v)d(u,v) \\
&= deg(u)deg(v)d(u,v) + \cdots + deg(y)deg(z)d(y,z) \\
&\quad \left(sebanyak\ \left(\tfrac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)\right), \ni y,z \in V(N(\mathbb{Z}_n)) \\
&= (p-2)(p-2)(1) + \cdots + (p-2)(p-2)(1) \\
&\quad \left(sebanyak\ \left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left((p-2)^2 + (p-2)\right)\right)(p-2)(p-2)(1) \\
&= \left(\frac{(p-2)^2 + (p-2)}{2}\right)(p-2)^2
\end{aligned}$$

Sehingga, $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$ (terbukti).

KESIMPULAN

Bentuk umum indeks harmonik dan indeks Gutman graf nilradikal pada gelanggang komutatif dengan satuan yang dibatasi pada bilangan bulat modulo n, dengan $n = p^2$ dan $p \geq 3$, berturut – turut adalah $H(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \frac{(p-2)^2+(p-2)}{2(p-2)}$ dan $Gut(N(\mathbb{Z}_{n=p^2})) = \left(\frac{(p-2)^2+(p-2)}{2}\right)(p-2)^2$. Bentuk umum tersebut adalah sebagai parameter numerik suatu graf pada *chemical graph theory*, topologi molekuler, dan *mathematical chemistry*

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih penulis kami ucapkan kepada para dosen yang telah membimbing dan mengarahkan, kepada kedua orang tua, dan kepada semua pihak yang membantu dan selalu mendukung kami dalam menyelesaikan penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdusakir, Azizah, dan Nofandika, 2009. Teori Graf. Malang: UIN-Malang Press.

[2] Chatrand, Gary, Linda Lesniak and Ping Zhang. 1986. Graph and Digraphs Sixth Edition, New York: CRC Press

[3] Hall, Lowel H.;Kier, Lemont B. 1976. Molecular Connectivity in Chemistry and Drug Research. Boston: Academic Press. ISBN 0-12-406560-0ves

[4] Li, Jian Xi dan Shiu, Wai Chee. 2014. The Harmonic Index of a Graph. Rocky Montain Journal of Mathematics. Vol. 44. No. 5

[5] Linda G. And Jimmie Gilbert. 2009. Element of Modern Algebra, Seventh Edition. USA: Cengage Learning

[6] Purwanto. 1998. Matematika Diskrit. Malang: IKIP Malang

[5] Shalini Chandra, Om Prakash and Sheela Suthar. 2017. Some properties of the nilradical and non-nilradical graphs over finite commutative ring Zn .Algebra and Discrete Mathematics Research Article. Vol. 24. No. 2

[6] Wijaya, A. 2009. Matematika Diskrit. {Book Online}. Bandung: Politeknik Telkom