Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 2(2) (2022), Pages 79-83
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua Graf Koprima dari Grup Matriks Upper Unitriangular atas Ring Bilangan Bulat Modulo Prima

Muhammad Aris Abdillah*, Dewi Ismiarti

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

muhammadarisabdillah@gmail.com*, dewiismi@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Graf koprima dari suatu grup G adalah graf Γ_G dengan G sebagai himpunan titiknya dan dua titik berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika orde keduanya relatif prima. Misalkan p adalah bilangan prima, maka G_p melambangkan grup perkalian matriks 2×2 *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo p. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui graf koprima Γ_{G_p} serta menentukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari graf koprima Γ_{G_p} untuk $p \geq 3$. Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
$$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

Kata kunci: Indeks eksentrisitas Zagreb pertama; Indeks eksentrisitas Zagreb kedua; Graf koprima; Matriks *upper unitriangular*

Abstract

The coprime graph of a group G is a graph Γ_G with G is its set of vertices and any two distinct vertices are adjacent if and only if their order are relatively prime. Let p be a prime number, then G_p denotes the multiplicative group of 2×2 upper unitriangular matrices over ring of integers modulo p. The purposes of this research are to study the coprime graph Γ_{G_p} and find the first and the second Zagreb eccentricity indices of Γ_{G_p} for $p \geq 3$. The results of this research are as follows.

1. First Zagreb eccentricity index of coprime graph Γ_{G_p} is
$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Second Zagreb eccentricity index of coprime graph Γ_{G_p} is
$$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

Keywords: First Zagreb eccentricity index; Second Zagreb eccentricity index; Coprime graph; Upper unitriangular matrices

PENDAHULUAN

Suatu graf G didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut *titik*, bersama himpunan $E \subseteq \{\{u,v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ yang anggotanya disebut dengan *sisi*. Dalam graf G, pasangan dua titik di E dikatakan juga *terhubung langsung*. Himpunan titik dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan dengan $E(G)$. Suatu graf G dikatakan *terhubung* jika untuk sebarang titik $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan $u - v$ sehingga u dan v terhubung [1].

Grup adalah suatu struktur dalam aljabar abstrak. Grup didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi kondisi tertutup, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsurnya memiliki invers [2].

Graf koprima dari grup G didefinisikan sebagai graf yang titik-titiknya adalah unsur-unsur di G dan dua titik berbeda di graf tersebut terhubung langsung jika orde dari unsur-unsur tersebut

Submitted: 23 Maret 2022 Reviewed: 26 Oktober 2022 Accepted: 28 Desember 2022
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v2i2.15668

saling relatif prima. Sehingga $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ keduanya terhubung langsung jika dan hanya jika $(|x|, |y|) = 1$. Graf koprima dari G dinotasikan dengan Γ_G [3].

Grup matriks *upper unitriangular* atas suatu ring dengan unsur kesatuan merupakan suatu grup terhadap operasi perkalian dari himpunan matriks-matriks upper unitriagular yang entrinya adalah unsur dari ring tersebut. Adapun matriks *upper unitriangular* adalah jenis dari matriks segitiga atas (*upper triangular*) dengan entri pada diagonal utama matriks tersebut adalah satu [4]. Grup matriks *upper unitriangular* atas ring bilangan bulat modulo prima dinotasikan dengan G_p.

Eksentrisitas titik v dari graf terhubung G didefinisikan sebagai maksimum jarak titik v dan u di G dengan $v \neq u$. Eksentrisitas titik v disimbolkan dengan $e(v)$. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua dari graf G merupakan pengembangan dari materi eksentrisitas titik di graf G yang secara berturut-turut didefinisikan sebagai berikut [5].

$$E_1(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)^2$$

dan

$$E_2(G) = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} e(u)e(v).$$

Pada artikel ini akan dijelaskan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf koprima Γ_{G_p} untuk p suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Selanjutnya, dibahas indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} untuk p bilangan prima dan $p \geq 3$.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengkaji jurnal-jurnal dan buku-buku matematika yang berkaitan dengan graf koprima, indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan dan kedua, dan grup matriks *upper unitriangular*. Grup matriks *upper unitriangular* tersebut adalah grup terhadap operasi perkalian matriks. Matriks-matriks *upper unitriangular* yang dimaksud adalah matriks 2×2 dengan entri-entri matriks adalah unsur dari ring bilangan bulat modulo prima.

Pembahasan pada penelitian ini dimulai dengan menemukan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf koprima Γ_{G_p} untuk bilangan prima p dan $p \geq 3$. Selanjutnya ditemukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} untuk bilangan prima p dan $p \geq 3$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai himpunan titik dan himpunan sisi dari graf koprima Γ_{G_p}, indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p}, dan indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} akan disajikan dalam beberapa teorema dan lema beserta pembuktiannya.

1. Himpunan Titik dan Himpunan Sisi Graf Koprima Γ_{G_p}

Teorema 1

Misalkan p adalah bilangan prima dengan $p \geq 3$ dan $a = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Maka graf koprima Γ_{G_p} adalah suatu graf dengan himpunan titik

$$V\left(\Gamma_{G_p}\right) = \{a^0, a, \dots, a^{p-1}\}$$

dan untuk $0 \leq i, j \leq p-1$, jika $i \neq 0$ maka

$$\{a^j, a^i\} \in E(\Gamma_{G_p}) \text{ jika dan hanya jika } j = 0.$$

Khususnya, himpunan sisi dari graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \{\{a^0, a^i\} | 1 \leq i \leq p-1\}.$$

Bukti:
Berdasarkan definisi graf koprima diperoleh bahwa

$$V\left(\Gamma_{G_p}\right) = \{a^0, a, \ldots, a^{p-1}\}.$$

Misalkan $0 \leq i, j \leq p-1$. Perhatikan bahwa jika $1 \leq k \leq p-1$ maka $\left|a^k\right| > 1$, sehingga berdasarkan akibat Teorema Lagrange (lihat [2]) diperoleh $\left|a^k\right| = p$. Jika $i \neq 0$ dan $j \neq i$ maka

$$\begin{aligned} \left\{a^j, a^i\right\} \in E\left(\Gamma_{G_p}\right) &\Leftrightarrow \left(\left|a^j\right|, \left|a^i\right|\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\left|a^j\right|, p\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \left|a^j\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow j = 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh himpunan sisi pada graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \left\{\{a^0, a^i\}\middle| 1 \leq i \leq p-1\right\}.$$

2. Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_p}, p bilangan prima dan $p \geq 3$

Lema 1
Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Eksentrisitas titik $u \in V(\Gamma_{G_p})$ pada graf koprima Γ_{G_p} adalah

$$e(u) = \begin{cases} 1, \text{untuk } u = a^0 \\ 2, \text{untuk } u \neq a^0 \end{cases}$$

Bukti:
Jika $u = a^0$, karena a^0 terhubung langsung dengan semua titik yang lain di graf koprima Γ_{G_p} maka $d(a^0, v) = 1$ untuk setiap $v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{a^0\}$. Sehingga diperoleh eksentrisitas dari titik a^0 adalah

$$\begin{aligned} e(a^0) &= \text{maks}\left\{d(a^0, v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{a^0\}\right\} \\ &= \text{maks}\,\{d(a^0, a), d(a^0, a^2), \cdots, d(a^0, a^{p-1})\} \\ &= \text{maks}\,\{1, 1, \cdots, 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi untuk $u = a^0$ diperoleh $e(u) = 1$.
Jika $u \neq a^0$, karena $\left|V\left(\Gamma_{G_p}\right)\right| \geq 3$ maka terdapat $v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right)$ dengan $u \neq v \neq a^0$. Perhatikan karena $v \neq a^0$ maka $\{u, v\} \notin E(\Gamma_{G_p})$ dan akibatnya $d(u, v) > 1$. Pandang lintasan

$$u - v: (u, a^0, v)$$

yang mengakibatkan $d(u, v) \leq 2$. Oleh karena itu diperoleh $d(u, v) = 2$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} e(u) &= \text{maks}\,\left\{d(u, v)\middle| v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right) - \{u\}\right\} \\ &= \text{maks}\,\{1, 2\} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diberikan suatu teorema tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} untuk suatu bilangan prima p dan $p \geq 3$ sebagai berikut.

Teorema 2
Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama graf koprima dari grup G_p adalah

$$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$

Bukti:
Berdasarkan Lema 1, diperoleh indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah sebagai berikut:

$$E_1\left(\Gamma_{G_p}\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma_{G_p}\right)} e(v)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= e(a^0)^2 + \sum_{v\in V\left(\Gamma_{G_p}\right)-\{a^0\}} e(v)^2 \\
&= 1^2 + (p-1)\cdot 2^2 \\
&= 1 + (p-1)\cdot 4 \\
&= 1 + 4p - 4 \\
&= 4p - 3.
\end{aligned}
$$

3. Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dari Graf Koprima Γ_{G_p}, p bilangan prima dan $p \geq 3$

   Teorema 3

   Misalkan p adalah suatu bilangan prima dan $p \geq 3$. Maka indeks eksentrisitas Zagreb kedua graf koprima dari grup G_p adalah

   $$E_2(\Gamma_{G_p}) = 2p - 2.$$

   Bukti:

   Perhatikan bahwa himpunan sisi dari graf Γ_{G_p} adalah

   $$E\left(\Gamma_{G_p}\right) = \left\{\{a^0, a^i\}\middle|1 \leq i \leq p-1\right\},$$

   sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
E_2\left(\Gamma_{G_p}\right) &= \sum_{\{u,v\}\in E\left(\Gamma_{G_p}\right)} e(u)e(v) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} e(a^0)e\left(a^i\right) \\
&= (p-1)(1\cdot 2) \\
&= (p-1)2 \\
&= 2p - 2.
\end{aligned}
$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, untuk sebarang bilangan prima p dengan $p \geq 3$ diperoleh beberapa kesimpulan berikut.

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
   $$E_1(\Gamma_{G_p}) = 4p - 3.$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb kedua dari graf koprima Γ_{G_p} adalah
   $$E_2\left(\Gamma_{G_p}\right) = 2p - 2.$$

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Bu Dewi Ismiarti dan Pak Mohammad Nafie Jauhari yang telah membimbing proses pengerjaan tulisan ini. Tidak lupa penulis juga berterimakasih kepada orang tua dan adik penulis yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis

DAFTAR RUJUKAN

[1] G. Chartrand, L. L. and Z. P., Graphs and Digraphs (Sixth Edition), Boca Raton: CRC Press, 2016.

[2] J. A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra 8th Edition, Boston: Brook/Cole Cengage Learning, 2012.

[3] H. R. Dorbidi, "A Note On the Coprime Graph of A Group," *International Journal of Group Theory,* pp. 17-22, 2016.

[4] A. S. Oliinyk and V. I. Sushchanskii, "Free Group of Infinite Unitriangular Matices," *Mathematical Note,* vol. 67, no. 03, pp. 320-324, 2000.

[5] C. K. Gupta, B. S. Shetty dan V. Lokesha, "On The Graph of nilpotent matrix group of lenght one," *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications,* vol. 8, no. 01, pp. 1-31, 2016.