

Analisis Model Epidemii SEIR Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 pada Penyebaran COVID-19 di Indonesia

Anis Putri Rahmadhani*, Ari Kusumastuti, Juhari

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

rahmadhanianis595@gmail.com*, arikusumastuti@gmail.com,
juhari@uin-malang.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang analisis model epidemi *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan memperhatikan faktor pembatasan interaksi masyarakat dan persentase vaksinasi sebagai parameter model. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penerapan model *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dalam menangani COVID-19 di Indonesia. Langkah-langkah dalam menganalisis model tersebut adalah dengan menentukan kestabilan model yang menghasilkan stabil asimtotik lokal, kemudian dilakukan penerapan sekaligus simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dalam menangani COVID-19 di Indonesia. Hasil perhitungan menunjukkan pengaruh pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi dalam penurunan kasus infeksi COVID-19. Di mana, ketika melakukan pembatasan interaksi masyarakat, banyaknya kasus infeksi COVID-19 lebih rendah dari pada sebelum dilakukan pembatasan interaksi masyarakat, dan persentase vaksinasi yang semakin tinggi juga mengakibatkan kasus infeksi semakin melandai. Penelitian ini memberikan informasi bahwa jika pembatasan interaksi masyarakat terus dilakukan dengan terus meningkatkan presentase vaksinasi, maka diperkirakan grafik kasus positif harian COVID-19 akan semakin melandai dan mendekati nol. Sehingga, penambahan kasus baru akan semakin berkurang dan diharapkan pandemi COVID-19 ini segera berakhir.

Kata kunci: Model Epidemii SEIR; Runge-Kutta Orde empat; COVID-19

Abstract

This study discusses the analysis of the *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) epidemic model using the fourth-order Runge-Kutta method on the spread of COVID-19 in Indonesia by taking into account the factors limiting community interaction and the percentage of vaccination as model parameters. The purpose of this study was to determine the application of the *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) model using the fourth-order Runge-Kutta method in dealing with COVID-19 in Indonesia. The steps in analyzing the model are to determine the stability of the model that produces local asymptotic stability, then carry out the implementation as well as simulation using the fourth-order Runge-Kutta method in dealing with COVID-19 in Indonesia. The calculation results show the effect of limiting community interaction and vaccination in reducing cases of COVID-19 infection. Where, when limiting public interaction, the number of cases of COVID-19 infection is lower than before the restrictions on community interaction were carried out, and the higher percentage of vaccinations also resulted in more sloping infection cases. This study provides information that if restrictions on community interaction continue to be carried out by continuing to increase the percentage of vaccinations, it is estimated that the daily graph of positive cases of COVID-19 will be increasingly sloping and close to zero. Thus, the addition of new cases will decrease and it is hoped that the COVID-19 pandemic will end soon.

Keywords: SEIR Model of Epidemii; Fourth Order Runge-Kutta Method; COVID-19

1. PENDAHULUAN

Berbagai fenomena dapat didekati dengan ilmu matematika, salah satunya bidang pemodelan. Pemodelan matematika sendiri merupakan bidang ilmu yang memformulasikan dan menjelaskan fenomena atau permasalahan pada dunia nyata ke dalam bentuk model matematika [1]. Salah satu fenomena yang terjadi saat ini adalah tengah dihadapkan dengan wabah penyakit baru COVID-19. Jumlah kasus penyakit yang disebabkan virus korona ini terus meningkat di berbagai belahan dunia. Laju peningkatan jumlah kasus infeksi, kematian maupun kesembuhan, berbeda-beda di setiap daerah. Dan setiap daerah atau negara memiliki kebijakan sendiri untuk menahan penyebaran penyakit yang terjadi di wilayahnya [2].

Salah satu model matematika dalam menggambarkan penyebaran penyakit COVID-19 adalah model epidemi *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) [2] [3] [4] [5] [6]. Model tersebut digunakan untuk memperkirakan dinamika penyebaran penyakit COVID-19 yang nantinya dapat digunakan dalam menarik kesimpulan awal tentang efektivitas tindakan kesehatan masyarakat dalam menangani penyakit. Model epidemi SEIR terdiri dari empat sub populasi yaitu *Susceptible* disimbolkan dengan (S) merupakan kelas individu sehat tapi rentan terpapar penyakit, *Exposed* disimbolkan dengan (E) merupakan kelas individu terpapar penyakit, *Infected* disimbolkan dengan (I) merupakan kelas individu yang telah terinfeksi penyakit, *Recovered* disimbolkan dengan (R) merupakan kelas individu yang telah sembuh [4].

Penelitian terkait COVID-19 sebelumnya yaitu mengenai perumusan model matematika dengan asumsi yang berbeda-beda, namun secara garis besar memiliki tujuan yang sama, yaitu mempelajari penyebaran COVID-19 dan penggambaran tindakan masyarakat dalam menangani kasus infeksi COVID-19. Penelitian ini akan membahas keadaan penyebaran COVID-19 di tahun 2021, di mana pada bulan Juli 2021 pemerintah melakukan perpanjangan kebijakan PPKM karena terjadi kenaikan kasus serta mencapai puncaknya yaitu sekitar 56,757 orang terinfeksi [7]. Salah satu aturan PPKM yaitu adanya pembatasan interaksi masyarakat dengan melakukan *work from home* (WFH) 50% agar interaksi dengan individu terinfeksi berkurang [8]. Dan persentase vaksinasi terus meningkat [9].

Oleh karena itu, penelitian ini akan mengkaji tentang penerapan model epidemi *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan memperhatikan pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi sebagai parameter model.

2. METODE

Tahapan atau langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis model epidemi SEIR pada penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan faktor pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi sebagai parameter model adalah memastikan kestabilan dari model yang akan digunakan [2] [3] [10], kemudian melakukan penerapan dan simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde empat [11] dalam menangani COVID-19 di Indonesia. Berikut adalah tahapan penerapan metode Runge-Kutta orde empat pada model:

- a. Menentukan formulasi model dalam bentuk Runge-Kutta orde empat.
- b. Menentukan nilai awal dan parameter model, waktu (t) serta interval waktu atau jarak langkah (h) yang digunakan.
- c. Menghitung nilai tetapan yang terdapat pada rumus Runge-Kutta orde empat menggunakan formulasi yang telah diperoleh.
- d. Mensubstitusi nilai tetapan ke dalam formulasi model Runge-Kutta orde empat.
- e. Menvisualisasikan hasil perhitungan dalam bentuk grafik, kemudian dibandingkan dengan data harian infeksi COVID-19 bulan Juli-Agustus 2021 [7].
- f. Interpretasi hasil.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

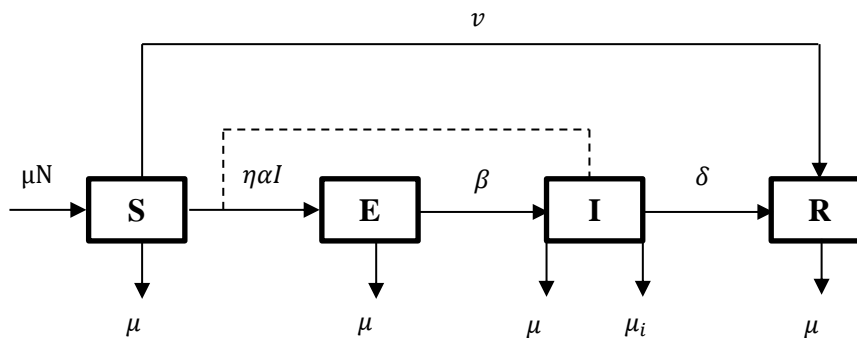
3.1 Formulasi Model

Model epidemi pada penyebaran COVID-19 di Indonesia mengacu pada model SEIR yang dipaparkan oleh [2] dalam penelitiannya tetapi dengan memodifikasi. Modifikasi tersebut yaitu dengan menambahkan parameter pembatasan interaksi masyarakat dan tetap memperhatikan vaktor vaksinasi pada model kemudian menganalisis model tersebut. Adapun formulasi model matematika penyebaran COVID-19 memperhatikan beberapa asumsi sebagai berikut:

- 1) Besarnya jumlah penduduk diasumsikan konstan, $N = S + E + I + R$
- 2) Laju kelahiran dan kematian diasumsikan sama.
- 3) Populasi rentan masuk ke dalam kompartemen S dengan laju kelahiran μ .
- 4) Populasi rentan akan tertular ketika melakukan kontak langsung dengan pasien COVID-19 dan penyakit ditularkan dengan laju interaksi αI di mana I merupakan individu terinfeksi.
- 5) Dilakukan pembatasan interaksi masyarakat sehingga persentase orang yang melakukan kontak langsung dibatasi sebesar η .
- 6) Populasi terpapar bisa pindah ke kelas terinfeksi seiring masa inkubasi COVID-19 dengan laju β .
- 7) Populasi terinfeksi dapat sembuh setelah melakukan perawatan medis dengan laju δ .
- 8) Populasi yang rentan juga dapat langsung dimasukkan ke kelas sembuh setelah melakukan vaksinasi dengan laju v .
- 9) Populasi sembuh diasumsikan sebagai populasi yang telah memiliki kekebalan tubuh lebih kuat daripada populasi rentan, sehingga individu pada populasi sembuh tidak kembali ke populasi rentan.
- 10) Semua jenis populasi mengalami kematian alami dengan laju μ .
- 11) Populasi terinfeksi dapat meninggal akibat pandemi COVID -19 dengan laju μ_i
- 12) Semua parameter dalam model bernilai positif.

Adapun skema penularan model SEIR untuk COVID-19 dapat dilihat pada Gambar.1 sebagai berikut:

Gambar.1 Skema Penularan Model untuk COVID-19



Sehingga, diperoleh model SEIR pada penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan faktor pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi sebagai parameter model dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa non linear [12] yang terdiri dari empat variabel terikat yaitu S, E, I, R dan satu variabel bebas yaitu t sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \eta \alpha I S - \mu S - v S \\
 \frac{dE}{dt} &= \eta \alpha I S - \beta E - \mu E \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta E - \delta I - \mu I - \mu_i I \\
 \frac{dR}{dt} &= \delta I + v S - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Dengan pendeskripsian variabel dan parameter pada Tabel.1 berikut:

3.2 Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Misal $s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$ sedemikian hingga $n = s + e + i + r = 1$. Oleh karena itu, sistem persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \mu - \eta\alpha is - \mu s - \nu s \\ \frac{de}{dt} &= \eta\alpha is - \beta e - \mu e \\ \frac{di}{dt} &= \beta e - \delta i - \mu i - \mu_i i \\ \frac{dr}{dt} &= \delta i + \nu s - \mu r\end{aligned}\tag{2}$$

Untuk menentukan dua titik kesetimbangan, setiap persamaan dalam sistem persamaan (2), harus sama dengan nol, atau $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dr}{dt} = 0$ [2], sehingga sistem persamaan (2) menjadi:

$$\mu - (\eta\alpha i + \mu + \nu)s = 0\tag{3}$$

$$\eta\alpha is - (\beta + \mu)e = 0\tag{4}$$

$$\beta e - (\mu_i + \delta + \mu)i = 0\tag{5}$$

$$\delta i + \nu s - \mu r = 0\tag{6}$$

Selanjutnya dapat ditemukan titik kesetimbangan $S, E, I, \text{ dan } R$ sebagai berikut:

3.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan solusi kondisi tetap di mana tidak ada penyakit COVID-19 dalam populasi. Sehingga, tidak ada yang terpapar maupun terinfeksi, hal ini berarti $e = i = 0$. Jadi, dengan melakukan penyelesaian pada persamaan (3)-(6), diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 adalah:

$$E_0 = (s_0, e_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\mu}{(\mu + \nu)}, 0, 0, \frac{\nu}{(\mu + \nu)} \right)\tag{7}$$

3.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik $E^*\{s^*, e^*, i^*, r^*\}$ merupakan solusi kondisi tetap yang menunjukkan kemungkinan terjadinya penyebaran suatu penyakit. Hal ini mengakibatkan populasi $s \neq 0, e \neq 0, i \neq 0, \text{ dan } r \neq 0$.

Dari Persamaan (3) - (6), diperoleh titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

$$E^* = (s^*, e^*, i^*, r^*)\tag{8}$$

di mana:

$$s^* = \frac{(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\eta\alpha\beta}$$

$$e^* = \frac{\eta\alpha\beta\mu - (\mu + \nu)(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\eta\alpha(\beta + \mu)\beta}$$

$$i^* = \frac{\eta\alpha\beta\mu - (\mu + \nu)(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\eta\alpha(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}$$

$$r^* = \frac{\eta\alpha\beta^2\delta\mu - \beta\delta(\mu + \nu)(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu) + \nu((\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu))^2}{\eta\alpha\beta\mu(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}$$

3.2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar dapat ditentukan menggunakan Matriks *Next Generation* [13] [14]. Adapun langkah langkah menentukan R_0 yaitu :

- 1) Mengambil persamaan-persamaan yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan dalam kelas infeksi pada sistem yang disebut subsistem terinfeksi. Pada model, subsistem terinfeksi adalah e dan i , diperoleh:

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\beta + \mu) & \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)} \\ \beta & -(\mu_i + \delta + \mu) \end{bmatrix}$$

- 2) Dekomposisi matriks Jacobian (J) menjadi $J = F - V$, dengan F adalah matriks Transmisi yang berisi laju penambahan kasus dan V adalah matriks Transisi yang berisi laju pengurangan kasus.

$$\text{dengan } F = \begin{pmatrix} 0 & \eta\alpha S \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)} \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dan } V = \begin{pmatrix} (\beta + \mu) & 0 \\ 0 & (\mu_i + \delta + \mu) \end{pmatrix}$$

- 3) maka, diperoleh matriks *Next Generation* (FV^{-1}) berikut:

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)} \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{(\beta + \mu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\mu_i + \delta + \mu)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)(\mu_i + \delta + \mu)} \\ \frac{\beta}{(\beta + \mu)} & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Hitung R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$, di mana $\rho(FV^{-1})$ merupakan radius spektral (nilai eigen absolut dominan) dari matriks *Next Generation* (FV^{-1}), maka, diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model SEIR penyebaran COVID-19 dengan parameter pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi adalah sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\eta\alpha\beta\mu}{(\mu + \beta)(\mu + v)(\mu_i + \delta + \mu)} \quad (9)$$

3.3 Analisis Kestabilan Model

Suatu titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$, dan dikatakan tidak stabil apabila $R_0 > 1$. Adapun untuk titik kesetimbangan endemik dapat dikatakan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 > 1$, dan dikatakan tidak stabil apabila $R_0 < 1$ [3].

Dalam menganalisis titik kesetimbangan, digunakan matriks jacobian untuk menghitung nilai eigen. Dari persamaan (3)-(6) diperoleh matriks Jacobian berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -(\eta\alpha I + \mu + v) & 0 & -\eta\alpha S & 0 \\ \eta\alpha I & -(\beta + \mu) & \eta\alpha S & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_i + \delta + \mu) & 0 \\ v & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

3.3.1 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Dengan mensubstitusi titik kesetimbangan bebas penyakit ke dalam matriks Jacobian pada persamaan (10), diperoleh:

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} -(\mu + v) & 0 & -\frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)} & 0 \\ 0 & -(\beta + \mu) & \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + v)} & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_i + \delta + \mu) & -\mu \\ v & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut, dapat ditentukan persamaan karakteristiknya

$$0 = \det(\mathbf{J}_0 - \lambda I)$$

$$0 = (\mu + \lambda)(\mu + \nu + \lambda) \left\{ (\beta + \mu + \lambda)(\mu_i + \delta + \mu + \lambda) - \frac{\eta\alpha\mu}{(\mu + \nu)} \right\}$$

Sehingga, nilai eigen yang diperoleh yaitu

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \nu) < 0$$

atau

$$(\beta + \mu + \lambda)(\mu_i + \delta + \mu + \lambda) - \frac{\eta\alpha\beta\mu}{(\mu + \nu)} = 0$$

Maka nilai λ_3 dan λ_4 , yaitu

$$\lambda^2 + (\mu_i + \delta + 2\mu + \beta)\lambda + \left((\beta + \mu)(\mu_i + \delta + \mu) - \frac{\eta\alpha\beta\mu}{(\mu + \nu)} \right) = 0$$

dengan:

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = \mu_i + \delta + 2\mu + \beta > 0$$

$$a_2 = (\beta + \mu)(\mu_i + \delta + \mu) - \frac{\eta\alpha\beta\mu}{(\mu + \nu)} = (\beta + \mu)(\mu_i + \delta + \mu)(1 - R_0) > 0, \text{ ketika } R_0 < 1$$

Sehingga, λ_3 dan λ_4 akan bernilai negatif apabila $R_0 < 1$. Karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 bernilai negatif, maka diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 < 1$.

3.3.2 Analisis Kestabilan Titik Endemik

Dengan mensubstitusi titik kesetimbangan endemik ke dalam matriks Jacobian pada persamaan (10), diperoleh:

$$\mathbf{J}_{(E^*)} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & -\frac{(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\beta} & 0 \\ a_{21} & -(\beta + \mu) & \frac{(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_i + \delta + \mu) & 0 \\ \nu & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan:

$$a_{11} = -\left(\eta\alpha \left(\frac{\eta\alpha\beta\mu - (\mu + \nu)(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\eta\alpha(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)} \right) + \mu + \nu \right)$$

$$a_{21} = \frac{\eta^2\alpha^2\beta\mu - (\mu + \nu)(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}{\eta\alpha(\mu_i + \delta + \mu)(\beta + \mu)}$$

Berdasarkan matriks Jacobian, dapat ditentukan persamaan karakteristiknya

$$0 = \det(\mathbf{J}_{E^*} - \lambda I)$$

$$0 = (\mu + \lambda) \left\{ [((\mu + \nu)R_0 + \lambda)(\beta + \mu + \lambda)(\mu_i + \delta + \mu + \lambda)] - \left[\frac{\eta\alpha\beta\mu}{R_0} + \frac{\eta\alpha\beta\mu\lambda}{R_0(\mu + \nu)} \right] \right\}$$

Sehingga, nilai eigen yang diperoleh yaitu

$$\lambda_1 = -\mu < 0,$$

atau

$$\left[((\mu + \nu)R_0 + \lambda)(\beta + \mu + \lambda)(\mu_i + \delta + \mu + \lambda) \right] - \left[\frac{\eta\alpha\beta\mu}{R_0} + \frac{\eta\alpha\beta\mu\lambda}{R_0(\mu + \nu)} \right] = 0 \quad (11)$$

Misal

$$A = (\mu + \nu)R_0 > 0$$

$$B = (\beta + \mu) > 0$$

$$C = \mu_i + \delta + \mu > 0$$

$$D = \frac{\eta\alpha\beta\mu}{R_0(\mu + \nu)} > 0$$

$$E = \frac{\eta\alpha\beta\mu}{R_0} > 0$$

diperoleh persamaan karakteristik dari persamaan (11) adalah:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan:

$$a_0 = 1 > 0;$$

$$a_1 = (A + B + C) > 0;$$

$$a_2 = AB + AC + BC - D > 0;$$

$$a_3 = (ABC - E) > 0, \text{ jika } R_0 > 1.$$

Dari persamaan karakteristik di atas, dapat diketahui bahwa nilai dari λ_2, λ_3 , dan λ_4 akan bernilai negatif apabila $R_0 > 1$. Sehingga, karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 bernilai negatif, maka titik kesetimbangan endemik adalah stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 > 1$.

3.4 Penerapan Metode Runge-Kutta Orde Empat pada Model

3.4.1 Formulasi Model dalam Bentuk Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang sering digunakan dalam mencari solusi numerik suatu persamaan diferensial biasa. Sehingga penyelesaian model penyebaran COVID-19 yang disajikan pada persamaan (1) dicari menggunakan metode Runge-Kutta orde empat [11] yaitu $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ diperoleh:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (12)$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (13)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (14)$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \quad (15)$$

dengan:

$$k_1 = h * f(t_i, S_i, E_i, I_i, R_i) \\ = h * (\mu N - \eta\alpha I_i S_i - \mu S_i - v S_i)$$

$$l_1 = h * g(t_i, S_i, E_i, I_i, R_i) \\ = h * (\eta\alpha I_i S_i - \beta E_i - \mu E_i)$$

$$m_1 = h * b(t_i, S_i, E_i, I_i, R_i) \\ = h * (\beta E_i - \delta I_i - \mu I_i - \mu_i I_i)$$

$$n_1 = h * d(t_i, S_i, E_i, I_i, R_i) \\ = h * (\delta I_i + v S_i - \mu R_i)$$

$$k_2 = h * f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, E_i + l_1 \frac{h}{2}, I_i + m_1 \frac{h}{2}, R_i + n_1 \frac{h}{2}\right) \\ = h * \left(\mu N - \eta\alpha \left(I_i + m_1 \frac{h}{2}\right) \left(S_i + k_1 \frac{h}{2}\right) - \mu \left(S_i + k_1 \frac{h}{2}\right) - v \left(S_i + k_1 \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$l_2 = h * g\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, E_i + l_1 \frac{h}{2}, I_i + m_1 \frac{h}{2}, R_i + n_1 \frac{h}{2}\right) \\ = h * \left(\eta\alpha \left(I_i + m_1 \frac{h}{2}\right) \left(S_i + k_1 \frac{h}{2}\right) - \beta \left(E_i + l_1 \frac{h}{2}\right) - \mu \left(E_i + l_1 \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$m_2 = h * b\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, E_i + l_1 \frac{h}{2}, I_i + m_1 \frac{h}{2}, R_i + n_1 \frac{h}{2}\right) \\ = h * \left(\beta \left(E_i + l_1 \frac{h}{2}\right) - \delta \left(I_i + m_1 \frac{h}{2}\right) - \mu \left(I_i + m_1 \frac{h}{2}\right) - \mu_i \left(I_i + m_1 \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$n_2 = h * d\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_1 \frac{h}{2}, E_i + l_1 \frac{h}{2}, I_i + m_1 \frac{h}{2}, R_i + n_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= h * \left(\delta \left(I_i + m_1 \frac{h}{2} \right) + v \left(S_i + k_1 \frac{h}{2} \right) - \mu \left(R_i + n_1 \frac{h}{2} \right) \right) \\
 k_3 &= h * f \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, E_i + l_2 \frac{h}{2}, I_i + m_2 \frac{h}{2}, R_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \\
 &= h * \left(\mu N - \eta \alpha \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) - \mu \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) - v \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) \right) \\
 l_3 &= h * g \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, E_i + l_2 \frac{h}{2}, I_i + m_2 \frac{h}{2}, R_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \\
 &= h * \left(\eta \alpha \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) - \beta \left(E_i + l_2 \frac{h}{2} \right) - \mu \left(E_i + l_2 \frac{h}{2} \right) \right) \\
 m_3 &= h * b \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, E_i + l_2 \frac{h}{2}, I_i + m_2 \frac{h}{2}, R_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \\
 &= h * \left(\beta \left(E_i + l_2 \frac{h}{2} \right) - \delta \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) - \mu \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) - \mu_i \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) \right) \\
 n_3 &= h * d \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + k_2 \frac{h}{2}, E_i + l_2 \frac{h}{2}, I_i + m_2 \frac{h}{2}, R_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \\
 &= h * \left(\delta \left(I_i + m_2 \frac{h}{2} \right) + v \left(S_i + k_2 \frac{h}{2} \right) - \mu \left(R_i + n_2 \frac{h}{2} \right) \right) \\
 \\
 k_4 &= h * f(t_i + h, S_i + k_3 h, E_i + l_3 h, I_i + m_3 h, R_i + n_3 h) \\
 &= h * (\mu N - \eta \alpha (I_i + m_3 h) (S_i + k_3 h) - \mu (S_i + k_3 h) - v (S_i + k_3 h)) \\
 l_4 &= h * g(t_i + h, S_i + k_3 h, E_i + l_3 h, I_i + m_3 h, R_i + n_3 h) \\
 &= h * (\eta \alpha (I_i + m_3 h) (S_i + k_3 h) - \beta (E_i + l_3 h) - \mu (E_i + l_3 h)) \\
 m_4 &= h * b(t_i + h, S_i + k_3 h, E_i + l_3 h, I_i + m_3 h, R_i + n_3 h) \\
 &= h * (\beta (E_i + l_3 h) - \delta (I_i + m_3 h) - \mu (I_i + m_3 h) - \mu_i (I_i + m_3 h)) \\
 n_4 &= h * d(t_i + h, S_i + k_3 h, E_i + l_3 h, I_i + m_3 h, R_i + n_3 h) \\
 &= h * (\delta (I_i + m_3 h) + v (S_i + k_3 h) - \mu (R_i + n_3 h))
 \end{aligned}$$

di mana $S_{i+1}, E_{i+1}, I_{i+1}, R_{i+1}$ masing-masing merupakan persamaan yang nantinya digunakan dalam menentukan populasi rentan, populasi terpapar, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh pada iterasi selanjutnya atau di hari berikutnya. Dan $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, l_4, m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4$ merupakan suatu tetapan pada rumus Runge-Kutta orde empat. k_1, k_2, k_3, k_4 merupakan tetapan dari persamaan (3.12), l_1, l_2, l_3, l_4 merupakan tetapan dari persamaan (3.13), m_1, m_2, m_3, m_4 merupakan tetapan persamaan (3.14), dan n_1, n_2, n_3, n_4 merupakan tetapan persamaan (3.15).

3.4.2 Perhitungan Simulasi

Waktu yang digunakan dalam penyelesaian model adalah selama 62 hari dengan interval waktu atau jarak langkah $h = 0.01$ hari, sehingga iterasi dilakukan sebanyak 6101 kali. Adapun perhitungan tiap iterasi dilakukan menggunakan *software* Octave yang kemudian divisualisasikan dalam bentuk grafik.

Adapun nilai awal dan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 1 Nilai Awal Variabel Model	
Variabel	Nilai
N_0	270.2 juta orang
S_0	270,129,572 orang
E_0	35214 orang
I_0	24836 orang

R_0	9874 orang
-------	------------

Tabel.2 Nilai parameter

Parameter	Sebelum Pembatasan Interaksi			Setelah Pembatasan Interaksi		
	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3	Simulasi 1	Simulasi 2	Simulasi 3
μ	6.25 $\times 10^{-3}$	6.25 $\times 10^{-3}$	6.25 $\times 10^{-3}$	6.25 $\times 10^{-3}$	6.25 $\times 10^{-3}$	6.25 $\times 10^{-3}$
α	0.62 $\times 10^{-8}$	0.62 $\times 10^{-8}$	0.62 $\times 10^{-8}$	0.62 $\times 10^{-8}$	0.62 $\times 10^{-8}$	0.62 $\times 10^{-8}$
η	100%	100%	100%	50%	50%	50%
β	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14	1/14
δ	0.06667	0.06667	0.06667	0.06667	0.06667	0.06667
μ_i	7.344 $\times 10^{-7}$	7.344 $\times 10^{-7}$	7.344 $\times 10^{-7}$	7.344 $\times 10^{-7}$	7.344 $\times 10^{-7}$	7.344 $\times 10^{-7}$
ν	16%	31%	75%	16%	31%	75%

Penyelesaian menggunakan metode Runge - Kutta orde empat dilakukan dengan menghitung nilai-nilai tetapan yang ada pada rumus Runge-Kutta orde empat dengan nilai awal pada Tabel.1 serta parameter pada Tabel.2, kemudian disubstitusikan pada persamaan (12) – (15). Perhitungan dilakukan berdasarkan dua kondisi yaitu sebelum diberlakukan pembatasan interaksi dan setelah diberlakukan pembatasan interaksi. Dari masing-masing asumsi tersebut, dilakukan tiga simulasi dengan nilai parameter vaksinasi yang berbeda berdasarkan Tabel.2. Berikut adalah hasil perhitungannya:

(i) Ketika Sebelum Pembatasan Interaksi

Ketika sebelum pembatasan interaksi masyarakat, interaksi antara individu rentan dan terinfeksi tidak dibatasi, sehingga diasumsikan bahwa 100% individu rentan dapat berinteraksi dengan individu terinfeksi. Dengan persentase vaksinasi mencapai 16%, 31% [9], serta persentase vaksinasi yang apabila terpenuhi akan tercipta kekebalan kelompok yaitu sebesar 75%, dilakukan perhitungan kasus infeksi harian COVID-19 selama 62 hari berdasarkan model yang dibangun dari $t = 1$ hingga $t = 62$ hari dengan jarak langkah iterasi 0.01 hari. Untuk menentukan nilai atau banyaknya individu terinfeksi, maka terlebih dahulu mencari nilai tetapan dari rumus Runge-Kutta pada persamaan (12) – (15). Selanjutnya mencari nilai S, E, I, R dengan cara mensubstitusikan nilai tetapan k_1, k_2, k_3, k_4 pada persamaan (12), nilai l_1, l_2, l_3, l_4 pada persamaan (13), nilai m_1, m_2, m_3, m_4 pada persamaan (14), nilai n_1, n_2, n_3, n_4 pada persamaan (15). sehingga diperoleh hasil penyelesaian numerik model COVID-19 ketika sebelum diberlakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan persentase vaksinasi 16%, 31%, dan 75% menggunakan metode Runge - Kutta orde empat sebagai berikut:

1) Perhitungan Simulasi 1

Tabel.3 Hasil Perhitungan Simulasi 1 Kasus Infeksi Harian COVID-19 sebelum pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.17834767056
3	1.02	24850.62832876017
4	1.03	24858.34914462888
5	1.04	24866.34000141192
101	2	26785.81071415249
201	3	30870.11478517401

301	4	36720.97984380437
304	5	44098.19037496279
305	6	52817.83758839874
⋮	⋮	⋮
6101	62	259194.7719082803

2) Perhitungan Simulasi 2

Tabel.4 Hasil Perhitungan Simulasi 2 Kasus Infeksi Harian COVID-19 sebelum pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.17827349887
3	1.02	24850.62773622723
4	1.03	24858.34714765655
5	1.04	24866.33527451715
101	2	26720.07891124581
201	3	30390.1129493846
301	4	35213.71874031085
304	5	40738.37756333955
305	6	46615.50631510579
⋮	⋮	⋮
6101	62	39161.81762807343

3) Perhitungan Simulasi 3

Tabel.5 Hasil Perhitungan Simulasi 3 Kasus Infeksi Harian COVID-19 sebelum pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.17805625002
3	1.02	24850.6260032478
4	1.03	24850.6260032478
5	1.04	24866.32149039018
101	2	26553.03627832668
201	3	29330.56902124725
301	4	32323.52025819294
304	5	35135.8731735625
305	6	37595.73276811893
⋮	⋮	⋮
6101	62	8622.391753785585

(ii) Ketika Setelah Pembatasan Interaksi

Ketika setelah dilakukan pembatasan interaksi masyarakat, interaksi antara individu rentan dan terinfeksi menjadi dibatasi, sehingga diasumsikan bahwa hanya sekitar 50% individu rentan yang dapat berinteraksi dengan individu terinfeksi. Dengan persentase vaksinasi mencapai 16%, 31% [9], serta persentase vaksinasi yang apabila terpenuhi akan tercipta kekebalan kelompok yaitu sebesar 75%, dilakukan perhitungan kasus infeksi harian COVID-19 selama 62 hari berdasarkan model yang dibangun dari $t = 1$ hingga $t = 62$ hari dengan jarak langkah iterasi 0.01 hari. Untuk menentukan nilai atau banyaknya individu terinfeksi, maka terlebih dahulu mencari nilai tetapan dari rumus Runge-Kutta pada persamaan (12) – (15). Selanjutnya mencari nilai S, E, I, R dengan cara mensubstitusikan nilai tetapan k_1, k_2, k_3, k_4 pada persamaan (12), nilai l_1, l_2, l_3, l_4 pada persamaan (13), nilai m_1, m_2, m_3, m_4 pada persamaan (14), nilai n_1, n_2, n_3, n_4

pada persamaan (15). sehingga diperoleh hasil penyelesaian numerik model COVID-19 ketika setelah diberlakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan persentase vaksinasi 16%, 31%, dan 75% menggunakan metode Runge – Kutta orde empat sebagai berikut:

1) Perhitungan Simulasi 1

Tabel.6 Hasil Perhitungan Simulasi 1 Kasus Infeksi Harian COVID-19 setelah pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.10413994173
3	1.02	24850.33177593977
4	1.03	24857.6825240228
5	1.04	24865.15600171624
101	2	26100.93961531809
201	3	28289.59043659329
301	4	31167.19395808673
304	5	34554.67733425368
305	6	38307.62436485871
⋮	⋮	⋮
6101	62	43050.54103181735

2) Perhitungan Simulasi 2

Tabel.7 Hasil Perhitungan Simulasi 2 Kasus Infeksi Harian COVID-19 setelah pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.1041028559
3	1.02	24850.33147967445
4	1.03	24857.68152554615
5	1.04	24865.15363831017
101	2	26068.41635921457
201	3	28058.24201501742
301	4	30466.05226700136
304	5	33053.22024815901
305	6	35649.22465522642
⋮	⋮	⋮
6101	62	12036.7601425605

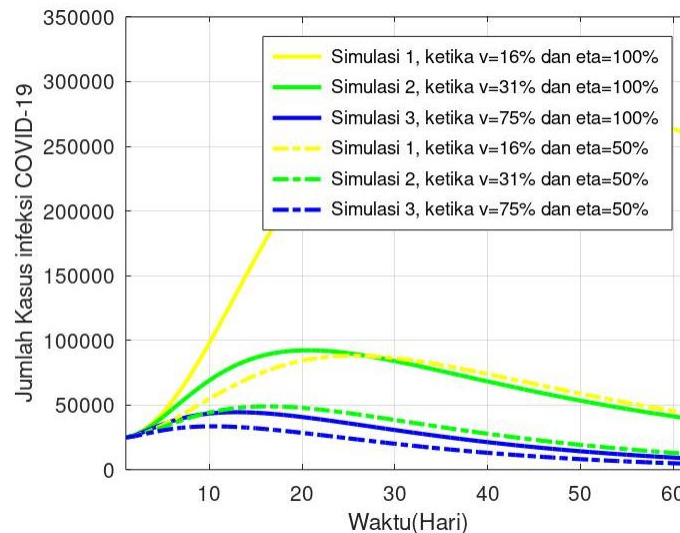
3) Perhitungan Simulasi 3

Tabel.8 Hasil Perhitungan Simulasi 3 Kasus Infeksi Harian COVID-19 setelah pembatasan interaksi masyarakat

Iterasi ke-	Hari ke-	Banyak Kasus Infeksi
1	1	24836
2	1.01	24843.10399423151
3	1.02	24850.3306131881
4	1.03	24857.67860959752
5	1.04	24865.14674636652
101	2	25985.67249568035
201	3	27544.01813780321
301	4	29097.08785212127
304	5	30464.41368641178
305	6	31578.52999311432

⋮	⋮	⋮
6101	62	4503.793121904154

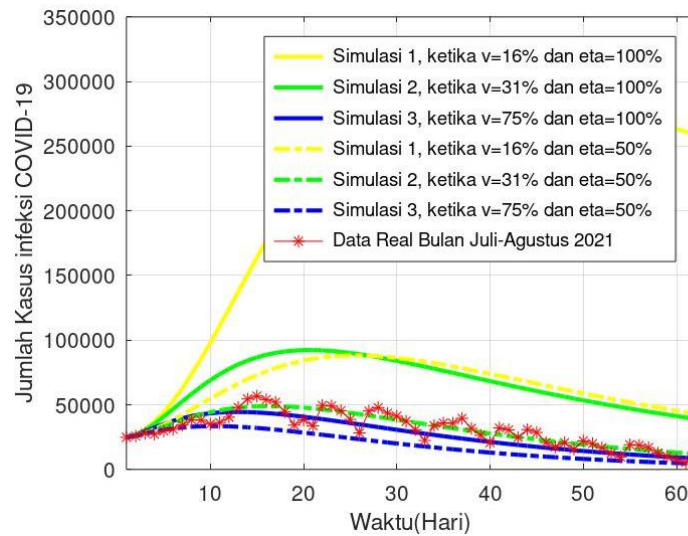
Dari hasil perhitungan simulasi 1, simulasi 2, dan simulasi 3, baik sebelum diberlakukan pembatasan interaksi masyarakat maupun setelah dilakukan pembatasan interaksi masyarakat, kemudian divisualisasikan dalam bentuk grafik. Adapun grafik perbandingan simulasi kasus infeksi adalah sebagai berikut:



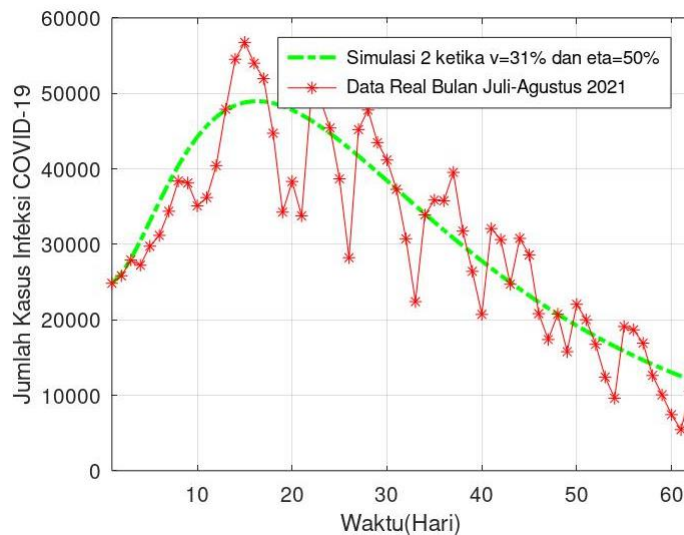
Gambar.2 Grafik hasil perhitungan kasus infeksi simulasi 1,2,3 sebelum dan setelah dilakukan pembatasan interaksi masyarakat

Dari ke enam grafik tersebut dapat dilihat bahwa grafik ketika $\eta = 100\%$ lebih tinggi dibanding grafik ketika $\eta = 50\%$ untuk tiap-tiap simulasi. Sehingga, dapat diketahui bahwa dengan melakukan pembatasan interaksi masyarakat, lebih baik dari pada sebelum dilakukan pembatasan interaksi masyarakat. Dan dari ke enam grafik tersebut juga dapat dilihat bahwa grafik simulasi 3 lebih rendah dibanding grafik simulasi 1 dan simulasi 2 baik sebelum dilakukan pembatasan interaksi maupun setelah dilakukan pembatasan interaksi. sehingga, dapat diketahui bahwa persentase vaksinasi yang semakin tinggi mengakibatkan kasus infeksi semakin melandai.

Setelah itu, ke enam grafik tersebut di bandingkan dengan data *real* penambahan kasus infeksi harian COVID-19 di bulan Juli-Agustus 2021 [] untuk mengetahui hasil perhitungan mana yang lebih menggambarkan kondisi penambahan kasus harian COVID-19. Berikut adalah hasilnya:



Gambar.3 Grafik perbandingan hasil perhitungan kasus infeksi simulasi 1,2,3 sebelum dan setelah dilakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan data real



Gambar.4 Grafik perhitungan yang menggambarkan kasus pertambahan infeksi COVID-19 bulan Juni-Agustus 2021

Dari Gambar.3, hasil perhitungan tiap simulasi dibandingkan dengan grafik kasus infeksi bulan Juli-Agustus 2021, dapat dilihat bahwa grafik yang paling sesuai dengan kasus infeksi harian COVID-19 bulan Juli-Agustus 2021 adalah grafik simulasi 2 yaitu ketika dilakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan persentase vaksinasi sebesar 31%. Lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar.4, di mana terdapat kesamaan pola antara grafik perhitungan kasus infeksi harian COVID-19 pada hari pertama sampai hari ke 62 dengan grafik kasus infeksi harian COVID-19 bulan Juli-Agustus 2021. Ke dua grafik tersebut, mengalami peningkatan yang sangat drastis pada $t = 15$ atau pertengahan bulan Juli, dan kemudian melandai kembali. Hasil dari perhitungan tidak bisa memprediksi pertambahan kasus harian infeksi COVID-19 secara tepat. Namun, pola yang dihasilkan dari model, sesuai dengan tren kasus infeksi di bulan Juli-Agustus 2021. Berdasarkan perbandingan grafik tersebut, dapat disimpulkan bahwa jika pembatasan interaksi masyarakat terus dilakukan dengan terus meningkatkan persentase vaksinasi, maka diperkirakan kasus positif harian COVID-19 akan semakin mendekati nol.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh dari penelitian ini, penerapan model epidemi *Susceptible – Exposed – Infectious – Recovered* (SEIR) pada penyebaran COVID-19 dengan memperhatikan faktor pembatasan interaksi masyarakat dan persentase vaksinasi sebagai parameter model menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dapat disimpulkan bahwa pembatasan interaksi masyarakat dan vaksinasi sangat berpengaruh pada grafik infeksi COVID-19. Di mana banyaknya kasus infeksi pada hari ke 62 sebelum dilakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan vaksinasi mencapai 16% sekitar 259195 orang terinfeksi, banyaknya kasus infeksi ketika vaksinasi mencapai 31% sekitar 39162 orang, banyaknya kasus infeksi ketika vaksinasi mencapai 75% sekitar 8622 orang. Sedangkan banyaknya kasus infeksi pada hari ke 62 setelah dilakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan vaksinasi mencapai 16% sekitar 43051 orang terinfeksi, banyaknya kasus infeksi ketika vaksinasi mencapai 31% sekitar 12037 orang, banyaknya kasus infeksi ketika vaksinasi mencapai 75% sekitar 4504 orang. Sehingga, pembatasan interaksi dan banyaknya vaksinasi dapat mempercepat penurunan kasus infeksi COVID-19. Dan dari grafik perbandingan perhitungan kasus infeksi diketahui bahwa grafik yang paling menggambarkan tren kasus infeksi bulan Juli-Agustus 2021 adalah ketika dilakukan pembatasan interaksi masyarakat dengan persentase vaksinasi sebesar 31%. Dan jika pembatasan interaksi masyarakat terus dilakukan dengan terus meningkatkan persentase vaksinasi, maka diperkirakan kasus positif harian COVID-19 akan semakin mendekati nol.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] R. Munir, *Metode Numerik*, Bandung: Informatika Bandung, 2010.
- [2] S. Annas, M. I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi and S. Side, "Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 in Indonesia," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 139, no. 110072, pp. 1-7, 2020.
- [3] M. Jannah, M. A. Karim and Y. Yulida, "Analisis Kestabilan Model SEIR untuk Penyebaran COVID-19 dengan Parameter Vaksinasi," *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 3, no. 15, pp. 535-542, 2021.
- [4] A. F. Bezabih, G. K. Edessa and P. R. Koya, "Mathematical Epidemiology Model Analysis on the Dynamics of COVID-19 Pandemic," *American Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 6, pp. 247-256, 2020.
- [5] C. K. Kwuimy, F. Nazari, X. Jiao, P. Rohani and C. Nataraj, "Nonlinear Dynamic Analysis of an Epidemiological Model for COVID-19 Including Public Behavior and Government Actions," *Nonlinear Dyn*, pp. 1545-1559, 2020.
- [6] Y. Fang, Y. Nie and M. Penny, "Transmission Dynamics of the COVID-19 Outbreak and Effectiveness of Government Interventions: a Data-Driven Analysis," *Journal of Medical Virology*, vol. 92, no. 10.1002, pp. 645-659, 2020.
- [7] Kemenkes, "Peta Sebaran COVID-19," 2021. [Online]. Available: <https://covid-19.go.id/>. [Accessed 01 September 2021].
- [8] K. K. B. P. R. Indonesia, "Siaran Pers Mengenai Penerapan PPKM untuk Mengendalikan Laju Covid-19 dan Menjaga Kehidupan Masyarakat," 21 Juli 2021. [Online]. Available: <https://www.ekon.go.id/>. [Accessed 02 September 2021].
- [9] Kemenkes, "Vaksin COVID-19 Nasional," [Online]. Available: <https://vaksin.kemkes.go.id/>. [Accessed 01 September 2021].
- [10] C. Y. a. J. Wang, "A mathematical model for the novel coronavirus epidemic in Wuhan, China," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 3, no. 17, pp. 2708-2724, 2020.
- [11] H. Wijayanti, S. Setyaningsih and M. Wati, "Metode Runge Kutta dalam Penyelesaian Model Radang Akut," *Ekologia*, vol. 11, no. 2, pp. 46-52, 2011.
- [12] S. Waluya, *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006.

- [13] P. V. d. D. d. P. Watmough, "Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease," *Mathematical Biosciences*, Vols. 1-2, no. 180, pp. 29-48, 2002.
- [14] P. V. d. Driessche and J. Watmough, "Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission," *Mathematical Biosciences*, no. 180, pp. 29-48, 2002.
- [15] R. M. McLeod, K. Ranson and L. Biehl, The generalized Riemann integral, JSTOR, 1980.