

Analisis Dinamik Model Infeksi Mikrobakterium Tuberkulosis Dengan Dua Lokasi Pengobatan

Ummul Aulia*, Heni Widayani, Ari Kusumastuti

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

ummulaulat@gmail.com*, heniwidayani@mat.uin-malang.ac.id,
astuti@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit tersebut dinilai berbahaya karena menginfeksi paru-paru dan organ tubuh lainnya hingga dapat menyebabkan kematian. Penelitian ini membahas model matematika untuk penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan sebagai upaya untuk menekan angka penularan kasus TB. Pengobatan bagi penderita TB dapat dilakukan di rumah dan rumah sakit. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi model matematika dan menganalisis perilaku kualitatif pada model penyebaran TB. Konstruksi model tersebut menggunakan model epidemi SEIR yang terbagi dalam lima sub populasi yaitu sub populasi rentan, sub populasi laten, sub populasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah, dan sub populasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah sakit, serta sub populasi sembuh. Analisis perilaku kualitatif pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal serta global. Berdasarkan hasil analisis diketahui bahwa model mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Eksistensi titik kesetimbangan endemik dan kestabilan lokal maupun global dari kedua titik kesetimbangan bergantung pada angka reproduksi dasar yang dinotasikan dengan \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka hanya terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan global jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal dan global.

Kata kunci: Model Matematika Tuberkulosis; Pengobatan I_1 ; Pengobatan I_2 ; Angka Reproduksi Dasar; Analisis Dinamik; Analisis Kestabilan

Abstract

Tuberculosis is an infectious disease caused by *Mycobacterium tuberculosis*. The disease is considered dangerous because it infects the lungs and other organs of the body and can lead to death. This study discusses a mathematical model for the spread of tuberculosis with two treatment sites as an effort to reduce the transmission rate of TB cases. Treatment for TB patients can be done at home and in hospitals. The purpose of this study was to construct a mathematical model and analyze the qualitative behavior of the TB spread model. The construction of the model uses the SEIR epidemic model which is divided into five subpopulations, namely susceptible subpopulations, latent subpopulations, infected subpopulations receiving treatment at home, and infected subpopulations receiving treatment at the hospital, and cured subpopulations. The analysis of qualitative behavior in the model includes determining the local and global equilibrium and stability points. The results of the analysis shows that the model has two equilibrium points, namely a disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The existence of endemic equilibrium point and the local and global stability of the two equilibrium points depend on the basic reproduction number denoted by \mathcal{R}_0 . If $\mathcal{R}_0 < 1$, there is only disease-free equilibrium point. If $\mathcal{R}_0 > 1$, there are two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Stability analysis shows that the disease-free equilibrium point is locally and globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_0 < 1$. While, if $\mathcal{R}_0 > 1$, the endemic equilibrium point will be asymptotically stable locally and globally.

Keywords: Mathematical Model of Tuberculosis; Treatment I_1 ; Treatment I_2 ; Basic Reproductive Rate, Dynamic Analysis; Stability Analysis

PENDAHULUAN

Model matematika telah banyak digunakan dalam berbagai bidang salah satunya adalah pemodelan pada penyebaran tuberkulosis. Tuberkulosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Tuberkulosis telah menjadi masalah kesehatan global karena termasuk dalam 10 penyebab kematian tertinggi di dunia. WHO dalam *Global Report Tuberculosis 2021* menyatakan bahwa sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi tuberkulosis bahkan 44% kasus berada di kawasan Asia Tenggara. Indonesia berada pada peringkat ke-2 setelah India dengan estimasi angka kasus sebanyak 845.000 [1].

Prevalensi penyakit tuberkulosis sangat tinggi, namun tingkat pencegahannya masih sangat rendah yang menyebabkan risiko penularan TB semakin meningkat. Penularan penyakit TB umumnya terjadi melalui udara ketika penderita TB aktif memercikkan dahak saat batuk. Daya penularan TB ditentukan dengan banyaknya bakteri yang terkandung dalam dahak. Prevalensi usia penderita TB adalah usia produktif 20-60 tahun. Sedangkan berdasarkan jenis kelamin, laki-laki mempunyai risiko terpapar TB lebih tinggi dibandingkan dengan perempuan [2]. Upaya untuk menekan angka penularan TB dapat dilakukan dengan pengobatan secara intensif. Pengobatan dapat dilakukan di rumah atau rumah sakit. Penderita dengan tingkat keparahan yang cukup tinggi harus dirawat di rumah sakit. Sedangkan penderita TB dengan tingkat keparahan yang rendah dapat melakukan perawatan di rumah dengan catatan berobat secara rutin.

Terdapat beberapa peneliti yang telah memodelkan penularan penyakit TB, salah satunya dilakukan oleh [3] yang membahas tentang pengaruh pengobatan di rumah pada penyebaran TB. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pengobatan di rumah memiliki pengaruh negatif terhadap penyebaran TB. Sehingga salah satu cara untuk menekan angka penyebaran TB yaitu pasien yang melakukan pengobatan di rumah sakit namun belum sembuh tidak diizinkan untuk melakukan pengobatan di rumah. Selain itu juga ada penelitian yang dilakukan oleh [4] mengenai model epidemi TB dengan penambahan tingkat pengobatan pada model SEIR. Hasilnya menunjukkan bahwa semakin besar individu terinfeksi menuntaskan pengobatannya maka jumlah penurunan individu yang terinfeksi juga akan semakin cepat. Selain itu, ada [5] yang membahas tentang kontrol optimal pada penyebaran TB dengan dua jenis pengobatan yaitu pengobatan di rumah dan rumah sakit. Tujuannya adalah untuk menekan angka penularan pada individu laten dan terinfeksi dengan melihat pengaruh kontrol jarak pada individu rentan, upaya pencegahan kegagalan ketika melakukan pengobatan di rumah maupun rumah sakit.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penelitian ini akan membahas konstruksi dan analisis dinamik pada penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan.

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

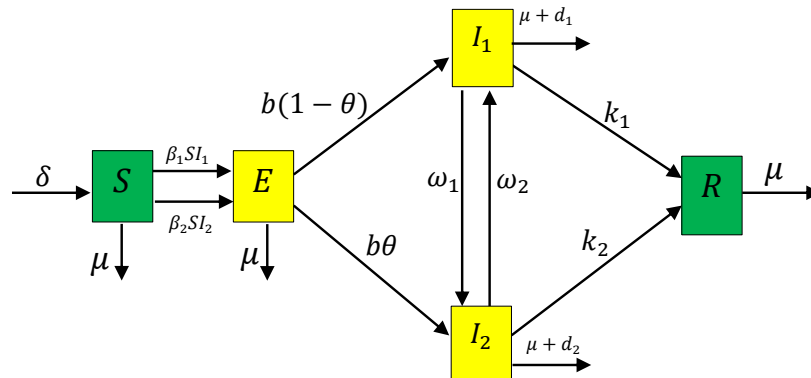
1. Mengkaji sumber-sumber pustaka untuk memperoleh gambaran umum objek penelitian
2. Menganalisis
 - a. Menentukan diagram alir dari model SEIR
 - b. Membangun model matematika pada penyebaran tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan
 - c. Mencari Titik kesetimbangan model
 - d. Menentukan angka reproduksi dasar
 - e. Menganalisis kestabilan lokal dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz
 - f. Menganalisis kestabilan global dengan menggunakan fungsi Lyapunov
 - g. Membuat simulasi numerik dari model SEIR dalam bentuk grafik dengan memasukkan nilai-nilai parameter

3. Membuat kesimpulan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Konstruksi Model Matematika

Populasi dalam penelitian ini dibagi ke dalam lima sub populasi, yaitu sub populasi rentan (S), subpopulasi laten (E), subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah (I_1), subpopulasi terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah sakit (I_2), dan subpopulasi sembuh (R). Populasi model infeksi TB dapat disajikan dalam diagram kompartemen pada Gambar 1 berikut



Gambar 1 Diagram Kompartemen Model Infeksi TB

Adapun parameter yang digunakan dalam model dapat dilihat pada Tabel 1 berikut

Tabel 1 Daftar Parameter Model

Parameter	Keterangan	Satuan
δ	Laju kelahiran alami	Per Tahun
β_1	Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu laten karena adanya interaksi dengan sub populasi I_1	Per Tahun
β_2	Koefisien transmisi dari individu rentan ke individu laten karena adanya interaksi dengan sub populasi I_2	Per Tahun
μ	Laju kematian alami	Per Tahun
b	Koefisien transmisi dari individu laten ke individu terinfeksi I_1 dan I_2	Per Tahun
$1 - \theta$	Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_1	Tak berdimensi
θ	Proporsi infeksi individu laten oleh individu terinfeksi I_2	Tak berdimensi
ω_1	Laju perubahan individu sub populasi I_2 dari subpopulasi I_1	Per Tahun
ω_2	Laju perubahan individu sub populasi I_1 dari subpopulasi I_2	Per Tahun
k_1	Laju keberhasilan pengobatan dari sub populasi I_1 menjadi subpopulasi R	Per Tahun
k_2	Laju keberhasilan pengobatan dari sub populasi I_2 menjadi subpopulasi R	Per Tahun
d_1	Laju kematian pada sub populasi I_1 akibat terinfeksi penyakit	Per Tahun
d_2	Laju kematian pada sub populasi I_2 akibat terinfeksi penyakit	Per Tahun

Berdasarkan model kompartemen pada Gambar 1 setiap individu yang baru lahir masuk ke sub populasi rentan dengan laju δ mengakibatkan jumlah sub populasi rentan bertambah. Namun, adanya interaksi dengan individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit dengan laju masing-masing sebesar β_1 dan β_2 , serta adanya kematian alami dengan laju μ mengakibatkan berkurangnya jumlah subpopulasi rentan. Sehingga laju perubahan subpopulasi rentan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S \quad (1)$$

Adanya interaksi dengan individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit dengan laju masing-masing sebesar β_1 dan β_2 menyebabkan bertambahnya jumlah subpopulasi laten. Tetapi adanya perpindahan pada individu laten ke individu terinfeksi yang melakukan pengobatan di rumah dan rumah sakit dengan laju masing-masing $b(1 - \theta)$ dan $b\theta$, serta adanya kematian alami sebesar μ mengakibatkan jumlah subpopulasi laten berkurang. Sehingga diperoleh laju perubahannya sebagai berikut

$$\frac{dE}{dt} = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)E \quad (2)$$

Berkurangnya jumlah individu sub populasi laten dan adanya perpindahan dari individu terinfeksi I_2 mengakibatkan jumlah sub populasi terinfeksi I_1 bertambah dengan laju masing-masing sebesar $b(1 - \theta)$ dan ω_2 . Adanya perpindahan individu terinfeksi I_1 menjadi I_2 dengan laju ω_1 , kemudian individu terinfeksi I_1 yang berhasil sembuh dengan laju k_1 , serta kematian alami dan kematian akibat penyakit dengan laju masing-masing μ dan d_1 menyebabkan berkurangnya subpopulasi I_1 . Sehingga diperoleh laju perubahannya sebagai berikut

$$\frac{dI_1}{dt} = b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1. \quad (3)$$

Berkurangnya jumlah individu sub populasi laten dan adanya perpindahan dari individu terinfeksi I_1 mengakibatkan jumlah sub populasi terinfeksi I_2 bertambah dengan laju masing-masing sebesar $b\theta$ dan ω_1 . Adanya perpindahan individu terinfeksi I_2 menjadi I_1 dengan laju ω_2 , kemudian individu terinfeksi I_2 yang berhasil sembuh dengan laju k_2 , serta kematian alami dan kematian akibat penyakit dengan laju masing-masing μ dan d_2 menyebabkan berkurangnya subpopulasi I_2 . Sehingga diperoleh laju perubahannya sebagai berikut

$$\frac{dI_2}{dt} = b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + k_2 + \mu + d_2)I_2. \quad (4)$$

Berkurangnya jumlah individu pada sub populasi terinfeksi I_1 dan I_2 menjadi individu sembuh dengan laju masing-masing sebesar k_1 dan k_2 menyebabkan bertambahnya jumlah subpopulasi sembuh. Perubahan jumlah sub populasi sembuh juga diakibatkan karena adanya kematian alami dengan laju μ menyebabkan berkurangnya jumlah sub populasi sembuh. Sehingga diperoleh laju perubahan sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R. \quad (5)$$

Berdasarkan persamaan (1)-(5), jika dimisalkan $b_0 = b(1 - \theta) + b\theta + \mu$, $b_1 = \omega_1 + k_1 + \mu + d_1$ dan $b_2 = \omega_2 + k_2 + \mu + d_2$. Kemudian karena sub populasi R tidak mempengaruhi laju perubahan sub populasi lain, maka diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - b_0 E \\ \frac{dI_1}{dt} &= b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - b_1 I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= b\theta E + \omega_1 I_1 - b_2 I_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Titik Keseimbangan dan Angka Reproduksi Dasar

1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Sistem persamaan (6) dikatakan setimbang jika $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI_1}{dt} = 0$, dan $\frac{dI_2}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

$$P^0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right). \quad (7)$$

2. Angka Reproduksi Dasar

Berdasarkan sistem persamaan (6) dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya diperoleh angka reproduksi dasar sebagai berikut:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta \beta_1 (b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) + \beta_2 (\omega_1 b (1 - \theta) + b_1 b \theta)}{\mu (b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \quad (8)$$

3. Titik Keseimbangan Endemik

Titik keseimbangan endemik pada sistem persamaan (6) diperoleh dengan mengasumsikan telah terjadi penyebaran penyakit sehingga nilai $I_1 \neq 0$ dan $I_2 \neq 0$. Maka diperoleh titik keseimbangan endemik $P^*(S^*, E^*, I_1^*, I_2^*)$ sebagai berikut:

$$P^* = \left(\frac{\delta - b_0 E^*}{\mu}, \frac{\delta}{b_0} \left(1 - \frac{\delta}{\mathcal{R}_0} \right), \frac{(b_2 b (1 - \theta) + \omega_2 b \theta) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)}, \frac{(b_1 b \theta + \omega_1 b (1 - \theta)) E^*}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} \right) \quad (9)$$

Pada persamaan (9), diketahui E^* bergantung pada \mathcal{R}_0 . Sehingga jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka E^* eksis dan bernilai positif karena $b_1 b_2 > \omega_1 \omega_2$.

Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit dilakukan linearisasi persamaan (6) sehingga diperoleh matriks Jacobi. Matriks Jacobi pada titik keseimbangan P^0 sebagai berikut

$$J(P^0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 \frac{\delta}{\mu} & -\beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & -b_0 & \beta_1 \frac{\delta}{\mu} & \beta_2 \frac{\delta}{\mu} \\ 0 & b(1 - \theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobi $J(P^0)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$ dan persamaan berikut

$$\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0, \quad (10)$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = b_0 + b_1 + b_2$$

$$a_2 = b_0 b_1 + b_0 b_2 + b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b(1 - \theta) - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} b \theta$$

$$a_3 = b_0 b_1 b_2 - b_0 \omega_1 \omega_2 - \frac{\delta \beta_1}{\mu} b_2 b(1 - \theta) - \frac{\delta \beta_1}{\mu} \omega_2 b \theta - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} \omega_1 b(1 - \theta) - \frac{\beta_2 \delta}{\mu} b_1 b \theta$$

Berdasarkan persamaan (10) diasumsikan jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedemikian hingga a_1, a_2, a_3 dan $a_1 a_2 - a_3$ akan bernilai positif. Dengan demikian berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz titik keseimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal apabila $\mathcal{R}_0 < 1$.

2. Titik Keseimbangan Endemik

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan endemik dilakukan linearisasi pada sistem persamaan (6) sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J(P^*) = \begin{pmatrix} -\beta_1 I_1^* - \beta_2 I_2^* - \mu & 0 & -\beta_1 S^* & -\beta_2 S^* \\ \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* & -b_0 & \beta_1 S^* & \beta_2 S^* \\ 0 & b(1-\theta) & -b_1 & \omega_2 \\ 0 & b\theta & \omega_1 & -b_2 \end{pmatrix}$$

Dari matriks Jacobi $J(P^*)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -b_2$ dan persamaan

$$\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 \tag{11}$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \mu + b_0 + b_1,$$

$$a_2 = \beta_1 I_1^* b_0 + \beta_1 I_1^* b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 + \beta_2 I_2^* b_1 + \mu b_0 + \mu b_1 + b_0 b_1 - \beta_1 S^* b(1-\theta),$$

$$a_3 = \beta_1 I_1^* b_0 b_1 + \beta_2 I_2^* b_0 b_1 + \mu b_0 b_1 - \beta_1 S^* \mu b(1-\theta).$$

Persamaan (11) akan bernilai positif jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Sedemikian diperoleh $a_1, a_2, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$ jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Sehingga titik kesetimbangan endemik akan bersifat stabil asimtotik lokal apabila $\mathcal{R}_0 > 1$.

Analisis Kestabilan Global Titik Kesetimbangan

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (P^0)

Diberikan suatu fungsi \mathcal{L} sebagai berikut:

$$\mathcal{L}(S, E, I_1, I_2) = \mathcal{R}_0 E + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_1 b_2 + \beta_2 \omega_1)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_1 + \frac{\delta}{\mu} \frac{(\beta_2 b_1 + \beta_1 \omega_2)}{(b_1 b_2 - \omega_1 \omega_2)} I_2.$$

Fungsi \mathcal{L} disebut fungsi Lyapunov karena memenuhi persyaratan $\mathcal{L}(S^0, E^0, I_1^0, I_2^0) = 0$ jika disubstitusikan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit. Fungsi \mathcal{L} juga memenuhi $\mathcal{L}(S, E, I_1, I_2) > 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$ sehingga $b_1 b_2 > \omega_1 \omega_2$. Selanjutnya diperoleh $\mathcal{L}' = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \frac{\delta}{\mu} (\mathcal{R}_0 - 1)$ memenuhi $\mathcal{L}'(S, E, I_1, I_2) < 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$. Berdasarkan penjelasan tersebut, karena fungsi \mathcal{L} memenuhi persyaratan fungsi Lyapunov, sehingga titik kesetimbangan P^0 bersifat stabil asimtotik global.

2. Titik Kesetimbangan Endemik (P^*)

Didefinisikan suatu fungsi V sebagai

$$V = \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + a_1 \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) + a_2 \left(I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) + a_3 \left(I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right).$$

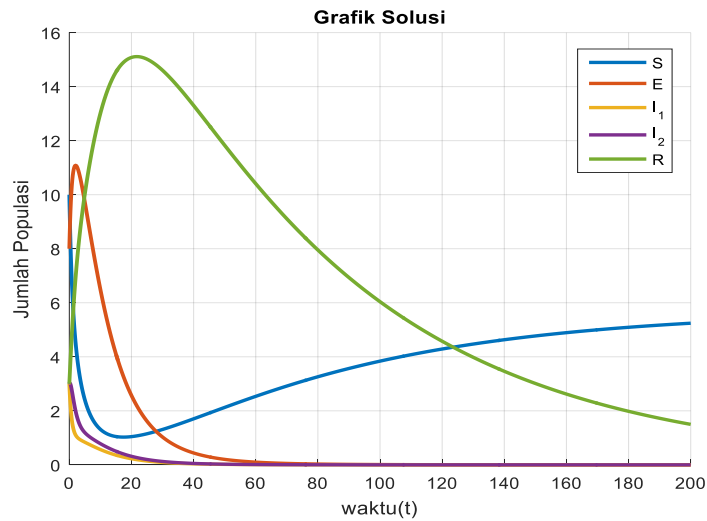
Pada titik kesetimbangan endemik diasumsikan $\omega_2 = 0$. Fungsi V disebut fungsi Lyapunov karena memenuhi kondisi $V(P^*) = 0$ dan $V(S, E, I_1, I_2) > 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $V'(S, E, I_1, I_2) < 0$, sedemikian diperoleh

$$V' = -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \beta_1 I_1^* S^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{xz}{y} \right) + \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \right) b \theta E^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{y}{u} - \frac{xu}{y} \right) + \left(\frac{\beta_2 S^*}{b_2} \right) \omega I_1^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{xu}{y} \right)$$

Berdasarkan penjabaran $V'(S, E, I_1, I_2) \leq 0$, jika $x, y, z, u > 0$ dan $V' = 0$ jika dan hanya jika $x = y = z = u = 1$. Dengan demikian, $V'(S, E, I_1, I_2)$ memenuhi persyaratan fungsi Lyapunov sehingga titik kesetimbangan endemik (P^*) bersifat stabil asimtotik global.

Simulasi Numerik

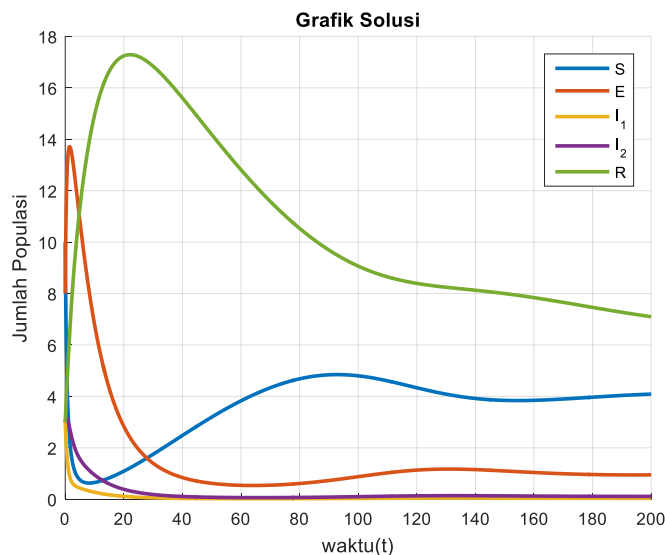
Simulasi dilakukan dengan menggunakan metode ODE45 dan software MATLAB dengan nilai awal $S = 10, E = 8, I_1 = 3, I_2 = 3$, dan $R = 3$. Gambar 2 menunjukkan grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ dengan nilai parameter $\delta = 0.08, \beta_1 = 0.11, \beta_2 = 0.08, \mu = 0.014, b = 0.1, \theta = 0.09, \omega_1 = 0.92, \omega_2 = 0.069, k_1 = 0.09, k_2 = 0.72, d_1 = 0.2, d_2 = 0.02$. Sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 0,8436 < 1$.



Gambar 2 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 0,8436 < 1$

Berdasarkan Gambar 2 sub populasi rentan mengalami penurunan di kondisi awal, kemudian terjadi peningkatan hingga konstan pada titik $S^0 = 5.7143$. Sedangkan pada sub populasi laten (E), terinfeksi (I_1) dan (I_2) serta sub populasi sembuh (R) juga mengalami peningkatan pada kondisi awal, kemudian mengalami penurunan drastis hingga konstan di titik 0. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kurva solusi akan menuju titik kesetimbangan P^0 . Titik P^0 akan stabil sehingga tidak terjadi penularan penyakit TB karena populasi dari $E(t)$, $I_1(t)$, dan $I_2(t)$ menuju nol atau habis.

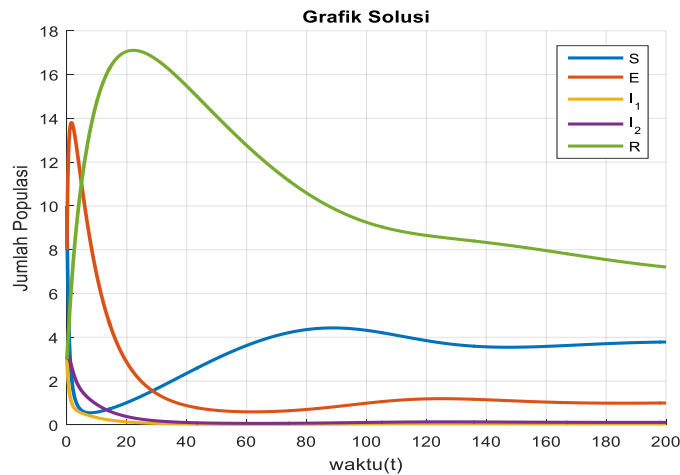
Gambar 3 menunjukkan grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dengan $\omega_2 = 0$ dengan nilai parameter $\delta = 0.17$, $\beta_1 = 0.41$, $\beta_2 = 0.11$, $\mu = 0.014$, $b = 0.1$, $\theta = 0.56$, $\omega_1 = 0.89$, $\omega_2 = 0$, $k_1 = 0.09$, $k_2 = 0.72$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.02$. Sehingga diperoleh $\mathcal{R}_0 = 2.9892 > 1$.



Gambar 3 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 2.9892 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0$

Berdasarkan Gambar 3 semua sub populasi mengalami kenaikan pada kondisi awal, kemudian mengalami dinamika hingga konstan pada titik kesetimbangan P^* . Sehingga, dapat disimpulkan bahwa kurva $S(t)$, $E(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, dan $R(t)$ akan menuju ke titik P^* . Titik P^* pada kondisi nyata masih terjadi penyebaran penyakit. Sehingga subpopulasi terpapar TB yaitu $E(t)$, $I_1(t)$, dan $I_2(t)$ masih harus menjalani pengobatan hingga sembuh.

Gambar 4 menunjukkan grafik solusi untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ dengan $\omega_2 \neq 0$ menggunakan nilai parameter $\delta = 0.17$, $\beta_1 = 0.41$, $\beta_2 = 0.11$, $\mu = 0.014$, $b = 0.1$, $\theta = 0.56$, $\omega_1 = 0.89$, $\omega_2 = 0.069$, $k_1 = 0.09$, $k_2 = 0.72$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.02$.



Gambar 4 Grafik Solusi $\mathcal{R}_0 = 3.2482 > 1$ Dengan $\omega_2 = 0.069$

Berdasarkan Gambar 4, semua sub populasi mengalami kenaikan pada kondisi awal, kemudian mengalami dinamika hingga konstan pada titik kesetimbangan P^* . Berdasarkan grafik solusi yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa kurva $S(t), E(t), I_1(t), I_2(t)$, dan $R(t)$ akan menuju ke titik kesetimbangan endemik P^* . Dengan kata lain titik P^* pada kondisi nyata masih terjadi penyebaran penyakit. Sehingga subpopulasi terinfeksi yaitu $E(t), I_1(t)$, dan $I_2(t)$ masih harus menjalani pengobatan hingga sembuh.

KESIMPULAN

1. Model infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \delta - (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)S - (b(1 - \theta) + b\theta + \mu)E \\ \frac{dI_1}{dt} &= b(1 - \theta)E + \omega_2 I_2 - (\omega_1 + k_1 + \mu + d_1)I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} &= b\theta E + \omega_1 I_1 - (\omega_2 + k_2 + \mu + d_2)I_2 \\ \frac{dR}{dt} &= k_1 I_1 + k_2 I_2 - \mu R \end{aligned}$$

2. Model infeksi mikrobakterium tuberkulosis dengan dua lokasi pengobatan mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (P^0) dan titik kesetimbangan endemik (P^*). Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal dan global apabila $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal dan global apabila $\mathcal{R}_0 > 1$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] WHO, *Global Tuberculosis Report 2021*. Geneva: World Health Organization, 2021.
- [2] A. Iswari, D. Endarti, C. Trijayanti, R. N. H. Haris, and A. N. R. Imansari, "Analisis Biaya Penyakit Tuberkulosis: Studi Kasus di Salah Satu Puskesmas dan Rumah Sakit di Yogyakarta," *Maj. Farm.*, vol. 16, no. 2, p. 211, 2020.
- [3] H. F. Huo and M. X. Zou, "Modelling effects of treatment at home on tuberculosis transmission dynamics," *Appl. Math. Model.*, vol. 40, no. 21-22, pp. 9474-9484, 2016.
- [4] A. Faruk, "Model Epidemik Tuberkulosis Seir dengan Terapi pada Individu Terinfeksi," *J. Penelit. Sains*, vol. 18, no. 3, pp. 99-104, 2016.
- [5] T. Akman Yıldız and E. Karaoğlu, "Optimal control strategies for tuberculosis dynamics with

exogenous reinfections in case of treatment at home and treatment in hospital," *Nonlinear Dyn.*, vol. 97, no. 4, pp. 2643–2659, 2019.