Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(5) (2024), Pages 251-257
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Ketaksamaan Operator Integral Fraksional yang Diperumum pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Siti Rohmah Azizah*, Hairur Rahman, Ach. Nashichuddin

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

azizah221298@gmail.com*, hairur@math.uin-malang.ac.id, achmadnashichuddin@uin-malang.ac.id

Abstrak

Operator integral fraksional merupakan salah satu operator dalam ilmu analisis. Operator integral fraksional itu sendiri memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari pembagian fungsi tersebut. Salah satu perkembangan operator integral fraksional yaitu operator integral fraksional yang diperumum. Ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Ruang Morrey merupakan himpunan semua fungsi terukur Lebesgue, yang normnya berhingga atas ruang Morrey. Penelitian ini, akan membahas mengenai ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum. Pembuktian ketaksamaan tersebut akan menggunakan ketaksamaan Chebyshev dan ketaksamaan Holder.

Kata kunci: Operator Integral Fraksional; Operator Integral Fraksional yang Diperumum; Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum.

Abstract

Fractional integral operators is one of the operators in mathematics analysis. Fractional integral operator itself maps any real-valued function into the integral form of the division of the at function. One of the expansion of fractional integral operator is generalized fractional integral operator. Morrey space is an extension of Lebesgue space. Morrey space is the set of all Lebesgue measurable functions, whose norm is finite over Morrey space. In this study, we will discuss the inequalities of the generalized fractional integral operator on a generalized non-homogeneous Morrey space. We will proof this inequality using Chebyshev inequality and Holder inequality

Keywords: Fractional Integral Operators; Generalized Fractional Integral Operators; Generalized Non-homogeneous Morrey Space

PENDAHULUAN

Operator integral fraksional dikenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886 dan pada tahun 2001 oleh Nakai mengembangkan operator integral fraksional yang diperumum. Penelitian tentang operator integral fraksional yang diperumum banyak dilakukan ([2,3]). Ruang Morrey senidiri diperkenalkan oleh C.B Morrey pada tahun 1938. Ruang Morrey tak homogen yang diperumum merupakan salah satu modifikasi yang ada. Adapun penelitian tentang ruang Morrey tak homogen yang diperumum ([4]). Ketaksamaan Holder merupakan salah satu ketaksamaan dasar yang diperkenalkan oleh Leonard James Rogers (1888) dan disempurnakan oleh Otto Hölder (1889) [5]. Penelitian tentang operator integral fraksional yang diperumum banyak dijumpai, seperti penelitian yang dilakukan oleh [6] dan [7].

Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu definisi operator integral fraksional, operator integral fraksional yang diperumum, ruang Morrey, dan ruang Morrey tak homogen yang diperumum

Submitted: 12 Oktober 2023 Reviewed: 15 April 2024 Accepted: 18 Mei 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i5.16970

Definisi 2.1. [3] *Misalkan f fungsi real di $\mathbb{R}^d$, $0 < \alpha < n \leq d$ dan μ adalah ukuran Lebesgue. Operator integral fraksional disimbolkan I_α, memetakan $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sebagai*

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \tag{1}$$

Definisi 2.2. [2] *Misalkan $\mathbb{R}^+(0,\infty)$, $0 < n \leq d$, $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dan f sebarang fungsi $\mathbb{R}$. Operator integral fraksional yang diperumum, disimbolkan sebagai I_ρ didefinisikan sebagai:*

$$I_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) d\mu(y) \tag{2}$$

Jika $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$ maka $I_\rho = I_\alpha$.

Definisi 2.3. [1] *Misalkan $0 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey merupakan himpunan semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ sedemikian hingga,*

$$\left||f|\right|_{L^p_q} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3}$$

Definisi 2.4.[4] *Misal $1 \leq p < \infty$ dan $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$. Ruang Morrey tak homogen yang diperumum $L^{p,\phi}(\mu) = L^{p,\phi}(\mathbb{R}^d, \mu)$ didefinisikan sebagai:*

$$\left||f|\right|_{L^{p,\phi}(\mu)} := \sup_{B(a,r)} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 3.1 *Misalkan $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga*

$$\mu\left(\{ x \in \mathbb{R}^d : |I_\alpha f(x)| > \gamma \}\right) \leq C \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

Untuk setiap $\gamma > 0$.

Bukti. Misalkan $I_\alpha f(x) = I_1(x) + I_2(x)$ dengan

$$I_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}} d\mu(y)$$

Sedangkan

$$I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}} d\mu(y)$$

$(n-\alpha)p' = n + \gamma$, di mana $\gamma = n(p'-1) - \alpha p'$, maka

$$\frac{\gamma}{p'} = n\left(1 - \frac{1}{p'}\right) - \alpha = \frac{n}{p} - \alpha > 0$$

dengan menggunakan lema 4.2 $|I_2(x)| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} (Cr^{-\gamma})^{\frac{1}{p'}} = C\|f\|_{L^p(\mu)} r^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)}$, berlaku untuk $p = 1$. Kita mengasumsikan bahwa $\|f\|_{L^p(\mu)} = 1$. Juga, untuk $\lambda > 0$, kita pilih r bahwa $Cr^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} = \frac{\lambda}{2}$. Maka,

$$\{x \in \mathbb{R}^d : |I_\alpha f(x)| > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^d : |I_1(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^d : |I_2(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}$$

dikarenakan hubungan antara r dan λ, keduanya kosong. Kita menggunakan ketaksamaan Holder untuk mendapatkannya

$$\begin{aligned} I_1(x) &\le \left(\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R)} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\le C^{\frac{\alpha}{p'}} \left(\int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, menggunakan ketaksamaan Chebyshev dan lema 4.1, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) &\le \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |I| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &\le Cr \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) d\mu(x) \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,R)} \frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) |f(y)|^p \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p d\mu(y) \int_{B(x,R)} \frac{d\mu(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} \\ &\le C \left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\gamma}\right)^q \end{aligned}$$

Teorema 3.2 *Misalkan* $\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \le C\phi r$ *untuk setiap* $r > 0$ *dan* $\lambda \in [0, n-\alpha)$ *kita mempunyai*

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1} \phi(t) dt \le C r^{\lambda+\alpha-n}, r > 0$$

Jika $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n-\lambda}$, *maka terdapat konstanta* $C > 0$ *sedemikiaan hingga* $f \in L^{1,\phi}(\mu)$ *dan sebarang bola* $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$, *kita mempunyai*

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |I_\alpha f(x)| > \gamma\}) \le C r^n \phi(r) \left(\frac{\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

Untuk setiap $\gamma > 0$

Bukti. Jika $|I_\alpha f(x)| > \gamma$, maka

$$\begin{aligned} |I_\alpha f(x)| &\le \int_{|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{|x-y|\ge r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &=: A + B \end{aligned}$$

Kita amati untuk cara pertama yang kita dapatkan

$$\begin{aligned} A &= \int_{|x-y|<r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j} r \le |x-y| < \frac{1}{2^{j+1}} r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} \, d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\le 2^{j+1} r} |f(y)| \, d\mu(y) \\ &\le \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^n (2^j r) \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\le 2^{j+1} r} |f(y)| \, d\mu(y) \\ &\le 2^n r^\alpha M f(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha} \\ &\le C r^\alpha M f(x) \end{aligned}$$

Sementara itu, cara kedua kita memiliki cara berikut:

$$\begin{aligned} B &= \int_{|x-y|\geq r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j r\leq |x-y|<2^{j+1}r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}r} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^n (2^j r)\ \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\leq 2^{j+1}r} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq C\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^j r\right)^{\alpha} \phi(2^{j+1}r) \end{aligned}$$

Dengan ϕ selalu naik, maka $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left(2^j r\right)^{\alpha} \phi\left(2^{j+1}r\right) \leq C \int_{2^j r}^{2^{j+1}r} t^{\alpha-1}\phi(t)dt$$

Dengan ketaksamaan terakhir

$$\begin{aligned} B &\leq C\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \int_{r}^{\infty} t^{\alpha-1}\phi(t)dt \\ &\leq Cr^{\lambda+\alpha-n}\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)} \end{aligned}$$

Maka, kita dapatkan

$$|I_\alpha f(x)| \leq C[Mf(x)]^{1-\frac{\alpha}{n-\lambda}} \|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}$$

Selanjutnya, kita mempunyai

$$Mf(x) > \left(\frac{\gamma}{C\|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}}\right)^{\frac{n-\lambda}{n-\lambda-\alpha}} = \left(\frac{\gamma}{C\|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{\alpha}{n-\lambda}}}\right)^{q}$$

dan selanjutnya, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \mu\left(\{\, x \in B(x,r) :\ |I_\alpha\, f(x)| > \gamma \,\}\right) &\leq Cr^n\phi(r) \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{M}^{1,\phi}(\mu)}^{\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{n-\lambda}}}{\gamma}\right)^{q} \\ &\leq\ Cr^n\phi(r) \left(\frac{\|f\|_{L^{1,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^{q} \end{aligned}$$

Teorema 3.3 *Misalkan $1 \leq p < q < \infty$. Asumsikan bahwa $\inf_{r>0} \phi(r) = 0$ dan $\sup_{r>0} \phi(r) = \infty$. Jika fungsi ϕ dan ρ memenuhi*

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\ \phi(r)^p \text{ dan } \phi(r) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t} dt\ + \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt\ \leq C\ \phi(r)^{\frac{p}{q}}$$

untuk setiap $r > 0$, maka untuk sebarang fungsi $f \in L^{p,\phi}(\mu)$ dan sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\mu\left(\left\{x \in B(a,r) :\ \left|I_\rho f(x)\right| > \gamma\right\}\right) \leq C\ r\phi(r)^p \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}{\mu}}}{\gamma}\right)^{q}$$

untuk setiap $\gamma > 0$.

Bukti. Tinjau sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Untuk setiap $x \in B(a,r)$, misalkan $I_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y)$ dan $I_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y)$

Untuk sebarang $R > 0$ yang tertentu. Dengan menggunakan dekomposisi dipartisi, kondisi growth dari fungsi ρ, ketaksamaan Holder, kondisi growth dari μ, definisi dari $\|f\|_{L^{P,\mu}(\mu)}$ dan kondisi doubling dari ϕ, diperoleh

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R\}} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} |f(y)| d\mu(y) \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(B,2^{j+1}R)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} \, |f(y)| \, d\mu(y) \\
&\le C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^jR)} \rho * \left(2^{j+1}R\right) \int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)} |f(y)| \, d\mu(y) \\
&\le C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^*\left(2^{j+1}R\right)}{(2^jR)} \left(\int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\mu\left(B\left(x, 2^{j+1}R\right)\right)\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\le C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^*\left(2^{j+1}R\right)}{(2^jR)} \left(\int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(2^{j+1}R\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\le C \sum_{j=0}^{\infty} \rho^*(2^{j+1}R) \left(\frac{1}{(2^{j+1}R)} \int_{B\left(x,2^{j+1}R\right)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{k_1 2^{j+1}R}^{k_2 2^{j+1}R} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi doubling dari fungsi ϕ, diperoleh

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\le C \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \int_{2k_1R}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \chi_{[k_1 2^j R, k_2 2^j R]}(t) \right) \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \\
&\le C \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \left(1 + \log_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right) \int_{2k_1R}^{\infty} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} \, dt \\
&\le C \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \phi(2k_1R)^{\frac{p}{q}} \\
&\le C_3 \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \phi(R)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

Untuk setiap $\gamma > 0$, misalkan $\tilde{\gamma} = \left(\frac{\gamma}{2C_3 \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)}} \right)^{\frac{q}{p}}$. Karena fungsi ϕ memenuhi $\inf_{r>0} \phi(r) < \tilde{\gamma} < \sup_{r>0} \phi(r)$, maka terdapat $k_0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga untuk suatu $R_1, R_2 \in [2^{k_0}, 2^{k_0+1}]$ berlaku

$$\phi(R_1) \le \tilde{\gamma} \le \phi(R_2)$$

Karena R_1 dan R_2 memenuhi $\frac{1}{2} \le \frac{R_1}{R_2} \le 2$, maka terdapat suatu konstanta $C > 0$ sedemikian hingga $\phi(R_2) \le C\phi(R_1)$. Akibatnya,

$$\phi(R_1) \le \tilde{\gamma} \le C\phi(R_2)$$

Oleh karena itu, untuk $R = R_1$ dapat diperoleh

$$|I_2(x)| \le C_3 \, \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \rho(R_1)^{\frac{p}{q}} \le C_3 \|f\|_{L^{P,\phi}(\mu)} \tilde{\gamma}^{\frac{p}{q}} \le \frac{\gamma}{2}$$

Definisikan $E_\gamma = \{x \in B(a,r) : \ |I_\rho f(x)| > \gamma\}$. Karena untuk setiap $x \in B(a,r)$ berlaku $|I_\rho f(x)| \le |I_1(x)| + |I_2(x)| \le |I_1(x)| + \frac{\gamma}{2}$, maka

$$\mu(E_\gamma) \le \mu\left(\left\{x \in B(a,r) : \ |I_1(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$

Berdasarkan ketaksamaan Holder dan ketaksamaan 4.4, diperoleh

$$|I_1(x)| \leq \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|} d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$
$$\leq C_4\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan terakhir dan ketaksamaan Chebyshev, diperoleh

$$\mu(E_\gamma) \leq \mu\left\{x \in B(a,r) : \int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\, |f(y)|^p d\mu(y) > \frac{(\gamma/2)^p}{C_4^p\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}}\right\}$$
$$\leq \frac{2^p C_4^p \phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}}{\gamma^p}\int_{B(a,r)}\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\, |f(y)|^p d\mu(y)d\mu(x)$$
$$\leq \frac{C}{\gamma^p}\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}\int_{\mathbb{R}}\int_{B(x,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)|f(y)|^p}{|x-y|}\, \chi_{B(a,r)} d\mu(y)d\mu(x)$$
$$\leq \frac{C}{\gamma^p}\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)(p-1)}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^p\int_{B(y,R_1)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|}\, \chi_{B(a,r)} d\mu(y)d\mu(x)$$

Berdasarkan ketaksamaan sebelumnya diperoleh

$$\mu(E_\gamma) \leq \frac{C}{\gamma^p}\,\phi(R_1)^{\left(\frac{p}{q}-1\right)p}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^p\ M\,\chi_{B(a,r)}(y)d\mu(y)$$
$$\leq \frac{C}{\gamma^p}\tilde{\gamma}^{\frac{p^2}{q}-p} r\phi(r)^p \|f\|^p_{L^{p,\phi}(\mu)}$$
$$\leq Cr\phi(r)^p\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan ketaksamaan operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum . Dari Teorema 3.1, Teorema 3.2 dan Teorema 3.3 diperoleh $\mu(E_\gamma) \leq Cr\phi(r)^p\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Sawano, Y., Fazio, dan Hakim. Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operatos and PDE's Volume I. India: CRC Press. 2020.

[2] Nakai, E. On generalized fractional integrals. Taiwanese J. Math. 5. 587-607. 2001.

[3] Gunawan, H. A note on the generalized fractional integral operators. Bandung: Departement of Mathematics. ITB. 2003.

[4] Hakim, Denny Ivanal, Hendra Gunawan. Weak (p, q) Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous type. Mathematica Acterna, vol. 3. No. 3. p. 161-168. 2013.

[5] Li, Y., Gu, X., dan Zhao, J. The Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality is Equivalent to the Hölder's Inequality. Symmetry, 10. 2018.

[6] Eridani, H. Gunawan dan E. Nakai. On generalized fractional integral operators. Scientiac Mathematicae Japonicae Online, vol. 10. 307-318. 2004.

[7] Sawano, Y. S. Sugano dan H. Tanaka. A Note on Generalized Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces. Hindawi Publishing Corporation. 1-18. 2009.

[8] Garcia-Cuerva, J. dan A. Eduardo Gatto. Boundedness Properties of Fractional Integral Operators Associated to Non-Doubling Measures. Mathematics Subject Classification. 1-18. 2018.
[9] Gunawan, H., Sihwaningrum, I. A weak-(p, q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey spaces via Hedberg Type Inequality. JMP, vol.8. no.2. p. 103-108. 2016.