Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(3) (2024), Pages 110-115
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Operator Integral Fraksional Yang Diperumum Pada Ruang Morrey Yang Diperumum

Safira Nur Aulia Putri, Hairur Rahman, Achmad Nashichuddin

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

mbaksyafira31@gmail.com, hairur@mat.uin-malang.ac.id, achmadnashichuddin@uin-malang.ac.id

Abstrak

Operator integral fraksional atau operator Riesz merupakan operator terbatas dari ruang Lebesgue. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional. Ruang Morrey adalah kumpulan dari fungsi anggota bentuk perumuman dari ruang Lebesgue. Pada penelitian ini, akan membahas mengenai operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum. Pembuktian tersebut akan dilakukan dengan menggunakan dipartisi. Dapat disimpulkan bahwa operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum pada Teorema A $\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ dan Teorema $|T_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$B .

Kata kunci: Operator Integral Fraksional; Ruang Morrey

Abstract

The fractional integral operator or Riesz operator is a finite operator of the Lebesgue space. This fractional integral operator maps any real-valued function into the integral form of the fractional integral function. Morrey space is a collection of general form member functions of Lebesgue space. In this study, we will discuss the generalized fractional integral operator on a generalized Morrey space. The proof will be done using partitioned. It can be concluded that the generalized fractional integral operator on Morrey space generalized to Theorem A $\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ and Theorems B $|T_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$.

Keywords: Fractional Integral Operator; Morrey Space.

PENDAHULUAN

Operator integral fraksional adalah bagian dari potensial Riesz. Operator integral fraksional dikenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Operator integral fraksional merupakan operator terbatas dari ruang Lebesgue. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional. Pada Penelitian ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum. Operator $I_\alpha f$ yang memetahkan sebarang fungsi ernilai real ke dalam bentuk integral dari pembagian fungsi tersebut.

Teorema Hardy-Littlewood-Sobolev telah dibuktikan pada integral fraksional dalam ukuran ganda (*doubling*) maupun tak ganda (*non-doubling*), di mana ruang tak homogen adalah ruang $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan ukuran tak negatif μ yang memenuhi kondisi *growth* $(\mu \in GC(n))$. Ukuran μ dikatakan memenuhi kondisi *growth* apabila terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk semua bola $B(x,r), \mu(B(x,r)) \leq Cr^n$ (Hajiayov, 2015).

Submitted: 3 Maret 2023 Reviewed: 27 Desember 2023 Accepted: 19 Januari 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i3.16973

Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue berisi kelas fungsi yang saling ekuivalen sedemikian sehingga norm fungsi itu terbatas di ruang Lebesgue terbatas.

Definisi 2.1

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ termasuk ruang fungsi, misalkan $\mathbb{R}^n$ adalah himpunan terukur dan ada sebarang nilai $1 \le p < \infty$ yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L^p}$ merupakan ruang bernorma, [1]dengan

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Definisi 2.2

ruang Lebesgue lemah $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty$$

Untuk setiap subhimpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$. [2]

Ruang Lebesgue Lokal

Ruang Lebesgue lokal $L^p_{loc} = L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$ adalah kumpulan kelas-kelas ekeuivalen f sedemikian sehingga untuk setiap sub himpunan kompak $s \in \mathbb{R}^n$ berlaku $\int_S |f|^p < \infty$. [3].

Ruang Morrey

Ruang Morrey merupakan kumpulan dari fungsi anggota bentuk perumuman dari ruang Lebesgue.

Definisi 2.3

Misalkan $1 \le p \le q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{a \in \mathbb{R}, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$|B(a,r)|$ meyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di a dan berjari-jari r. Jika *p=q*, maka $\mathcal{M}^p_q = L^p$. (Mu'tazili, 2019)

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} &= \sup_{a \in \mathbb{R}, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}, r>0} |B(a,r)|^0 \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

Perumum Ruang Morrey

Ruang Morrey yang diperumum dinotasikan sebagai $\mathcal{M}^p_\phi(\mathbb{R}^n)$. Sebelum membahas mengenai definisi ruang Morrey yang diperumum, terlebih dahulu di misalkan $1 \le p < \infty$ dan $\mathcal{G}p$ adalah himpunan semua fungsi $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ sedimikian sehingga

ϕ hampir menurun yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\phi(r) \geq C\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$ dan $r^{\frac{n}{p}}\phi$ hampir naik (yaitu terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $r^{\frac{n}{p}}\phi(r) \leq Cs^{\frac{n}{p}}\phi(s)$ untuk setiap $0 < r < s < \infty$). Perhatian jika $\phi \in \mathcal{G}p$, maka ϕ memenuhi *doubling condition*, yang berarti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\frac{1}{c} \leq \frac{\phi(r)}{\phi(s)} \leq C$ ketika $1 \leq \frac{r}{s} \leq 2$. [4]

Definisi 2.4

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $\phi \in \mathcal{G}p$, ruang Morrey yang diperumum $\mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi [5].

$$\|f\| \supseteq \mathcal{M}_\phi^p = \sup_{a\in\mathbb{R},r>0} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} |f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Operator Integral Fraksional

Operator integral fraksional diperkenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Operasi integral fraksional itu sendiri didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $X, n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Operator I_α yang memetakan fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: X \to \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(X) := \int_x \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(X) d\mu(y), \quad x \in X$$

Adalah operator integral fraksional [6].

Operator Maksimal Hardy-Littlewood

Pembuktian keterbatasan perumum operator integral fraksional diperumum membuktikan operator maksimal yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.6

Operator maksimal Hardy-Littlewood, dilambangkan M^n

$$M^n f(x) := \sup_{B_{r>0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y)$$

Dalam hal ini $B(x,r)$ adalah bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$ dan $\mu\big(B(x,r)\big)$ adalah ukuran Lebesgue [7].

Doubling Condition

Salah satu kondisi dalam pengerjaan operator integral fraksional yaitu kondisi *doubling*. didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.7

Misalkan $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dan asumsikan φ memenuhi syarat berikut yaitu terdapat $C_1 > 1$ sedemikian hingga untuk setiap $s, v > 0$ berlaku:

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(v)} \leq C_1 \text{, untuk } s \in \left[\frac{v}{2}, 2v\right]$$

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)}{s} ds \leq C_1\phi(v)$$

Maka fungsi ϕ dikatakan memenuhi kondisi *doubling* [7].

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Teorema A

Bukti

Karena ρ memenuhi kondisi doubling, maka untuk setiap $k, r > 0$ didapat

$$\int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} dt \sim \rho(2^k r)$$

Misal

Untuk setiap $x \in R^n$ dan $R > 0$, dapat ditulis

$$T_\rho f(x) = \int_{|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy + \rho(r)^{q/(q-p)} \int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} dy$$

$$\int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy \leq \sum_{k=-\infty}^{1} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)|dy$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1} R} |f(y)|dy$$

$$\leq CM$$

$$|I_1(x)| \leq C\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}\phi(R)^{p/q}}$$

$$\|T_\rho f(x)\| \leq CMf(x)\phi(R)^{(p-q)/m} + C\rho$$

$$\rho(r)^{q/(q-p)} \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)(2^q)^{1/2}$$

$$\frac{\rho(r)^{q/(q-p)}}{C} \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)$$

$$\frac{\rho(r)^{q/(q-\rho)}}{C} \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)$$

$$\int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq \rho(r)$$

$$(|I_2(x)|) \leq \int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)|dy$$

$$\leq \rho(r) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)|dy$$

$$\leq C.\rho(r)^{q/(q-p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1}} |f(y)|dy$$

$$\leq C.\rho^{q/(q-p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^{n/p}} \left(\int_{|x-y|<2^{k+1}} |f(y)|dy \right)^{1/p}$$

4.1 Teorema B

Bukti.

Untuk setiap $x \in R^n$ dan $R > 0$,

$$T_\rho f(x) = \int_{|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy + \int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy = I_1(x) + I_2(x).$$

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq \int_{|x-y|<R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{1} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1} R} |f(y)| dy \\
&\leq CMf(x) \sum_{k=-\infty}^{1} \rho(2^k R) \\
&\leq CMf(x) \sum_{k=-\infty}^{1} \int_{2^k}^{2^{k+1} R} \frac{\rho(t)}{t} dt \\
&= CMf(x) \int_0^R \frac{\rho(t)}{t} dt \\
&\leq CMf(x) \phi(R)^{(p-q)/q}.
\end{aligned}
$$

Sementara itu untuk $I_2(x)$

$$
\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq \int_{|x-y|\geq R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1} R} |f(y)| dy \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k R)}{(2^k R)^{n/p}} \left(\int_{|x-y|<2^{k+1} R} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^{k+1} R) \phi(2^{k+1}) \phi(2^{k+1} R) \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1} R} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \\
&= C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} \int_{2^k}^{2^{k+1} R} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \\
&\leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} (R)^{p/q}.
\end{aligned}
$$

Tambahkan keduanya, didapat

$$\left|T_\rho f(x)\right| \leq C \left[Mf(x) \phi(R)^{(p-q)/q} + \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}} (R)^{p/q} \right].$$

Asumsikan bahwa f tidak identik 0 dan bahwa Mf terbatas di mana-mana. karena ϕ surjektif dapat dipilih $R > 0$ sedemikian hingga $\phi(R) = Mf(x). \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{-1}$, Karena itu, untuk setiap $x \in R^n$, didapat

$$\left|T_\rho f(x)\right|^q \leq CMf(x)^p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}.$$

Ketaksamaan yang diinginkan mengikuti dari ini dan operator maksimal terbatas pada $\mathcal{M}_{p,\phi}$.

KESIMPULAN

Berdasarkan dari hasil penelitian di bab sebelumnya, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum pada Teorema A $\|T_\rho f\|_{\mathcal{M}_{q,\phi^{p/q}}} \leq C_{p,q}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}$ dan Teorema B $|T_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\phi}}^{q-p}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] K. M. Limanta, Artist, *Ruang Morrey Kuat dan Lemah.* [Art]. Institut Teknologi Bandung, 2014.

[2] A. Mu'tazili, Artist, *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri Untuk Ruang Morrey Kecil.* [Art]. Institut Teknologi Bandung, 2019.

[3] R. G. Bartle, The Elements Of Integration and Lebesque Measure, John Willey & Sans, Inc, 1995.

[4] H. L. Royden and P. Fitzpatrick, "Real Analysis Fourth Edition," Pearson Eduational Asia Limited and China Machine Press, Replubic of China, 2010.

[5] Ifonika, Idris, Masta and Gunawan, "Generalized Holder's Inequality in Morrey Spaces," *Matematicki Vesnik,* vol. 70, no. 4, pp. 326-337, 2018.

[6] H. Gunawan and I. Sihwaingrum, "A weak (p,q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey spaces of Non-Homogeneous," vol. 3, no. 3, pp. 161-168, 2016.

[7] H. Eridani and E. Nakai, "On generalized fractional integral operators," *Scientiac Mathematicae Japonicae,* vol. 10, pp. 307-318, 2004.