Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(2) (2023), Pages 65-73
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Analisis Konstanta Euler-Mascheroni yang Diperumum pada Deret Harmonik

Raisha Inayah Rahman*, Hairur Rahman, Erna Herawati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

raisharhmn@gmail.com*, hairur@mat.uin-malang.ac.id, faridatul_mahya@uin-malang.ac.id

Abstrak

Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum memiliki fungsi untuk menganalisis fungsi atau barisan yang memiliki parameter tertentu di bidang berbagai. Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan, konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum terus mengalami pembaharuan. Salah satunya dapat ditemukan pada *On Generalized Euler-Mascheroni Constants* oleh G. Abe-I-Kpeng, M.M. Iddirisu, dan K. Nantomah tahun 2022. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis hubungan antara konstanta Euler-Macheroni yang diperumum dengan deret harmonik, serta menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum dengan *signed count permutation*. Dalam analisis ini, diperlukan dekomposisi fungsi Riemann Zeta dan bilangan Stirling jenis pertama. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan *(literature research)*. Hasil dari penelitian ini adalah teorema-teorema baru yang terkait dengan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum.

Kata kunci: Konstanta Euler-Mascheroni yang Diperumum; Deret Harmonik; Fungsi Riemann Zeta; Barisan Stirling Jenis Pertama.

Abstract

The generalized Euler-Mascheroni constant analyzes functions or sequences with specific parameters in various scientific fields. As scientific knowledge advances, the generalized Euler-Mascheroni constant continues to undergo renewal. One example is found in "On Generalized Euler-Mascheroni Constants" by G. Abe-I-Kpeng, M.M. Iddirisu, and K. Nantomah in 2022. The purpose of this study is to analyze the relationship between the generalized Euler-Mascheroni constant and harmonic series, as well as to examine its connection with signed count permutations. The analysis involves decomposing the Riemann Zeta function and using Stirling numbers of the first kind. The methodology employed in this study was literature research. This study yields new theorems concerning the generalized Euler-Mascheroni constant.

Keywords: Generalized Euler-Mascheroni Constant; Harmonic Series; Riemann Zeta Function; Stirling Number of The First Kind.

PENDAHULUAN

[1] Konstanta Euler-Mascheroni (yang dikenal juga dengan konstanta Euler) ditemukan pada 1735 oleh matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler yang dilambangkan c dengan lima angka di belakang koma, yaitu 0,57721. Pada 1790, Lorenzo Mascheroni, matematikawan asal Italia mempopulerkan lambang γ serta menemukan 32 digit angka dibelakang koma. Akan tetapi, hanya 19 digit pertama yang benar, dimana digit ke-20 dan 21 serta digit ke-31 dan 32 salah. Konstanta Euler-Mascheroni memiliki formula

$$\gamma_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\,, k \geq 1$$

Submitted: 8 Maret 2023 Reviewed: 20 Oktober 2023 Accepted: 21 November 2023
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i2.22447

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, konstanta Euler-Mascheroni memiliki versi yang diperumum untuk menganalisis fungsi atau barisan yang memiliki parameter tertentu. Pengaplikasian konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum di antaranya adalah sebagai pemodelan partikel relativistik, mengubah biofisika membran ke *worldsheets* pada teori dawai, dan Chen-Willmore *submanifolds* [2].

Di antara banyaknya konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, terdapat dua teorema yang diperoleh K.peng,dkk (2022), yaitu:

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{k!}{(k+1-n)!}S(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m) \tag{1.1}$$

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1}2-(-1)^k k!\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{4^m(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}\frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1) \tag{1.2}$$

dimana $k \in \mathbb{W}$ dan $n = 1,2,\dots,k+1$ serta $S(m,n)$ merupakan barisan stirling jenis pertama dan $\zeta(m)$ merupakan fungsi Riemann Zeta orde-m [7].

Karena pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ memiliki basis permutasi, maka $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dapat dianalisis apakah siklus dalam partisinya berurutan atau tidak dengan *signed count permutation*. Sehingga diperoleh

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{k!}{(k+1-n)!}S_{scp}(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m) \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1}2-(-1)^k k!\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{4^m(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}\frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1) \tag{1.4}$$

dimana $k \in \mathbb{W}$ dan $n = 1,2,\dots,k+1$ serta $S_{scp}(m,n)$ merupakan barisan stirling jenis pertama dengan *signed count permutation* dan $\zeta(m)$ merupakan fungsi Riemann Zeta orde-m.

METODE

[3] Deret harmonik memiliki definisi

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{2.1}$$

Selisih deret harmonik pada n dan $n-1$ adalah

$$H_n - H_{n-1} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n} \tag{2.2}$$

[4] Deret harmonik yang memiliki orde didefinisikan sebagai berikut

$$H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a}, \qquad a \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.3}$$

[8] Terdapat deret harmonik bolak balik memiliki nilai

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\\ &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots, x=1\\ &= \ln(x+1)\\ &= \ln 2\end{aligned} \tag{2.4}$$

[5] Fungsi Riemann Zeta didefinisikan sebagai berikut

$$\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \tag{2.5}$$

Jika $m = 1$, maka fungsi Riemann Zeta adalah

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = H_n \tag{2.6}$$

[4] Fungsi Riemann Zeta memiliki turunan ke-k yaitu

$$\zeta^k(m) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^m} \tag{2.7}$$

[5] Barisan Stirling jenis pertama merupakan barisan dengan partisi n pada objek sebanyak m.

$$S(m,n) = (m-1) \cdot S(m-1,n) + S(m-1,n-1), m > n, m, n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.8}$$

Jika $n = m$, maka

$$S(m,m) = 1 \tag{2.9}$$

dan $n = 1$ adalah

$$S(m,1) = (n-1)! \tag{2.10}$$

[6] Karena barisan Stirling jenis pertama dapat dianalisis dengan *signed count permutation*, maka barisan Stirling jenis pertama dapat diformulasikan dengan

$$S_{scp}(m,n) = (-1)^{n-k}[(m-1) \cdot S(m-1,n) + S(m-1,n-1)] \tag{2.11}$$

[6] Mendefinisikan barisan Stirling jenis pertama sebagai berikut

$$S(m,n) = \frac{(m-1)!}{(n-1)!} w(m,n-1) \tag{2.12}$$

dengan

$$w(m,0) = 1 \tag{2.13}$$

dan

$$w(m,n) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-n)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m,n-1-k) \tag{2.14}$$

Berdasarkan (2.11), ditemukanlah beberapa sifat sebagai berikut

$$S(m,2) = (m-1)!\, H_{m-1} \tag{2.15}$$

$$S(m,3) = \frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) \tag{2.16}$$

$$S(m,4) = \frac{(m-1)!}{3!}((H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}H_{m-1}^{(2)} + 2H_{m-1}^{(3)}) \tag{2.17}$$

$$S(m,m-1) = \binom{m}{2} \tag{2.18}$$

Berdasarkan (2.10) dan (2.11), ditemukan sifat-sifat barisan Stirling jenis pertama dengan *signed count permutation* sebagai berikut

$$S_{scp}(m,1) = (-1)^{m-1}(m-1)! \tag{2.19}$$

$$S_{scp}(m,2) = (-1)^m (m-1)!\, H_{m-1} \tag{2.20}$$

$$S_{scp}(m,3) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) \tag{2.21}$$

$$S_{scp}(m,4) = (-1)^m \frac{(m-1)!}{3!}\left((H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}H_{m-1}^{(2)} + 2H_{m-1}^{(3)}\right) \tag{2.22}$$

$$S_{scp}(m,m-1) = -\binom{m}{2} \tag{2.23}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut adalah hasil analisis pada konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum yang telah diformulasikan oleh [7], yaitu

Teorema 3.1 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m \tag{3.1}$$

Bukti. Subtitusi $k = 0$ pada (1.1)

$$\mathfrak{X}_0 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(1-n)!} S(m,n)\zeta^{(1-n)}(m) \tag{3.2}$$

Karena $n = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_0 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(m,1)}{m!} \cdot \frac{1}{1^m} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(m,1)}{m!} \tag{3.3}$$

Subtitusi (2.10) pada (3.3)

$$\mathfrak{X}_0 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \tag{3.4}$$

Berdasarkan (2.1), dapat disimpulkan bahwa

$$\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$$

Teorema 3.2 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m + 1) - \ln 2}{m \cdot 2^m} \tag{3.5}$$

Bukti. Subtitusi $k = 1$ pada (1.1)

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2-n)!} S(m,n)\zeta^{(2-n)}(m) \tag{3.6}$$

Karena $n = 1{,}2$ maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} [S(m,1)\zeta'(m) + S(m,2)\zeta(m)] \tag{3.7}$$

Subtitusi (2.5), (2.7), (2.10), dan (2.15) pada (3.7)

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m + 1) - \ln 2}{m \cdot 2^m}$$

Teorema 3.3 Jika $\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$ dan $\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m+1)+-\ln 2}{m \cdot 2^m}$, maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \cdot 2^m} \left(\left(1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m}\right)(2^m + 1) - \ln 2 \right) \tag{3.8}$$

Bukti. Jika (3.1) disubtitusi pada (2.2), maka

$$H_{m-1} = 1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m} \tag{3.9}$$

Subtitusi (3.9) pada (3.7)

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \cdot 2^m} \left(\left(1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m}\right)(2^m + 1) - \ln 2 \right) \tag{3.10}$$

Teorema 3.4 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 2$, maka

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)} \right] \tag{3.11}$$

Bukti. Subtitusi $k = 2$ pada (1.1)

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{2!}{(3-n)!} S(m,n)\zeta^{(3-n)}(m) \tag{3.12}$$

Karena $n = 1{,}2{,}3$ maka

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}[S(m,1)\zeta''(m) + 2S(m,2)\zeta'(m) + 2S(m,3)\zeta(m)] \tag{3.13}$$

Subtitusi (2.10), (2.15), dan (2.16) pada (3.13)

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\zeta''(m) + 2H_{m-1}\zeta'(m) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\zeta(m)\right] \tag{3.14}$$

Subtitusi (2.5) dan (2.7) pada (3.14)

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Teorema 3.5 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = n$ dan $m = n + 1$, maka

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2} \tag{3.15}$$

Bukti. Subtitusi $k = n$

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} n!\, S(m,n)\zeta(m) \tag{3.17}$$

Ambil $m = n + 1$, sehingga disubtitusikan $n = m - 1$

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)!\, S(m, m-1)\zeta(m) \tag{3.18}$$

Subtitusi (2.18) pada (3.18)

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1)}{2}\zeta(m) \tag{3.19}$$

Jika (3.19) dikembalikan dalam bentuk n, maka

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\zeta(n+1) \tag{3.20}$$

Berdasarkan (2.3) dan (2.5), maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$$

Teorema 3.6 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2 \tag{3.21}$$

Bukti. Subtitusi $k = 0$ pada (1.3)

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(1-n)!} S_{scp}(m,n)\zeta^{(1-n)}(m) \tag{3.22}$$

Karena $n = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S_{scp}(m,1)}{m!} \cdot \zeta(m) \tag{3.23}$$

Subtitusi (2.5) dan (2.19) pada (3.23)

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \tag{3.24}$$

Berdasarkan (2.4) dapat disimpulkan bahwa

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$$

Teorema 3.7 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right) \tag{3.25}$$

Bukti. Subtitusi $k = 1$ pada (1.3)

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2-n)!} S_{scp}(m,n)\zeta^{(2-n)}(m) \tag{3.26}$$

Karena $n = 1,2$ maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[S_{scp}(m,1)\zeta'(m) + S_{scp}(m,2)\zeta(m)\right] \tag{3.27}$$

Subtitusi (2.5), (2.7), (2.19) dan (2.20) pada (3.27)

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$$

Teorema 3.8 Jika $\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$ dan $\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{1-\mathfrak{X}_{scp(0)}}{2^m} + H_{m-1}\left(\frac{1}{2^m} + 1\right)\right] \tag{3.28}$$

Bukti. Subtitusi (3.21) pada (3.25), maka diperoleh Teorema 3.8.

Teorema 3.9 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 2$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right] \tag{3.29}$$

Bukti. Subtitusi $k = 2$ pada (1.3)

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{2!}{(3-n)!} S_{scp}(m,n)\zeta^{(3-n)}(m) \tag{3.30}$$

Karena $n = 1,2,3$ maka

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[S_{scp}(m,1)\zeta''(m) + 2S_{scp}(m,2)\zeta'(m) + 2S_{scp}(m,3)\zeta(m)\right] \tag{3.31}$$

Subtitusi (2.5), (2.7), (2.19), (2.20) dan (2.21) pada (3.31)

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Teorema 3.10 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = n, m = n + 1$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2} \tag{3.32}$$

Bukti. Subtitusi $k = n$ pada (1.3), maka

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} n!\, S_{scp}(m,n)\zeta(m) \tag{3.33}$$

Ambil $m = n + 1$, maka akan disubtitusikan $n = m - 1$

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)!\, S_{scp}(m, m-1)\zeta(m) \tag{3.34}$$

Subtitusi (2.23) pada (3.34), maka

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1)}{2} \zeta(m) \tag{3.35}$$

Dikembalikan lagi (3.35) ke bentuk n, sehingga

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \zeta(n+1) \tag{3.35}$$

Jika dinyatakan dalam deret harmonik, maka Teorema 3.10 terbukti.

Teorema 3.11 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \zeta(2m+1) \right] \tag{3.36}$$

Bukti. Subtitusi $k = 0$ pada (1.2)

$$\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(1-n)!} \zeta^{(1-n)}(2m+1) \right] \tag{3.37}$$

Karena disubtitusi $n = 1$ dan (2.10), maka Teorema 3.11 terbukti

Teorema 3.12 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \left(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1) \right) \right] \tag{3.38}$$

Bukti. Subtitusi $k = 1$ pada (1.2)

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(2-n)!} \zeta^{(2-n)}(2m+1) \right] \tag{3.39}$$

Karena disubtitusi (2.10), (2.15), dan $n = 1{,}2$, maka Teorema 3.12 terbukti.

Teorema 3.13 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = n$ dan $m = \frac{n}{2}$, maka

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!} \right] \tag{3.40}$$

Bukti. Subtitusi $k = n$ pada (1.2)

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} S(2m+1,n)\, \zeta(2m+1) \right] \tag{3.41}$$

Ambil $m = \frac{n}{2}$, maka subtitusi $n = 2m$ dan (2.18)

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{2 \cdot 4^m \cdot (2m-1)!} \right] \tag{3.42}$$

Kembalikan (3.42) ke bentuk n

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!} \right] \tag{3.43}$$

Jika dinyatakan dalam deret harmonik, maka Teorema 3.13 terbukti.

Teorema 3.14 Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)} \zeta(2m+1) \right] \tag{3.44}$$

Bukti. Subtitusi $k = 0$ pada (1.4)

$$\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(1-n)!} \zeta^{(1-n)}(2m+1) \right] \tag{3.45}$$

Jika disubtitusi $n = 1$ dan (2.10), maka Teorema 3.14 terbukti.

Teorema 3.15 Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)}\left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1}\zeta(2m+1)\right)\right] \quad (3.46)$$

Bukti. Subtitusi $k = 1$ pada (1.4)

$$\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(2-n)!}\zeta^{(2-n)}(2m+1)\right] \quad (3.47)$$

Jika (3.47) disubtitusi pada (2.19), (2.20), dan $n = 1{,}2$, maka Teorema 3.14 terbukti.

Teorema 3.16 Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$ dan $m = \frac{n}{2}$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{2 \cdot 4^m(2m-1)!}\right] \quad (3.48)$$

Bukti. Subtitusi $k = n$ pada (3.48)

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} S_{scp}(2m+1,n)\,\zeta(2m+1)\right] \quad (3.49)$$

Ambil $m = \frac{n}{2}$, sehingga subtitusi $n = 2m$ dan (2.23)

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{2 \cdot 4^m(2m-1)!}\right] \quad (3.50)$$

Kembalikan (3.50) dalam bentuk n

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!}\right] \quad (3.51)$$

Jika dinyatakan dalam bentuk deret harmonik, Teorema 3.16 terbukti.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari permbahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Hubungan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan deret harmonik antara lain
   a. $\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$
   b. $\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m+1)-\ln 2}{m \cdot 2^m}$
   c. $\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{(H_{m-1}-\ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1}-\ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$
   d. $\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$
   e. $\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)}\zeta(2m+1)\right]$
   f. $\mathfrak{Z}_1 = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)}\left(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1)\right)\right]$
   g. $\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$
2. Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation* antara lain
   a. $\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$
   b. $\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$
   c. $\mathfrak{X}_{scp(2)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1}-\ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1}-\ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$
   d. $\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$
   e. $\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)}\zeta(2m+1)\right]$

f. $\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)}\left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1}\zeta(2m+1)\right)\right]$

g. $\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{2 \cdot 4^m (2m-1)!}\right]$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mortici, C. (2010). On new sequences converging towards the Euler–Mascheroni constant. *Computers & Mathematics with Applications*, *59*(8), 2610-2614.

[2] Garay, Oscar J. (2008). Extremals Of The Generalized Euler-Bernoulli Energy And Applications. *JGSP 12*, 27-61.

[3] Olaikhan, S.A. (2021). An Introduction To The Harmonic Series And Logarithmic Integrals (For High School Students Up To Researchers). *ISBN 9781736736012*.

[4] Iwaniec, H. (2014). Lectures on the Riemann Zeta Function*. USA: American Mathematical Society.*

[5] Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., Patashnik, Oren. (1989). Concrete Mathematics Second Edition*. London: Greenwood Press.*

[6] Adamchik, Victor. (1997). On Stirling Numbers and Euler Sums. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 119-130

[7] Kpeng, G.Abe-I., Iddrisu, M.M., & Nantomah, K. (2022). On Generalized Euler–Mascheroni Constants. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *10*(1), 226-235.

[8] Cowen, C. C., Davidson, K. R., & Kaufman, R. P. (1980). Rearranging the alternating harmonic series. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 817-819

[9] Dunham, W. (1999). Euler : The Master of Us All*. Washington DC: The Mathematical Association Of America.*

[10] Herhyanto, N., & Gantini, T. (2009). Pengantar Statistika Matematika. *Bandung: Yrama Widya*

[11] Olaikhan, S.A. (2021). An Introduction To The Harmonic Series And Logarithmic Integrals (For High School Students Up To Researchers). *ISBN 9781736736012*.

[12] Karatsuba, A.A., & Voronin, S.M. (1992). The Riemann Zeta-Function. *Berlin: Walter de Gruyter.*

[13] Havil, Julian. (2009). Gamma : Exploring Euler's Constant. *New Jersey: Prince University Press.*

[14] Glazer, E.M., McConnell, J.W. (2002). Real-Life Math : everyday use of mathemathical concept. *New York: Addison-Wesley Publishing Company.*

[15] Erdos, P. (1932). Egy Kürschák-Féle Elemi Számelméleti Tétel Általánosítása (Generalization of an elementary number-theoretic theorem of K¨ursch´ak, in Hungarian), *Mat. Fiz, Lapok* 39, 17–24.