Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(2) (2023), Pages 74-83
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

# Solusi Eksak Sistem Imun Terhadap Virus Ebola

**Amadhea Aisyatul Aisyiyah*, Heni Widayani , Erna Herawati.**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

, heniwidayani@mat.uin-malang.ac.id, faridatul_mahya@uin-malang.ac.id

**Abstrak**

Virus Ebola merupakan salah satu penyakit mematikan yang menyebabkan pembekuan darah dalam organ tubuh dan yang disebarkan melalui kontak langsung darah atau cairan tubuh pengidap. Berdasarkan hal tersebut imun di dalam tubuh akan terus menurun dan mengakibatkan Demam Berdarah Ebola. Wabah Ebola 2014-2016 di Afrika Barat telah memicu percepatan pengembangan beberapa vaksin pencegahan terhadap virus Ebola. Tujuan dari vaksinasi untuk menginduksi kekebalan terhadap penyakit menular. Dan juga untuk merangsang sistem kekebalan dan kemampuannya untuk menyimpan dan mengingat informasi tentang patogen tertentu, yang mengarah ke kekebalan protektif jangka panjang. Model persamaan pada vaksin virus ebola dalam penelitian ini melibatkan konsentrasi antigen yang merupakan variabel $(A)$, dengan cara vaksin dimasukkan ke dalam tubuh pasien di mana akan melekat pada sel memori B yang merupakan variabel $(M)$, yang kemudian akan dirangsang oleh sel-sel antibodi berumur pendek dilambangkan dengan variabel $(S)$ ataupun sel berumur panjang yang dilambangkan dengan variabel $(L)$, sedangkan antibodi akan membuktikan kemanjuran dilambangkan dengan variabel $(Ab)$ pada respon imun tubuh pasien. Simulasi solusi eksak vaksin ebola menggunakan metode faktor integrasi yang nanti akan dibandingkan dengan simulasi numerik sesuai dengan nilai parameter dari penelitian Irene Balelli dkk (2020). Simulasi yang didapat memiliki nilai error perhitungan untuk setiap variabelnya sangat kecil yang artinya nilai eksak model vaksinasi terhadap virus ebola menunjukkan bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan terhadap solusi numerik dengan menggunakan metode *Runge Kutta* orde 45, error numerik yang dihasilkan paling besar adalah $2.29640283510782 \times 10^9$.

**Kata kunci**: Virus Ebola; Solusi Eksak; Sistem Imun; Persamaan Diferensial Biasa.

**Abstract**

The Ebola virus is a deadly disease that causes blood clots in the body's organs and is spread through direct contact with the blood or body fluids of sufferers. Based on this, the immune system in the body will continue to decrease and cause Ebola Hemorrhagic Fever. The 2014-2016 Ebola outbreak in West Africa has accelerated the development of several preventive vaccines against the Ebola virus. The goal of the vaccination is to induce immunity against infectious diseases. And also to stimulate the immune system and its ability to store and remember information about specific pathogens, leading to long-term protective immunity. The model equation for the Ebola virus vaccine in this study involves the concentration of the antigen which is a variable $(A)$, by means of which the vaccine is inserted into the patient's body where it will attach to B memory cells which are variable $(M)$, which will then be stimulated by the cells short-lived antibodies are denoted by variables $(S)$ or long-lived cells are denoted by variables $(L)$, while antibodies will prove efficacy denoted by variables $(Ab)$ on the patient's immune response. The simulation of the exact solution for the Ebola vaccine uses the integration factor method which will later be compared with numerical simulations according to the parameter values from the research of Irene Balelli et al (2020). The simulation obtained has a small calculation error value for each variable, which means that the exact value of the Ebola virus vaccination model shows that there is no significant difference to the numerical solution using the order 45 *Runge Kutta* method, the largest resulting numerical error is 2.29640283510782× 〖10 〗^9.

**Keywords**: Ebola Virus; Exact Solution; Immune System; Ordinary Differential Equation.

Submitted: 8 Maret 2023 Reviewed: 20 Oktober 2023 Accepted: 21 November 2023
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i2.22449

## PENDAHULUAN

Wabah Virus Ebola terjadi pada kisaran tahun 2014 hingga 2016 di Afrika Barat[1]. Sejak penemuan virus Ebola pada tahun 1976, wabah Ebola berulang telah tercatat di Afrika. Wabah terbesar yang pernah tercatat telah mempengaruhi Afrika Barat antara bulan Maret 2014 dan bulan Juni 2016, di mana Darurat Kesehatan Masyarakat Kepedulian Internasional diumumkan[2] karena tidak ada izin vaksin atau obat yang tersedia, Pada bulan Maret 2020 virus tersebut telah terbatas pada wilayah yang relatif kecil dan telah menyebabkan ribuan kematian [3]. Virus Ebola merupakan salah satu penyakit mematikan yang menyebabkan pembekuan darah dalam organ tubuh dan yang disebarkan melalui kontak langsung darah atau cairan tubuh pengidap. Berdasarkan hal tersebut imun di dalam tubuh akan terus menurun dan mengakibatkan Demam Berdarah Ebola [4].

Model persamaan pada vaksin virus ebola dalam penelitian ini melibatkan konsentrasi antigen yang merupakan variabel ($A$), dengan cara vaksin dimasukkan ke dalam tubuh pasien di mana akan melekat pada sel memori B yang merupakan variabel ($M$), yang kemudian akan dirangsang oleh sel-sel antibodi berumuk pendek dilambangkan dengan variabel ($S$) ataupun sel berumur panjang yang dilambangkan dengan variabel ($L$), sedangkan antibodi akan membuktikan kemanjuran dilambangkan dengan variabel ($Ab$) pada respon imun tubuh pasien[5]

Pemodelan matematika telah banyak berkontribusi pada penyelidikan dinamika penyakit, seperti pada penelitian sebelumnya yaitu dengan memodelkan wabah Ebola. Menggunakan model (*Susceptible-Infectious-Infected Deceased-Recovered*) deterministik yang untuk menyelidiki penyebaran, persistensi, dan kekambuhan wabah Penyakit Virus Ebola (EVD) di Afrika [6], akan tetapi kajian terkait respons imun dari hasil vaksinasi ini belum banyak dilakukan karena memang vaksinnya sangat terbatas, sehingga sangat sedikit penelitian terkait respons imun dalam tubuh pasien ebola[7]

Berdasarkan permasalahan di atas, penelitian ini perlu dilakukan dengan tujuan mengetahui bagaimana solusi eksak model persamaan pada vaksin ebola serta bagaimana perbandingan solusi eksak dengan solusi numeriknya dengan menggunakan metode *Runge Kutta* orde 45 maka penelitian ini dengan tujuan untuk menghasilkan solusi perkiraan yang sesuai kepentingan agar dapat menunjukkan bentuk kualitatif dari solusi dan juga dapat membantu dalam mengidentifikasi maka penelitian ini berjudul *"Solusi Eksak Model Persamaan Diferensial Biasa Sistem Imun Terhadap Virus".* Berikut merupakan model yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= -\delta_A A \\
\frac{dM}{dt} &= \rho A - (\mu_S + \mu_L)AM - \delta_M M \\
\frac{dS}{dt} &= \mu_S AM - \delta_S S \\
\frac{dL}{dt} &= \mu_L AM - \delta_L L \\
\frac{dAb}{dt} &= \theta_S S + \theta_L L - \delta_{Ab} Ab
\end{aligned} \tag{1}
$$

Adapun nilai parameter model vaksin virus ebola:

**Tabel 1** Nilai Parameter Model Vaksin Virus Ebola yang digunakan

| Parameter | Nilai Parameter | Keterangan | Satuan |
|---|---|---|---|
| $\delta_A$ | 10.7 | Tingkat penurunan antigen | Per hari |
| $\delta_M$ | 63.3 | Tingkat penurunan sel M | Per hari |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\delta_S$ | 0.7 | Tingkat kematian sel S | Per hari |
| $\delta_L$ | 9.5 | Tingkat kematian sel L | Per hari |
| $\delta_{Ab}$ | 23.9 | Tingkat kematian antibodi | Per hari |
| $\rho$ | 3.5 | Tingkat di mana sel M dihasilkan dari waktu ke waktu per konsentrasi antigen | Per hari |
| $\mu_S$ | 2.5 | Tingkat diferensiasi sel M menjadi sel S per konsentrasi antigen | Per hari |
| $\mu_L$ | 0.011 | Tingkat diferensiasi sel M menjadi sel L per konsentrasi antigen | Per hari |
| $\theta_S$ | 20 | Tingkat produksi antibodi per sel S | Per hari |
| $\theta_L$ | 30 | Tingkat produksi antibodi per sel L | Per hari |

## METODE

### Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu penelitian kualitatif dan kuantitatif. Penelitian kualitatif [8] yaitu metode penelitian berdasarkan filosofi pos positivisme, yang digunakan untuk meneliti kondisi objek alam, dalam penelitian ini digunakan untuk mencari solusi eksak sedangkan penelitian kuantitatif digunakan dalam melakukan simulasi numerik.

### Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah dengan memanfaatkan pendekatan literatur yang terkait dengan beberapa studi literatur yang diperlukan untuk melaksanakan penelitian ini.

### Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang dipergunakan pada penelitian ini ialah menganalisis. Beberapa langkah yang diterapkan oleh penulis untuk mengkaji penelitian mengenai respons imun terhadap vaksin ebola ini adalah:

1. Menentukan solusi eksak model matematika respons imun terhadap vaksin ebola.
    a. Memahami model matematika.
    b. Mencari solusi eksak matematika respons imun terhadap vaksinasi.
    c. Menyubstitusikan nilai parameter ke solusi eksak.

2. Membandingkan solusi eksak dengan solusi numerik
   a. Melakukan simulasi perbandingan dari solusi eksak dan solusi numerik
   b. Melakukan interpretasi terhadap grafik simulasi.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Sistem Eksak

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dA}{dt} = -\delta_A A & A(0) = A_0 \\ \dfrac{dM}{dt} = \rho A - (\mu_S + \mu_L)AM - \delta_M M & M(0) = M_0 \\ \dfrac{dS}{dt} = \mu_S AM - \delta_S S & S(0) = S_0 \\ \dfrac{dL}{dt} = \mu_L AM - \delta_L L & L(0) = L_0 \\ \dfrac{dAb}{dt} = \theta_S S + \theta_L L - \delta_{Ab} Ab & Ab(0) = Ab_0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Pada saat ini akan mengkaji mengenai solusi persamaan diferensial biasa terhadap sistem imun pada manusia oleh virus ebola menggunakan metode faktor integrasi sebagai berikut:
Persamaan 1 terdapat $\frac{dA}{dt} = -\delta_A A$ dengan $A(0) = A_0$
Diselesaikan dengan metode pemisahan variabel sebagai berikut:
karena $A(0) = A_0$
maka solusi khusus yang didapat untuk nilai awal $A_0$ adalah $A(t) = A_0 e^{-\delta_A t}$ (2)
persamaan ke 2 solusi $A(t)$ di susbtitusikan

$$\frac{dM}{dt} = \rho A_0 e^{-\delta_A t} - (\mu_S + \mu_L) A_0 e^{-\delta_A t} M(t) - \delta_M M(t)$$

maka solusi khusus yang didapatkan untuk nilai awal $M(0) = M_0$ adalah

$$M(t) = \left(\rho\, A_0 \int e^{-\delta_A t + \int f(t)dt} dt\right).\ e^{-\int f(t)dt}\, dt \qquad (3)$$

Pada persamaan (2)$dan$ (3) disubstitusikan ke $\frac{dS}{dt}$ dari sistem (1)

$$\frac{dS}{dt} = \mu_S A_0 (\int_0^t \rho\, A_0 e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} dt + \frac{M_0}{e^{\frac{A_0 \mu_S - A_0 \mu_S}{\delta}}}) e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} - \delta_S S(t)$$

maka solusi khusus yang didapatkan untuk nilai awal $S(0) = S_0$ adalah

$$S(t) = \mu_S A_0 (\int e^{-\delta_A t (M(t))})\ e^{-\delta_S}\, dt \qquad (4)$$

Pada persamaan (2) , (3)$dan$ .4) disubstitusikan ke $\frac{dL}{dt}$ dari sistem (1)

$$\frac{dL}{dt} = \mu_L A_0 (\int_0^t \rho\, A_0 e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} dt + \frac{M_0}{e^{\frac{A_0 \mu_S - A_0 \mu_S}{\delta}}}) e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} - \delta_S L(t)$$

solusi khusus yang didapatkan untuk nilai awal $L(0) = L_0$ adalah

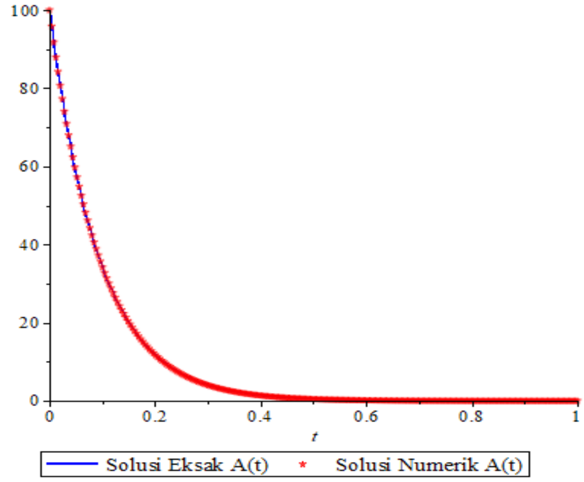
$$L(t) = \mu_L A_0 (\int e^{-\delta_A t (M(t))})\, e^{-\delta_L} dt \qquad (5)$$

Pada persamaan (2), (3), (4) $dan$ (5) disubstitusikan ke $\frac{dAb}{dt}$ dari sistem (1)

$$\frac{dAb}{dt} = \theta_S (M(t)) + \theta_L (L(t)) - \delta_{Ab} Ab$$

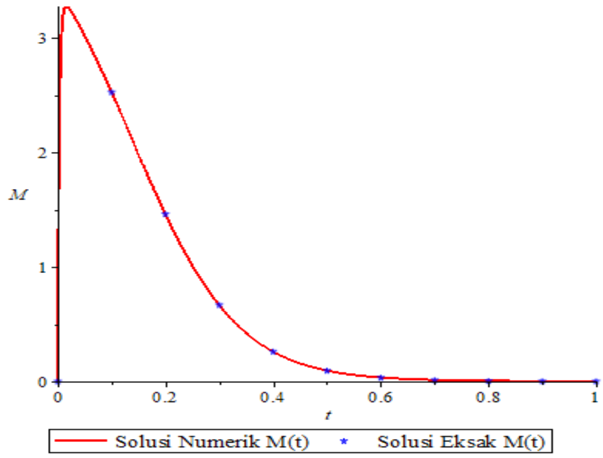
$$\frac{dAb}{dt} = \theta_S(\int_0^t A_0\mu_S M_0\, e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} +$$
$$\rho\, A_0(\int_0^t e^{-\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} dt) e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}) + c_1)}$$
$$e^{-\delta_S t})\theta_L(e^{\int_0^t A_0\mu_L}(\int_0^t \rho\, A_0 e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}} dt +$$
$$M_0 e^{\frac{A_0\mu_S - A_0\mu_S}{\delta}})\delta_L e^{\frac{\mu_L A_0 e^{-\delta_A t} + A_0 e^{-\delta_A t}\mu_S - \delta_M t\delta + \delta^2 t}{\delta}}) - \delta_{Ab} Ab$$

maka solusi khusus yang didapatkan untuk nilai awal $Ab(0) = Ab_0$ adalah
$Ab(t) = \left(\theta_S(S(t)).\theta_L(L(t)).\int e^{\int j(t)dt}dt\right).e^{-\delta_{Ab}}$ (6)
validasi solusi analitik tersebut diperoleh ketika substitusi solusi ke sistem persamaan diferensial biasa dan nilai awal sesuai. Kemudian akan di substitusikan sebagai berikut:



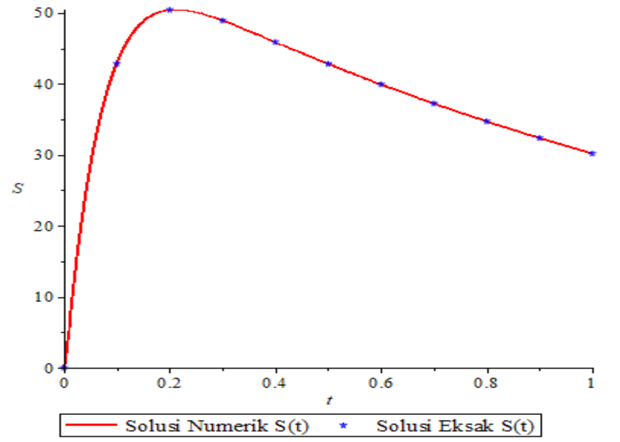

***Gambar 1** Plot Solusi Eksak A(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter:*
$\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3;\ \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

**Substitusi Nilai Parameter ke Persamaan (2)**



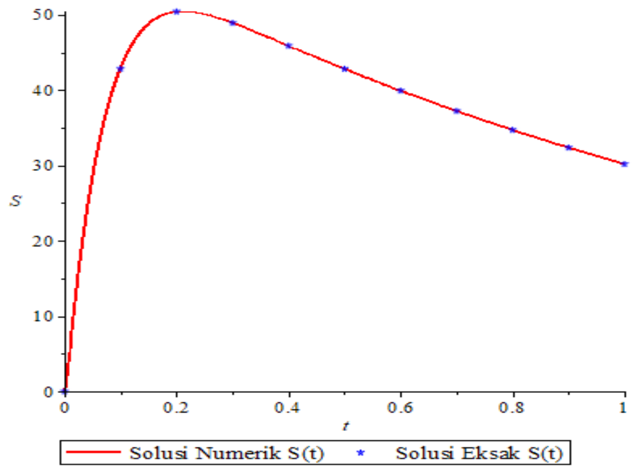

**Gambar 2** Plot Solusi Eksak M(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter $\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3;\ \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

**Substitusi Nilai Parameter ke Persamaan (3)**



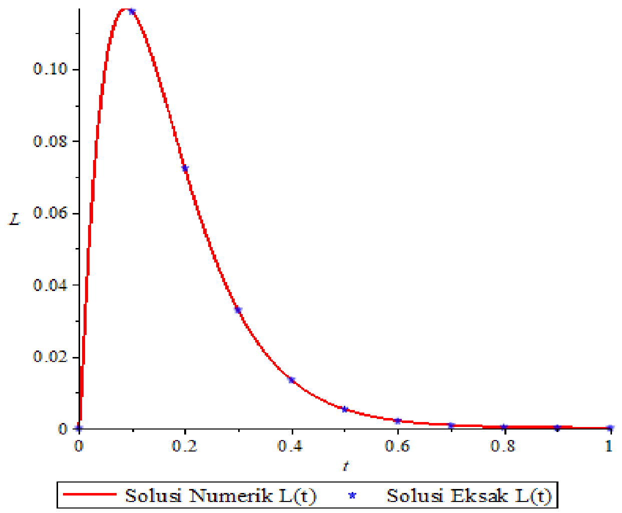

**Gambar 3** Plot Solusi Eksak M(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter $\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3;\ \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

**Substitusi Nilai Parameter ke Persamaan (4)**



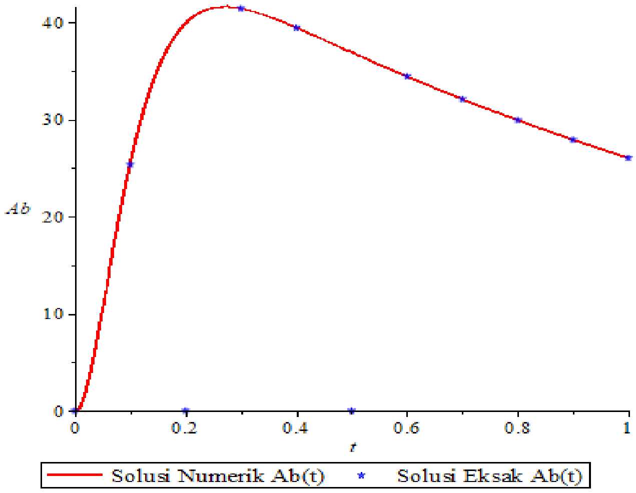

**Gambar 4** Plot Solusi Eksak S(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter: $\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3;\ \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

**Substitusi Nilai Parameter ke Persamaan (5)**




**Gambar 5** Plot Solusi Eksak L(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter: $\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3;\ \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

**Substitusi Nilai Parameter ke Persamaan (6)**




**Gambar 6** Plot Solusi Eksak Ab(t) dengan t= [0,1] dengan nilai parameter: $\delta_A = 10.7; \delta_M = 63.3; \delta_S = 0.7; \delta_L = 9.5; \delta_{Ab} = 23.9; \rho = 3.5; \mu_S = 2.5; \theta_S = 20; \theta_L = 30; \mu_L = 0.011$

### 4.2 Perbandingan Hasil Solusi Eksak dan Runge Kutta

Perbandingan hasil solusi eksak dan *Runge Kutta* dapat disajikan dalam tabel

**Tabel 2** Hasil $A(t)$ eksak dan $A(t)$ Runge Kutta orde 45

| **t** | $A(t)$ **eksak** | $A(t)$ ***Runge Kutta* orde 45** | **Error =** $A(t)$ **eksak-**$A(t)$ **RK** |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 100 | 0 |
| 0.1 | 34.30085174 | 34.3008543618458 | $-2.62185 \times 10^6$ |
| 0.2 | 11.76548430 | 11.7654860995256 | $-1.79953 \times 10^6$ |
| 0.3 | 4.035661327 | 4.03566225196148 | $-9.24961 \times 10^7$ |
| 0.4 | 1.384266209 | 1.38426663158130 | $-4.22581 \times 10^7$ |
| 0.5 | 0.4748150999 | 0.474815281278330 | $-1.81378 \times 10^7$ |
| 0.6 | 0.1628656235 | 0.162865698119069 | $-7.46191 \times 10^8$ |
| 0.7 | 0.05586429605 | 0.0558643259172252 | $-2.98672 \times 10^8$ |
| 0.8 | 0.01916192936 | 0.0191619410730943 | $-1.17131 \times 10^8$ |
| 0.9 | 0.006572704982 | 0.00657270950038480 | $-4.51838 \times 10^9$ |
| 1 | 0.002254493791 | 0.00225449551335420 | $-1.72235 \times 10^9$ |

**Tabel 3** Hasil M(t) Eksak dan M(t) Runge Kutta orde 45

| $t$ | $M(t)$ **eksak** | $M(t)$ ***Runge Kutta* orde 45** | **Error = *A(t)* eksak-*A(t)* RK** |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 2.526860691 | 2.52686149313983 | $-8.0214 \times 10^7$ |
| 0.2 | 1.462188617 | 1.46218888062763 | $-2.63628 \times 10^7$ |
| 0.3 | 0.6678868107 | 0.667887045441807 | $-2.34742 \times 10^7$ |
| 0.4 | 0.2604843902 | 0.260484483014435 | $-9.28144 \times 10^8$ |
| 0.5 | 0.09393894825 | 0.0939389862899886 | $-3.804 \times 10^8$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.6 | 0.03281125419 | 0.0328112751664999 | $-2.09765 \times 10^8$ |
| 0.7 | 0.01132615459 | 0.0113261723792536 | $-1.77893 \times 10^8$ |
| 0.8 | 0.003893489721 | 0.00389348959377712 | $1.27223 \times 10^{10}$ |
| 0.9 | 0.001336506781 | 0.00133650339544722 | $3.38555 \times 10^9$ |
| 1 | 0.0004585518053 | 0.000458548066276537 | $3.73902 \times 10^9$ |

**Tabel 4** Hasil $S(t)$ Eksak dan $S(t)$ *Runge Kutta* orde 45

| t | $S(t)$ **eksak** | $S(t)$ ***Runge Kutta* orde 45** | **Error = A(t) eksak-A(t) RK** |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 42.85814131 | 42.8581409760323 | $3.33968 \times 10^7$ |
| 0.2 | 50.45571974 | 50.4557199090890 | $-1.69089 \times 10^7$ |
| 0.3 | 48.94605398 | 48.9460542127878 | $-2.32788 \times 10^7$ |
| 0.4 | 45.91669328 | 45.9166935470688 | $-2.67069 \times 10^7$ |
| 0.5 | 42.84867436 | 42.8486746229847 | $-2.62985 \times 10^7$ |
| 0.6 | 39.95626179 | 39.9562620174081 | $-2.27408 \times 10^7$ |
| 0.7 | 37.25549880 | 37.2554990079166 | $-2.07917 \times 10^7$ |
| 0.8 | 34.73685915 | 34.7368593495307 | $-1.99531 \times 10^7$ |
| 0.9 | 32.38844013 | 32.3884403238699 | $-1.9387 \times 10^7$ |
| 1 | 30.19878228 | 30.1987824587873 | $-1.78787 \times 10^7$ |

**Tabel 4** Hasil $L(t)$ Eksak dan $L\ (t)$ *Runge Kutta* orde 45

| t | $L(t)$ **Eksak** | $L(t)$ ***Runge Kutta* orde 45** | **Error= A(t) eksak-A(t) RK** |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.1161453838 | 0.116145382007083 | $1.79292 \times 10^9$ |
| 0.2 | 0.07240810931 | 0.0724081094717689 | $-1.61769 \times 10^{10}$ |
| 0.3 | 0.03290364040 | 0.0329036405326176 | $-1.32618 \times 10^{10}$ |
| 0.4 | 0.01343834139 | 0.0134383414806693 | $-9.06693 \times 10^{11}$ |
| 0.5 | 0.005289058052 | 0.00528905806267001 | $-1.067 \times 10^{11}$ |
| 0.6 | 0.002056688935 | 0.00205668888501276 | $4.99872 \times 10^{11}$ |
| 0.7 | 0.0007967393163 | 0.000796739135151227 | $1.81149 \times 10^{10}$ |
| 0.8 | 0.0003082893295 | 0.000308289101900652 | $2.27599 \times 10^{10}$ |
| 0.9 | 0.0001192466951 | 0.000119246471823403 | $2.23277 \times 10^{10}$ |
| 1 | 0.00004611977417 | 0.0000461195569705592 | $2.17199 \times 10^{10}$ |

**Tabel 5** Hasil $Ab(t)$ Eksak dan $Ab\ (t)$ *Runge Kutta* orde 45

| t | $Ab\ (t)$ **Eksak** | $Ab\ (t)$ ***Runge Kutta* orde 45** | **Error= A(t) eksak-A(t) RK** |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 25.35521492 | 25.3552149848653 | $-6.48653 \times 10^8$ |
| 0.2 | | | |
| 0.3 | 41.45768033 | 41.4576805164505 | $-1.8645 \times 10^7$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.4 | 39.47152168 | 39.4715218552195 | $-1.75219 \times 10^7$ |
| 0.5 | | | |
| 0.6 | 34.44636940 | 34.4463695468793 | $-1.46879 \times 10^7$ |
| 0.7 | 32.11807559 | 32.1180757211945 | $-1.31195 \times 10^7$ |
| 0.8 | 29.94616013 | 29.9461602427020 | $-1.12702 \times 10^7$ |
| 0.9 | 27.92131126 | 27.9213113626855 | $-1.02686 \times 10^7$ |
| 1 | 26.03352836 | 26.0335284593989 | $-9.93989 \times 10^8$ |

Solusi eksak yang diperoleh sudah sesuai sebagai solusi sistem (**1**) dan memiliki nilai error perhitungan untuk setiap variabelnya sangat kecil. Urutan error solusi eksak dan *Runge Kutta* orde 45 dari terbesar hingga terkecil yakni $\text{error absolut}_L > \text{error absolut}_A > \text{error absolut}_{Ab} > \text{error absolut}_M > \text{error absolut}_S$, tetapi untuk solusi $Ab(t)$ karena memuat integral lipat tiga, nilai solusi sulit dihitung di $t = 0.2$ dan $t = 0.5$.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diperoleh, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Solusi eksak model matematika respons imun terhadap vaksin ebola adalah

$$A(t) = A_0 e^{-\delta_A t}$$

$$M(t) = \left(\rho\, A_0 \int e^{-\delta_A t + \int f(t)dt}\right).\ e^{-\int f(t)dt} dt$$

$$S(t) = \mu_S A_0 (\int e^{-\delta_A t(M(t))})\, e^{-\delta_S}\, dt$$

$$L(t) = \mu_L A_0 (\int e^{-\delta_A t(M(t))})\, e^{-\delta_L} dt$$

$$Ab(t) = \left(\theta_S(S(t)).\,\theta_L(L(t)). \int e^{\int j(t)dt} dt\right).\, e^{-\delta_{Ab}}$$

2. Perbandingan hasil solusi eksak dengan metode Runge Kutta orde 45 menghasilkan nilai galat yang relatif kecil. Nilai galat tersebut membuktikan bahwa nilai eksak model vaksinasi terhadap virus ebola menunjukkan bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan terhadap solusi numerik dengan menggunakan metode *Rungge Kutta* orde 45, error numerik yang dihasilkan paling besar adalah $2.29640283510782 \times 10^9$

## DAFTAR PUSTAKA


[1] World Health Organisation, World Health Organisation, 2018. Ebola virus disease,FactSheet. https://www.who.int/news-room/fact_sheets/detail/ebola-virus-disease, Last accessed on 2019-05-04.

[2] World Health Organisation, (2014a).Casedefinition recommendations for ebola or Marbug virus diseases.GAR Accessed on 4 May 2020

[3] World Health Organisation, 2019b. Ebola virus disease, Democratic Republic of the Congo, GAR Accesses on 4 May 2020.

[4] World Health Organisation, (2014b).Casedefinition recommendations for ebola or Marbug virus diseases.GAR Accessed on 4 May 2020

[5] Balelli, I., Pasin, C., Prague, M., Crauste, F., Effelterre, T. V., Bockstal, V., et al. (2020). A Model for estabilisment,maintenance and reactivation of the immune response after vaccination againts Ebola virus. *Jurnal of Theoretical Biology*.

[6] Aqsa Nazir, Naveed Ahmed, Umar Khan, Syed Tauseef Mohyud-Din, Kottakkaran Sooppy Nisar, Ilyas Khan.(2020). An advanced version of aconformable mathematical model of Ebola virus disease in Africa. Jurnal of Alexandria Engineering Journal,59,3261-3268.

[7] World Health Organisation, 2019a. Ebola virus disease, Democratic Republic of the Congo, GAR Accesses on 4 May 2020.
Semarang:Universitas Diponegoro.

[8] Sugiyono.(2018).MetodePenelitianKuantitatif,kualitatifdanR&D.Bandung:Alfabet.