Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(4) (2024), Pages 166-171
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Veerebradiah Lokesha Reciprocal Status Index dari Komplemen Graf Total Diperumum Ring Bilangan Bulat Modulo

Tata Sutrafia Armeyntan*, Turmudi, Mohammad Nafie Jauhari

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

tatasutrafiaa@gmail.com*, turmudi_msi@mat.uin-malang.ac.id, nafie.jauhari@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Misalkan R adalah ring komutatif dan H adalah himpunan bagian dari R. Komplemen graf total diperumum adalah graf sederhana dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika x dan y bukan merupakan elemen dari H. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bentuk umum indeks VLRS pada komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p lebih besar atau sama dengan 3 merupakan bilangan prima untuk H himpunan pembagi nol dan H himpunan unit dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Langkah dalam penelitian ini yaitu menentukan himpunan pembagi nol dan himpunan unit dari ring bilangan bulat modulo $2p$, menentukan jarak setiap titik di komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$, menentukan *reciprocal status* di komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$, dan menentukan indeks VLRS di komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$. Hasil penelitian ini terkait dengan bentuk umum indeks VLRS pada komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$ di mana p merupakan bilangan prima dan p lebih besar atau sama dengan 3 dengan H himpunan pembagi nol dan H himpunan unit dari ring bilangan bulat modulo $2p$.

Kata kunci: *Veerebradiah Lokesha Reciprocal Status Index*; Komplemen Graf Total Diperumum; Ring Bilangan Bulat Modulo

Abstract

Suppose R is a commutative ring and H is a subset of R. The complement of the generalized total graph is a simple graph with all the elements in R as points and two different points x and y are directly connected if and only if x and y are not elements of H. This study aims to determine the general form of the VLRS index in the generalized total graph complement of the integer ring modulo $2p$ where p greater than or equal to 3 is the prime number for H the set of zero divisors and H the set of units of the ring integer modulo $2p$. The steps in this study are to determine the set of zero divisors and the set of units of the integer ring modulo $2p$, determine the distance of each point in the complement of the generalized total graph of the ring of integers modulo $2p$, determine the reciprocal state in the complement of the generalized total graph of the ring integer modulo $2p$, and determine the VLRS index in the complement of the generalized total graph from the integer ring modulo $2p$. The results of this study are related to the general form of the VLRS index on the complement of the generalized total graph of the $2p$ modulo integer ring where p is a prime number and p is greater than or equal to 3 with H the set of zero divisors and H the set of units of the $2p$ modulo integer ring.

Keywords: Veerebradiah Lokesha Reciprocal Status Index; Complement of the Generalized Total Graph; Ring Integers Modulo

PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan cabang dari ilmu matematika yang dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang seperti biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik, informatika, linguistik,

Submitted: 27 Januari 2023 Reviewed: 11 Juni 2023 Accepted: 18 Maret 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i4.26657

matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial [1]. Ilmu teori graf diperkenalkan pada tahun 1736 [2]. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$. Graf G secara terurut dapat dinotasikan V sebagai $V(G)$ dan E sebagai $E(G)$. $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari suatu objek yang dinamakan titik, sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan (mungkin kosong) dari pasangan titik berbeda di V yang dinamakan sisi [3].

Suatu ring R merupakan himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $(+)$ dan operasi perkalian yang dinotasikan dengan $(\cdot)$ yang memenuhi sifat komutatif, asosiatif, dan distributif [4]. Jika operasi perkalian pada ring R bersifat komutatif dan mempunyai unsur kesatuan maka ring tersebut disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan [5]. Misalkan R adalah ring komutatif dan H adalah himpunan bagian dari R. Graf total diperumum dari R dinotasikan $GT_H(R)$ dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \in H$ [6]. Komplemen graf total diperumum yang dinotasikan $\overline{GT_H(R)}$ adalah graf sederhana dengan semua elemen di R sebagai titik dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $x + y \notin H$ [7].

Misalkan m adalah bilangan bulat positif di mana $m > 1$. Himpunan bilangan bulat modulo m dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_m$ adalah himpunan kelas-kelas ekivalen dari kongruensi modulo m atau $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ [8].

Teori graf memiliki keterkaitan dengan indeks topologi dalam bidang kimia. Indeks topologi adalah nilai numerik yang terkait dengan hukum kimia yang menunjukkan hubungan antara struktur kimia dan berbagai macam kualitas fisik yang dapat mengukur reaktivitas kimia dan aktivitas biologi [9]. Pada tahun 2021, Veerebradiah Lokesha dkk., memperkenalkan indeks topologi yang digunakan dalam pemodelan pada bidang fisika, molekul pada bidang kimia, dan farmasi. Indeks tersebut disebut sebagai *Veerebradiah Lokesha Reciprocal Status index* dan pada artikel dikenal dengan *VL Reciprocal Status index* sehingga biasa dikenal sebagai indeks VLRS. Indeks VLRS didefinisikan sebagai $VLRS(G) = \frac{1}{2}\sum_{u_1u_2 \in E(G)}[rs(u_1) + rs(u_2) + rs(u_1) \cdot rs(u_2)]$ di mana $rs(u_1) = \sum_{u_2 \in V(G)} \frac{1}{d(u_1,u_2)}$ [10]. *Reciprocal status* dari titik u pada graf G dinotasikan dengan $rs(u)$. *Reciprocal status* didefinisikan dengan penjumlahan *reciprocal* jarak di antara u ke semua titik di graf G. *Reciprocal Status* dari $u_1 \in V(G)$ ditentukan oleh jumlah *reciprocal* jarak u_1 ke titik di G [11].

Penelitian terkait indeks VLRS masih sedikit mengingat indeks tersebut baru dikenalkan oleh Veerebradiah Lokesha, dkk., pada tahun 2021 yang membahas indeks dan koindeks VLRS pada graf dengan hasil dari penelitian tersebut adalah rumus umum untuk menghitung indeks dan koindeks VLRS pada graf dan juga diketahui korelasi antara indeks VLRS dan sifat-sifat dari turunan Butana melalui tabel dan diilustrasikan dengan gambar. Terdapat artikel lain oleh Deepika T. pada tahun 2021 yang membahas indeks VL dan batas *tensor product* pada graf *F-Sum* dengan hasil dari penelitian tersebut adalah rumus umum yang dapat digunakan untuk menghitung indeks VL dan batas *tensor product* pada graf *F-Sum* [12].

Berdasarkan penelitian terdahulu, penelitian terkait indeks VLRS dapat diperluas dan digabungkan dengan graf sederhana. Dengan demikian, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya peneliti melakukan penelitian terkait indeks VLRS pada komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Komplemen graf total diperumum dari ring bilangan bulat modulo $2p$ dinotasikan sebagai $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$. Pada penelitian ini peneliti mengambil lebih dari satu himpunan bagian dari R yaitu himpunan pembagi nol dan himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$ supaya penelitian ini lebih kompleks.

Suatu elemen x dari ring R disebut pembagi nol apabila memenuhi $x \cdot y = 0$ atau $y \cdot x = 0$ untuk suatu $y \neq 0, y \in R$. Himpunan pembagi nol dari ring R dinotasikan dengan $Z(R)$ [13]. Suatu elemen x dari ring R disebut unit apabila memenuhi $x \cdot y = 1$ atau $y \cdot x = 1$ untuk suatu $y \in R$. Himpunan unit dari ring R dinotasikan dengan $U(R)$ [14].

Berdasarkan beberapa uraian dan pengintegrasian yang telah dijelaskan, maka peneliti termotivasi untuk melakukan penelitian dengan mengangkat judul "*Veerebradiah Lokesha Reciprocal Status Index* pada Komplemen Graf Total Diperumum Ring Bilangan Bulat Modulo".

Berikut beberapa definisi dan teorema yang menunjang penelitian ini:

Definisi 1. [15] Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$, dengan $x \neq 0$, maka x disebut membagi y ditulis sebagai $x|y$ apabila $y = xz$, untuk suatu $z \in \mathbb{Z}$.
Definisi 2. [15] Bilangan bulat positif x adalah pembagi persekutuan dari y dan z yang tidak nol jika $x|y$ dan $x|z$. Selanjutnya bilangan bulat x adalah pembagi persekutuan terbesar atau *greatest common divisor* atau GCD dari bilangan bulat tidak nol y dan z jika x adalah bilangan bulat positif terbesar sehingga $x|y$ dan $x|z$.
Bilangan bulat x disebut pembagi persekuan terbesar dari y dan z, jika berlaku:
1. $x > 0$
2. $x|y$ dan $x|z$
3. Misalkan p bilangan bulat, jika $p|y$ dan $p|z$ maka $p|x$

Pembagi persekutuan terbesar dari y dan z dituliskan $x = (y, z)$ dan karena $x > 0$ maka $x = (y, z) \geq 1$.
Definisi 3. [16] Misalkan n merupakan bilangan bulat positif, $n > 1$ dan $x, y \in \mathbb{Z}$. x disebut kongruen dengan y modulo n jika dan hanya jika $x - y$ adalah kelipatan dari n. Dapat dituliskan $x \equiv y(mod\ n)$.
Teorema 1. [15] Kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ m)$ dapat diselesaikan hanya jika $d = (a, m)$ membagi b, dan pada kasus ini memiliki d selesaian. Jika a dan m relative prima atau $d = 1$ maka kongruensi memiliki satu selesaian.

METODE

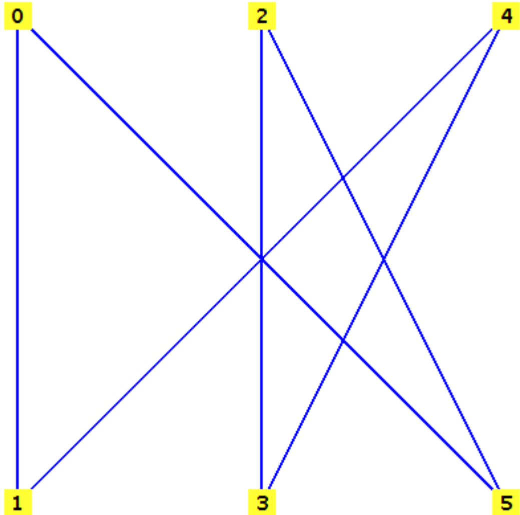
Metode yang digunakan pada penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif yang merujuk pada metode penelitian kepustakaan atau studi literatur. Adapun tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:
1. Menentukan indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dengan $p \in \{3,5,7,11\}$ untuk memunculkan dugaan.
2. Menentukan himpunan $H \subseteq \mathbb{Z}_{2p}$ dari $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ untuk H himpunan pembagi nol dan H himpunan unit dengan H tertutup terhadap operasi perkalian di $\mathbb{Z}_{2p}$.
3. Menentukan jarak setiap titik pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.
4. Menentukan *reciprocal status* dari jarak setiap titik pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.
5. Menentukan indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dengan H Himpunan Pembagi Nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$

Ring bilangan bulat modulo 6 atau dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_6$ memiliki elemen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{5}$. Misalkan H merupakan himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_6$, maka diperoleh $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ adalah graf yang himpunan titiknya terdiri dari semua anggota $\mathbb{Z}_6$ dan dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dikatakan terhubung langsung di $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ jika dan hanya jika $x + y \notin H$.

Sehingga diperoleh gambar $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$.



Gambar 1 Graf $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ dengan H Pembagi Nol

Pasangan titik terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ sebanyak 6 dan pasangan titik tidak terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ sebanyak 9. Jadi, diperoleh nilai indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ adalah $\frac{160}{3}$.

Kemudian menggunakan langkah-langkah yang sama dilakukan untuk mencari indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dari $\mathbb{Z}_{2p}$ di mana $p = 5{,}7$, dan 11. Sehingga diperoleh data yang berkaitan dengan $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dan indeks $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dengan $p \in \{3{,}5{,}7{,}11\}$.

Sehingga diperoleh dugaan yang mendukung pembuktian rumus indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.

1. $Z(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah semua elemen genap dari $\mathbb{Z}_{2p}$ dan p untuk suatu bilangan prima p.
2. $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ adalah graf bipartit.
3. $rs(u) = \frac{3}{2}p - \frac{7}{6}, \forall u \in V\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right)$ untuk suatu bilangan prima p.
4. Ada sebanyak $p^2 - p$ sisi di $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.

Lemma 1

Misalkan p merupakan bilangan prima dan $p \geq 3$. Himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah

$$Z(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\overline{2m} | m = 0,1,2,\dots,p-1\} \cup \{\bar{p}\}.$$

Lemma 2

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$, maka $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ merupakan graf bipartit.

Lemma 3

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$. *Reciprocal status* dari $u \in V\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right)$ adalah

$$rs(u) = \frac{3}{2}p - \frac{7}{6}.$$

Lemma 4

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$. Pasangan titik yang terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ ada sebanyak $p^2 - p$.

Teorema 1

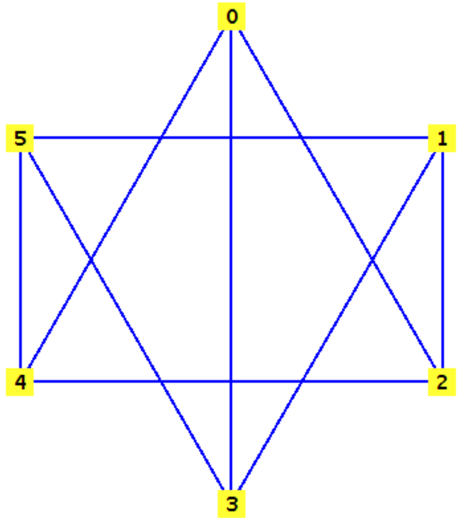
Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H adalah himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$. Indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ adalah

$$VLRS\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right) = \frac{9}{8}p^4 - \frac{11}{8}p^3 - \frac{17}{72}p^2 + \frac{35}{72}p.$$

2. Indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dengan H Himpunan Unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$

Ring bilangan bulat modulo 6 atau dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_6$ memiliki elemen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{5}$. Misalkan H merupakan himpunan unit dari $\mathbb{Z}_6$, maka diperoleh $H = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ adalah graf yang himpunan titiknya terdiri dari semua anggota $\mathbb{Z}_6$ dan dua titik berbeda $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dikatakan terhubung langsung di $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ jika dan hanya jika $x + y \notin H$.

Sehingga diperoleh gambar $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$.



Gambar 2 Graf $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ dengan H Unit

Pasangan titik terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ sebanyak 9 dan pasangan titik tidak terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ sebanyak 6. Jadi, diperoleh nilai indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_6)}$ adalah 108.

Kemudian menggunakan langkah-langkah yang sama dilakukan untuk mencari indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dari $\mathbb{Z}_{2p}$ di mana $p = 5,7$, dan 11. Sehingga diperoleh data yang berkaitan dengan $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dan indeks $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ dengan $p \in \{3,5,7,11\}$.

Sehingga diperoleh dugaan yang mendukung pembuktian rumus indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.

1. $U(\mathbb{Z}_{2p})$ adalah semua elemen ganjil dari $\mathbb{Z}_{2p}$ kecuali p untuk suatu bilangan prima p.
2. $rs(u) = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}, \forall u \in V\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right)$ untuk suatu bilangan prima p.
3. Ada sebanyak p^2 sisi di $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$.

Lemma 5

Misalkan p merupakan bilangan prima dan $p \geq 3$. Himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah

$$U(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{n} | n \notin \{\overline{2m} | m = 0,1,2,\dots,p-1\} \cup \{\bar{p}\}\}.$$

Lemma 6

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$. *Reciprocal status* dari $u \in V\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right)$ adalah

$$rs(u) = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}.$$

Proposisi 6

Himpunan unit merupakan komplemen dari pembagi nol dalam $\mathbb{Z}_{2p}$.

Lemma 7

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$. Pasangan titik yang terhubung langsung pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ ada sebanyak p^2.

Teorema 2

Misalkan $p \geq 3$ merupakan bilangan prima dan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$. Indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ adalah

$$VLRS\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right) = \frac{9}{8}p^4 + \frac{3}{4}p^3 - \frac{3}{8}p^2.$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan maka bentuk umum indeks VLRS pada $\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}$ di mana p bilangan prima dan $p \geq 3$ dengan H himpunan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah $VLRS\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right) = \frac{9}{8}p^4 - \frac{11}{8}p^3 - \frac{17}{72}p^2 + \frac{35}{72}p$ dan H himpunan unit dari $\mathbb{Z}_{2p}$ adalah $VLRS\left(\overline{GT_H(\mathbb{Z}_{2p})}\right) = \frac{9}{8}p^4 + \frac{3}{4}p^3 - \frac{3}{8}p^2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, Azizah. N. N. and F. F. & Nofandika, Teori Graf, UIN-Malang Press, 2009.

[2] Munir. R., Matematika Diskrit (Keenam), Informatika Bandung, 2016.

[3] Chartrand. G. Lesniak. L. and & Zhang. P., Graphs & Digraph (Fifth), Chapman & Hall/CRC, 2011.

[4] Gallian. J. A., Contemporary Abstract Algebra, 2013.

[5] Wahyuni. S., Wijayanti. I. E., Yuwaningsih. D. A. and Hartanto. A. D., Teori Ring dan Modul (Edisi Pertama), Gadjah Mada University Press, 2016.

[6] Anderson. D. F. and &. B. A., "The Generalized Total Graph of a Commutative Ring," *Journal of Algebra and Its Applications,* pp. 1-15, 2013.

[7] Chelvam. T. T. and & Balamurugan. M., Complement of the Generalized Total Graph of Commutative Rings, 2019.

[8] V. Menezes. A., Oorschot. P. and & Vanstone. S., Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, 1996.

[9] Mahboob. A., Mahboob. S., Jaradat. M. M. M., Nigar. and & Siddique. I., "On Some Properties of Multiplicative Topological Indices in Silicon-Carbon," 2021.

[10] Lokesha. V., Suvarna, Cevik. A. S. and & Cangul. I. N., VL Reciprocal Status Index and Co-index of Connected Graph, 2021.

[11] Ramane. H. S., Talwar. S. Y. and & Sharafdini. R., "Reciprocal Status Connectivity Indices and Co-indices of Graphs," 2019.

[12] Deepika. T., VL Index and Bounds for the Tensor Products of F-Sum Graph, 2021.

[13] Joshi. K. D., Foundations of Discrete Mathematics, 1989.

[14] Abdussakir, Graphs Associated With A Commutative Ring, 2019.

[15] Irawan. W. H., Hijriyah. N. and & Habibi. A. R., Pengantar Teori Bilangan, UIN-Maliki Press, 2014.

[16] Gilbert. L. and & Gilbert. J., Element of Modern Algebra, 2015.