Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(4) (2024), Pages 200-205
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Struktur dan Sifat-sifat K-Aljabar

Rafi Ainur Isa*, Evawati Alisah.

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

rafijerr44@gmail.com*, evawatialisah@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

K-Aljabar dibangun atas suatu grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap $x, y \in G$ yang didefinisikan sebagai $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ dengan aksioma-aksioma tertentu pada K-Aljabar. K-Grup penjumlahan didefinisikan sebagai elemen-elemen dari K yang beroperasi penjumlajahan, mirip dengan penjumlahan dalam K itu sendiri. Sementara itu, K-Ring memiliki dua operasi dasar, yaitu penjumlahan dan perkalian, yang keduanya harus memenuhi sifat-sifat tertentu dan menggunakan K-Field sebagai bidang skalar. Terakhir, K-Field dijelaskan sebagai struktur K-Aljabar khusus di mana operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan, memastiakan bahwa untuk setiap elemen $a, b, c \in R$ memenuhi sifat distributif, yaitu $a \times (b + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \times b) + (a + c)$. $(a + b) \times c = (\mathrm{a} \times c) + (b + c)$. Penelitian ini berkontribusi pada pemahaman yang lebih mendalam mengenai struktur dan operasi dalam K-Aljabar. Penelitian berikutnya adalah K-Aljabar dapat diaplikasikan dalam himpunan berarti bisa diaplikasikan pada himpunan bilangan, dihedral, dan modulo atau kongruensi, yang dilengkapi dengan teorema, bukti, dan contohnya.

Kata kunci: Operasi Biner; Grup; K-Aljabar

Abstract

K-Algebra is constructed on a group using binary operations $\odot$ on $(G,*)$, so for each $x, y \in G$ defined as $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ with certain axioms on K-Algebra. K-Group summation is defined as the elements of K that operate summation in K, similar to addition in K itself. Meanwhile, the K-Ring has two basic operations, namely addition and multiplication, both of which must satisfy certain properties and use the K-Field as a scalar field. Finally, the K-Field is described as a special K-Algebra structure in which the multiplication operation is distributive to the addition operation. This research contributes to a deeper understanding of structures and operations in K-Algebra. The next research is that K-Algebra can be applied in sets meaning that it can be applied to sets of numbers, dihedral, and modulo or congruence, which are equipped with theorems, proofs, and examples.

Keywords: Binary Operations; Groups; K-Algebra

PENDAHULUAN

Aljabar Abstrak merupakan bidang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, *field*, dan ruang vektor [1]. Istilah “Aljabar Abstrak” diperkenalkan sejak permulaan abad kedua puluh untuk membedakan dari bidang yang umumnya disebut sebagai aljabar [2]. Aljabar merupakan studi aturan manipulasi rumus dan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel dan bilangan riil atau kompleks, yang ini lebih dikenal sebagai aljabar elementer [3].

Grup merupakan salah satu bidang kajian Aljabar Abstrak yang berfokus pada eksplorasi struktur himpunan [4]. Konsep grup mengacu pada himpunan tak kosong, dilengkapi dengan menggunakan satu operasi biner khusus. Sebuah himpunan dapat dikatakan grup jika memenuhi beberapa sifat dasar, yaitu tertutup, sifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap anggota himpunan memiliki invers [5]. Grup juga mempunyai aplikasi luas dalam matematika sendiri dan

Submitted: 13 Maret 2023 Reviewed: 12 Oktober 2023 Accepted: 18 Maret 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i4.27187

keilmuan alam. Pada bidang kimia grup digunakan untuk mengklasifikasikan unsur kimia. Unsur-unsur dalam satu grup sering memiliki sifat-sifat serupa, seperti sifat reaktivitas [6]. Salah satu aspek menarik dari K-Aljabar adalah kemiripannya dengan konsep grup. Oleh karena itu, penulis merasa tertarik untuk mendalaminya dan melakukan penelitian kembali struktur serta karakteristik yang terkait dengan K-Aljabar melalui pengembangan lebih lanjut.

Konsep grup pada aljabar yang ditambahkan dengan operasi biner, yang kemudian menciptakan sebuah konsep inovatif yang disebut K-Aljabar [7]. K-Aljabar mencakup definisi, karakteristik, dan beberapa teorema. Ini adalah Struktur Aljabar yang terbentuk dari suatu grup G, dengan e adalah elemen identitas pada G untuk setiap $x, y \in G$ [8]. Sementara itu, operasi biner yang dipakai adalah operasi biner $\odot$, yang didefinisikan sebagai $x \odot y = x * y^{-1} = xy^{-1}$ untuk setiap $x, y \in G$ serta mematuhi aksioma-aksioma tertentu [9].

K-Aljabar adalah cabang dari aljabar abstrak yang mempelajari struktur aljabar dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti asosiatif, komutatif, dan distributif. [10] Aljabar adalah cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, dan *field*. Aljabar adalah bidang yang melibatkan manipulasi simbol-simbol matematika untuk memahami dan menyelesaikan masalah dalam konteks struktur aljabar tersebut. [11] Terdapat berbagai jenis aljabar, seperti aljabar linier, aljabar abstrak, aljabar Boolean, dan banyak lagi, yang masing-masing memiliki aturan dan properti khusus [12]. K-Aljabar biasanya digunakan untuk memahami struktur matematika yang melibatkan himpunan dengan operasi biner, seperti grup, ring, dan field [13].

METODE

Jenis Penelitian

Penelitian ini dilakukan menggunakan studi literatur. Studi literatur merupakan ikhtisar komprehensif tentang penelitian yang sudah dilakukan mengenai topik yang spesifik untuk menunjukkan kepada pembaca apa yang sudah diketahui tentang topik tersebut dan apa yang belum diketahui, untuk mencari rasional dari penelitian yang sudah dilakukan atau untuk ide penelitian selanjutnya [14]. Pola pembahasannya dimulai dari kasus atau contoh hingga pembahasan yang umum. Jenis penelitian ini dapat dikatakan sebagai penelitian kepustakaan. Penelitian ini dilakukan melalui pencarian dan mempelajari buku, artikel, jurnal, dan catatan-catatan tentang struktur dan sifat-sifat K-Aljabar juga beberapa penelitian terdahulu yang relevan dengan isu utama yang sedang diselidiki.

Langkah-Langkah Penelitian

Berdasarkan definisi K-Aljabar pada literatur Gratzer serta teorema-teorema yang telah dibuktikan pada Bab II, maka penulis mengembangkan menjadi sifat-sifat dari operasi K-Aljabar dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menganalisis keterkaitan antara definisi dan teorema pada K-Aljabar.
2. Menerjemahkan ke operasi dasar K-Aljabar dengan minimal satu operasi biner serta digeneralisir dengan himpunan lainnya [15].
3. Mencari persamaan dan perbedaan antara satu operasi biner dengan gabungan beberapa operasi biner.
4. Menerapkan sifat-sifat dasar Aljabar pada K-Aljabar melalui teorema dan buktinya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Struktur Aljabar mengacu pada himpunan elemen yang tidak kosong, yang diberikan operasi biner setidaknya satu, dan memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku. Salah satu contoh dari Struktur Aljabar ini adalah K-Aljabar. K-Aljabar ini terbentuk dari grup $(G,*)$ menggunakan penerapan operasi biner $\odot$. Dalam hal ini, $\forall\, p, q \in G$ dideskripsikan $p \odot q = p * q^{-1}$ dan e merupakan elemen identitas himpunan G.

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan pada G didefinisikan operasi $\odot$ sedemikian sehingga $\forall\, p,q \in G, p \odot q = p * q^{-1}$ maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $< G,*,\odot,e >$. Suatu $< G,*,\odot,e >$ dinamakan K-Aljabar, jika G adalah grup dengan orde lebih dari 2 dan $\forall p,q,r \in G$ berlaku:

1. $(p \odot q) \odot (p \odot r) = \big(p \odot ((e \odot r) \odot (e \odot q))\big) \odot p$
2. $p \odot (p \odot q) = (p \odot (e \odot q)) \odot p$
3. $p \odot p = e$
4. $p \odot e = p$
5. $e \odot p = p^{-1}$

Dengan operasi $\odot$ yang didefinisikan tersebut, dapat disimpulkan bahwa G bersifat tertutup terhadap operasi $\odot$.

K-Grup

Dalam konteks K-Aljabar atau aljabar komutatif, grup biasanya merujuk pada grup penjumlahan. Sebuah grup penjumlahan pada K-Aljabar adalah himpunan bersama dengan operasi penjumlahan dan memenuhi sifat-sifat grup penjumlahan. Sifat-sifat ini sering digunakan dalam K-Aljabar untuk membentuk struktur aljabar yang lebih kompleks.

Sebuah grup pada K-Aljabar adalah himpunan G bersama dengan operasi biner $(*)$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Tertutup, hasil operasi biner $(*)$ pada dua elemen K-Aljabar (a dan b) selalu merupakan elemen K-Aljabar.
2. Asosiatif, operasi biner $(*)$ bersifat asosiatif, sehingga urutan operasi tidak mempengaruhi hasil. $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Mempunyai elemen identitas (e) di K-Aljabar, sehingga perkalian dengan elemen identitas menghasilkan elemen itu sendiri.
4. Mempunyai eleman invers, setiap elemen a di K-Aljabar memiliki elemen invers a^{-1}, sehingga perkalian dengan elemen invers menghasilkan elemen identitas. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

K-Ring

Dalam matematika abstrak, istilah "K-Ring" dan "K-Aljabar" sering kali merujuk pada struktur aljabar tertentu yang melibatkan konsep K-field.

1. Sebuah K-Ring adalah himpunan R dengan dua operasi, biasanya disebut penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi sifat-sifat berikut:
   a. R membentuk grup penjumlahan yang melengkapi dengan elemen identitas 0.
   b. R bersifat asosiatif dengan operasi perkalian $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a,b,c \in R$.
   c. Hukum distribusi penjumlahan terhadap perkalian: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \;\; dan \;\; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ untuk setiap $a,b,c \in R$.

   Dalam konteks ini, K adalah field yang sering dianggap sebagai field skalar. Ring ini membawa dua operasi (penjumlahan dan perkalian), dan perkaliannya mematuhi sifat komutatif.
2. Sebuah K-Aljabar aljabar komutatif adalah struktur aljabar yang terkait dengan K-ring dan berfungsi sebagai generalisasi dari konsep ring. Sebuah K-Aljabar adalah K-Ring yang juga merupakan ruang vektor atas K sehingga perkalian dengan skalar dari K bersifat terdistribusi terhadap penjumlahan dan perkalian aljabar. Ring biasanya lebih umum, sementara aljabar komutatif memasukkan elemen-elemen dari ring ke dalam struktur ruang vektor dan memperluas operasi-operasi tersebut dengan pengenalan perkalian dengan skalar dari K-field.

Jadi, K-Ring adalah struktur aljabar dengan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi sifat-sifat tertentu dan melibatkan K-field sebagai field skalar. K-Aljabar adalah generalisasi dari konsep ring yang juga merupakan ruang vektor atas K, menggabungkan operasi aljabar dan operasi skalar.

Field

Field adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, di mana himpunan terhadap penjumlahan, struktur tersebut merupakan abelian, himpunan tanpa nol dengan operasi perkalian merupakan grup abelian, dan operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan. Suatu field $(R,+,\times)$ adalah suatu himpunan takkosong R dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ pada R yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Himpunan R terhadap penjumlahan $(+)$
   a. Tertutup: untuk setiap $a, b \in R$, maka $a + b \in R$.
   b. Asosiatif: untuk setiap $a, b, c \in R$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   c. Mempunyai unsur kesatuan: adanya elemen identitas a sehingga $b + a = a + b = b$, $\forall\, b \in R$
   d. Mempunyai invers: untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ sedemikian hingga $a + b = b + a = a$.
   e. Komutatif: untuk setiap $a, b \in R$, maka $a + b = b + a$.
2. Himpunan R tanpa nol terhadap perkalian $(\times)$
   f. Tertutup: untuk setiap $a, b \in R$, maka $a \times b \in R$.
   g. Asosiatif: untuk setiap $a, b, c \in R$, maka $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
   h. Mempunyai unsur kesatuan: adanya elemen identitas β sehingga $a \times \beta = \beta \times a = a, \forall\, a \in R$
   i. Mempunyai invers: untuk setiap $a \in R - \{0\}$ terdapat $b \in R$ sehingga $a \times b = b \times a = \beta$.
   j. Komutatif: untuk setiap $a, b \in R$, maka $a \times b = b \times a$.
3. Distributif perkalian $(\times)$ terdapat penjumlahan $(+)$ untuk setiap $a, b, c \in R$, jika memenuhi:
   a. Ditribusi kiri: untuk setiap $a, b, c \in R$ memenuhi $a \times (b + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \times b) + (a \times c)$.
   b. Ditributif kanan: untuk setiap $a, b, c \in R$ memenuhi $(a + b) \times c = (\mathrm{a} \times c) + (b \times c)$.
   Bersifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

K-Field

K-Field adalah hubungan field dengan K-Aljabar terletak pada cara memperluas dan memahami struktur aljabar yang lebih kompleks dibandingkan dengan field biasa. Berikut adalah aksioma-aksioma yang mendasari K-Field:

1. Aksioma field:

a. Field terhadap operasi penjumlahan $(+)$
- Bersifat Komutatif: $a + b = b + a$ untuk semua $a, b \in K$
- Bersifat asosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk semua $a, b, c \in K$
- Mempunyai elemen indentitas: terdapat elemen $0 \in K$ sehingga $a + 0 = a$ untuk semua $a \in K$
- Mempunyai invers: $\forall a \in K$, terdapat elemen $-a\ \in K$ sehingga $a + (-a) = 0$

b. Field terhadap operasi perkalian $(\times)$
- Bersifat komutatif: $a \times b = b \times a$ untuk semua $a, b \in K$
- Bersifat asosiatif: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk semua $a, b, c \in K$
- Mempunyai elemen indentitas: terdapat elemen $1 \in K$ sehingga $a \times 1 = a$ untuk semua $a \in K$
- Mempunyai invers: $\forall a \in K, a \neq 0$ terdapat elemen $a^{-1}\ \in K$ sehingga $a \times (-a) = 1$.

   a. Distributif perkalian terhadap penjumlahan: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ untuk semua $a, b, c \in K$.

2. Aksioma K-Aljabar

Kompatibilitas:

a. Perkalian skalar: $\forall a \in K$ dan $k \in F$, berlaku $k \times (a \times b) = (k \times a) \times b = a \times (k \times b)$.

b. Distributif perkalian vektor: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Sifat-sifat K-Aljabar

K-Aljabar memiliki banyak sifat yang memungkinkan untuk memahami struktur dan operasi yang terilibat dalam objek matematika. Berikut beberapa sifat umum dalam K-Aljabar:

1. Asosiatif: sifat asosiatif dalam konteks K-Aljabar memungkinkan untuk mengubah urutan perkalian tanpa mengubah hasil akhir. Misalkan $a, b, c \in K$, dengan sifat asosiatif dapat mengekpresikan perkalian ketiga unsur tersebut dalam bentuk manapun, dan hasilnya akan tetap sama. Dalam notasi ini dapat ditulis sebagai:
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
Ini berarti dapat mengelompokkan a dan b terlebih dahulu, atau b dan c terlebih dahulu, atau a dan c terlebih dahulu, dan hasil perkaliannya akan sama.
2. Komutatif: operasi dalam K-Aljabar bersifat komutatif jika operasi tidak mempengaruhi hasil akhirnya. Misalkan, untuk setiap $a, b, \in K$, jika $a \cdot b = b \cdot a$, maka operasi $\cdot$ adalah komutatif.
3. Distributif: operasi dalam K-Aljabar bersifat distributif terhadap operasi lainnya. Misalkan untuk setiap $a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

KESIMPULAN

Struktur K-Aljabar

a. K-Grup penjumlahan K-Aljabar dalam konteks ruang vektor atau modul atas K yang elemen-elemen grup penjumlahan adalah elemen dari K, dan operasi penjumlahan dapat dianggap sebagai penjumlahan biasa dalam K.
b. K-Ring adalah struktur aljabar dengan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) yang memenuhi sifat-sifat tertentu dan melibatkan K-field sebagai filed skalar.
c. K-Field adalah merupakan salah satu struktur K-Aljabar dengan operasi perkalian bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan.

Sifat- sifat K-Aljabar

a. Asosiatif: Sifat asosiatif dalam konteks K-Aljabar memungkinkan untuk mengubah urutan perkalian tanpa mengubah hasil akhir. Misalkan $a, b, c \in K$, dengan sifat asosiatif dapat mengekpresikan perkalian ketiga unsur tersebut dalam bentuk manapun, dan hasilnya akan tetap sama, dapat ditulis $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
b. Komutatif: sifat ini menyatakan jika urutan operand tidak mempengaruhi hasilnya. Misalkan, untuk setiap $a, b, \in K$, jika $a \cdot b = b \cdot a$,
c. Distributif: Misalkan untuk setiap $a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Fraleigh, J. A FIRST COURSE IN ABSTRACK ALGEBRA. Canada: Addison Wesley Publishing Company. (1969).

[2] Anton, H. Dasar-dasar Aljabar Linier. Batam: Interaksara. (2000)

[3] Bass, H. Teori K Aljabar , Seri Catatan Kuliah Matematika, New York-Amsterdam: WA Benjamin, Inc., Zbl 0174.30302. (1968)

[4] Andari, A. Teori Grup. Universitas Brawijaya Press. (2015).

[5] Arifin, F. K-Aljabar Pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. (2012).

[6] Im Manik, N., & Tasman, D. Piranti Lunak Pengujian Struktur Matematika Grup, Ring, Field Berbasis Osp (Open Source Program). ComTech: Computer, Mathematics and Engineering Applications, 5(1), 373-386. (2014).

[7] Setiawan, A. Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring). Salatiga: UKSW. (2011).

[8] Kamil, I.M. Kajian Terhadap K-Aljabar. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. (2016).

[9] Dar, K., & Akram, M. On a K-Algebra Built on a Group. Southeast Asean Bulletin of Mathematics, 29, 41-49. (2005).

[10] Bass, H. Teori K Aljabar , Seri Catatan Kuliah Matematika, New York-Amsterdam: WA Benjamin, Inc., Zbl 0174.30302. (1968)

[11] Gilbert, L., & Gilbert, J. Elements of Modern Algebra Eight Edition.
Harahap. PembelajaranAljabar Melalui Aplikasi Wolfram Alpha. Jurnal MatematikaVol. 20, No. 1. Hal: 51-58. (2021).

[12] Bogart, K. P., Gratzer, G., & Fraleigh, J. B. A First Course in Abstract Algebra. The American Mathematical Monthly, 76(7), 842. (1969)

[13] Dar, K., & Akram, M. On Subclasses OF K(G)-Algebras. Annuals of University of Crainova, 33, 235-240. (2006)

[14] Denney, A. S., & Tewksbury, R. How to write a literature review. Journal of criminal justice education, 24(2), 218-234. (2013).

[15] Nugroho, D. Struktur dan Sifat-sifat K-Aljabar. Skripsi tidak diterbitkan. Semarang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang. (2017).