Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(5) (2024), Halaman 223- 240
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Interpretasi Metode Gauss-Seidel pada Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Bilangan Fuzzy Sigmoid

Maria Syifaus Sa'adah*, Evawati Alisah

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

200601110089@student.uin-malang.ac.id*, evawatialisah@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Sistem persamaan linier dapat digabungkan dengan suatu bilangan *fuzzy* yang menghasilkan persamaan baru, yaitu sistem persamaan linier *fuzzy*. Sistem persamaan linier *fuzzy* memiliki bentuk umum $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A sebagai elemen dengan bilangan riil, $\tilde{X}$ sebagai variabel bilangan *fuzzy*, serta $\tilde{b}$ sebagai konstanta bilangan *fuzzy*. Salah satu macam bilangan *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* sigmoid. Permasalahan yang berkaitan dengan sistem persamaan linier *fuzzy* adalah bagaimana solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah menggunakan Metode Gauss-Seidel. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui hasil dari interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Berdasarkan hasil perhitungan menunjukkan bahwa Metode Gauss-Seidel tidak selalu memberikan solusi yang tepat untuk sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$. Solusi dianggap tepat apabila apabila hasil substitusi solusi terhadap sistem persamaan linier *fuzzy* dan defuzzifikasi $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ menunjukkan hasil yang sama.

Kata Kunci: Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*; Bilangan *Fuzzy* Sigmoid; Potongan$-\alpha$; Metode Gauss-Seidel

Abstract

A system of linear equations can be combined with a fuzzy number that produces a new equation, namely a system of fuzzy linear equations. The system of fuzzy linear equations has the general form $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A as an element with real numbers, $\tilde{X}$ as a variable of fuzzy numbers, and $\tilde{b}$ as a constant of fuzzy numbers. One kind of fuzzy number is sigmoid fuzzy number. The problem related to the system of fuzzy linear equations is how to solve the system of fuzzy linear equations. One method that can be used is using the Gauss-Seidel Method. This study aims to determine the results of the interpretation of the Gauss-Seidel Method to determine the solution of the fuzzy linear equation system. Based on the calculation results, it shows that the Gauss-Seidel Method does not always provide the right solution for fuzzy linear equation systems with fuzzy variables and constants in the form of sigmoid numbers expressed as $\alpha -$cuts. The solution is considered correct if the substitution of the solution to the system of fuzzy linear equations and defuzzification $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$ shows the same result.

Keywords: Fuzzy Linear Equation System; Sigmoid Fuzzy Numbers; $\alpha -$cuts; Gauss-Seidel Method

PENDAHULUAN

Suatu persamaan linier dengan n variabel dapat ditulis dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta riil yang menghubungkan variabel-variabel dengan hasil b [1]. Kumpulan dua atau lebih dari suatu persamaan linier disebut sebagai sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier adalah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai variabel yang masih belum diketahui solusi dan konstanta b. Solusi persamaan linier merupakan kumpulan dari n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ yang memenuhi suatu persamaan linier sehingga $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ [2].

Submitted: 20 Januari 2024 Reviewed: 29 Februari 2024 Accepted: 18 Mei 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i5.27320

Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier dibutuhkan metode yang digunakan untuk mendapatkan suatu solusi. Ada dua metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan linier, yaitu metode langsung dan tidak langsung[3]. Metode langsung merupakan metode di mana prosesnya melalui langkah-langkah berhingga untuk mendapatkan solusi yang memenuhi suatu persamaan linier. Metode Eliminasi Gauss, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Invers, aturan Cramer, dan Metode Dekomposisi *Lower-Upper* (LU) merupakan contoh metode langsung. Metode tidak langsung dikenal sebagai metode iteratif dan membutuhkan nilai awal (solusi). Metode Iterasi Jacobi, Metode Gauss-Seidel, dan Metode *Successive Over Relaxation* (SOR) merupakan beberapa contoh metode tidak langsung [4].

Metode Gauss-Seidel adalah salah satu metode tidak langsung yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier melalui proses berulang atau iterasi untuk mendapatkan nilai solusi. Pada Metode Gauss-Seidel ini menggunakan nilai awal kemudian nilai yang diperoleh dari iterasi sebelumnya digunakan untuk iterasi berikutnya [5]. Metode Gauss-Seidel dapat diterapkan pada matriks koefisien dengan syarat bahwa matriks tersebut bersifat "*strictly diagonally dominant*" di mana elemen diagonalnya memiliki nilai yang lebih besar dibandingkan dengan jumlah nilai dari non-diagonal pada setiap baris. Kelebihan Metode Gauss-Seidel adalah proses iteratifnya lebih cepat untuk mencapai solusi konvergen [4].

Metode Gauss-Seidel tidak hanya digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan variabel dan konstanta bilangan riil tetapi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan variabel dan konstanta berupa bilangan *fuzzy* [4]. Bilangan *fuzzy* merupakan teori fundamental yang ada pada logika *fuzzy*. Logika *fuzzy* adalah evolusi dari logika *Boolean* yang hanya menerima nilai salah (0) atau benar (1). Pada logika *fuzzy* memungkinkan adanya nilai antara salah (0) dan benar (1). Nilai fungsi keanggotaan yang berada di antara 0 sampai 1 disebut sebagai bilangan *fuzzy*. Bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai perluasan dari bilangan tegas (*crisp*), sebab dalam bilangan tegas (*crisp*) fungsi keanggotaannya bernilai 0 atau 1 [1].

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang aljabar linier. Bilangan *fuzzy* dapat digabungkan ke dalam bidang aljabar linier terutama berlaku untuk sistem persamaan linier. Umumnya konstanta pada sistem persamaan linier adalah bilangan riil. Namun, sistem persamaan linier dapat digabungkan dengan suatu bilangan *fuzzy* yang menghasilkan persamaan baru yang disebut sistem persamaan linier *fuzzy*. Sistem persamaan linier *fuzzy* memiliki bentuk umum $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A sebagai elemen dengan bilangan riil, $\tilde{X}$ sebagai variabel dari bilangan *fuzzy*, serta $\tilde{b}$ sebagai konstanta dari bilangan *fuzzy* [6]. Salah satu macam bilangan *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* sigmoid. Bilangan sigmoid adalah bilangan yang merepresentasikan bentuk kurva pertumbuhan dan penyusutan yang berkorelasi tak linier dengan kenaikan dan penurunan [7].

Penelitian terkait penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* dilakukan oleh Misbahul Munir Setiawan (2019) yang melakukan penelitian tentang "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan" [8]. Selanjutnya, penelitian terkait penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode Gauss-Seidel dilakukan oleh Sukarna, dkk (2020) yang melakukan penelitian tentang "Perbandingan Metode Iterasi Jacobi dan Metode Iterasi Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*" [4].

Oleh karena itu, pada penelitian ini membahas tentang interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoi.

METODE

Langkah-Langkah dalam Penelitian

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan Metode Gauss-Seidel sebagai berikut:

1. Fuzzifikasi variabel dan konstanta *fuzzy* ke dalam bentuk potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan sigmoid.
2. Mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$.
3. Mengubah matriks sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$.
4. Menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel. Iterasi berhenti ketika toleransi kesalahan telah tercapai dengan defuzzifikasi nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ sehingga diperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk potongan$-\alpha$.
5. Hasil dan analisis dari solusi sistem persamaan linier *fuzzy*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Fuzzifikasi Variabel dan Konstanta *Fuzzy* Menjadi Potongan$-\alpha$ Bilangan Sigmoid

Bentuk umum dari sistem persamaan linier *fuzzy* [9], yaitu:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + a_{23}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + a_{m3}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{nm}\tilde{x}_n = \tilde{b}_m \end{array} \tag{1}$$

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diubah ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ [4]. Variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ pada persamaan (1) menggunakan bilangan *fuzzy* sigmoid kurva pertumbuhan yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ sebagai pasangan terurut, yaitu $x_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ dan $b_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* yang dinyatakan potongan$-\alpha$, yaitu $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n = [x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+], [x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+], \dots, [x_{n_\alpha}^-, x_{n_\alpha}^+]$ dan $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n = [b_{1_\alpha}^-, b_{1_\alpha}^+], [b_{2_\alpha}^-, b_{2_\alpha}^+], \dots, [b_{m_\alpha}^-, b_{m_\alpha}^+]$ [10].

Bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$ diperoleh dari fungsi keanggotaan bilangan sigmoid. Misalkan terdapat bilangan *fuzzy* sigmoid $\tilde{x}_1 = \text{sigmoid}(x; a, b, c\,)$ maka memiliki fungsi keanggotaannya:

$$S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \le a \\ 2\left(\dfrac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \le x \le b \\ 1 - 2\left(\dfrac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \le x \le c \\ 1, & \text{untuk } x \ge c \end{cases} \tag{2}$$

Berdasarkan persamaan (2) bilangan $\tilde{x}_1$ yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$ untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{x}_1}(x_{1_\alpha}^-) = \mu_{\tilde{x}_1}(x_{1_\alpha}^+)$, yaitu $\alpha = 2\left(\frac{(x_{1_\alpha}^- - a)}{(c-a)}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(c - x_{1_\alpha}^+)}{(c-a)}\right)^2$. Maka bilangan *fuzzy* sigmoid $\tilde{x}_1$ yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$

adalah $x_{1_\alpha} = \left[\sqrt{\frac{(c-a)^2\alpha}{2}} + a, c - \sqrt{\frac{(c-a)^2-(c-a)^2\alpha}{2}}\ \right]$ [11].

Mengubah Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* ke dalam Matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$

Bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* akan dirubah ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$ [4], yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} [x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+] \\ [x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+] \\ \vdots \\ [x_{n_\alpha}^-, x_{n_\alpha}^+] \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} [b_{1_\alpha}^-, b_{1_\alpha}^+] \\ [b_{2_\alpha}^-, b_{2_\alpha}^+] \\ \vdots \\ [b_{m_\alpha}^-, b_{m_\alpha}^+] \end{bmatrix} \quad (3)$$

Mengubah Matriks Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menjadi Sistem Linier Non-*Fuzzy* dengan Matriks

Mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan atau $n \times n$ menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan atau $2n \times 2n$ sehingga dari persamaan umum yang awalnya $A\tilde{X} = \tilde{b}$ berdasarkan persamaan (3) akan menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ [12]. Tujuan dari mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah agar sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linier [13].

Perhatikan koefisien matriks $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2, \dots, n$, untuk menentukan matriks S ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.
3. $s_{i,j} = 0$ untuk lainnya [12].

Bentuk umum dari matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ adalah [9]:

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} & s_{1,n+1} & \dots & s_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \dots & s_{n,n} & s_{n,n+1} & \dots & s_{n,2n} \\ s_{n+1,1} & \dots & s_{n+1,n} & s_{n+1,n+1} & \dots & s_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & \cdots & s_{2n,n} & s_{2n,n+1} & \cdots & s_{2n,2n} \end{bmatrix}, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^- \\ x_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^+ \end{bmatrix}, \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} b_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^- \\ b_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^+ \end{bmatrix} \quad (4)$$

Didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy* [14], yaitu:

$$\begin{array}{c} s_{1,1}x_{1_\alpha}^- + \cdots + s_{1,n}x_{n_\alpha}^- + s_{1,n+1}x_{1_\alpha}^+ + \cdots + s_{1,2n}x_{n_\alpha}^+ = b_{1_\alpha}^- \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ s_{n,1}x_{1_\alpha}^- + \cdots + s_{n,n}x_{n_\alpha}^- + s_{n,n+1}x_{1_\alpha}^+ + \cdots + s_{n,2n}x_{n_\alpha}^+ = b_{m_\alpha}^- \\ s_{n+1,1}x_{1_\alpha}^- + \cdots + s_{n+1,n}x_{n_\alpha}^- + s_{n+1,n+1}x_{1_\alpha}^+ + \cdots + s_{n+1,2n}x_{n_\alpha}^+ = b_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ s_{2n,1}x_{1_\alpha}^- + \cdots + s_{2n,n}x_{n_\alpha}^- + s_{2n,n+1}x_{1_\alpha}^+ + \cdots + s_{2n,2n}x_{n_\alpha}^+ = b_{m_\alpha}^+ \end{array} \quad (5)$$

Proses Pencarian Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menggunakan Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel ini dilakukan melalui proses iterasi dengan cara memberikan nilai awal, yaitu $\tilde{X} = \left(x_{1_\alpha}^-, \dots, x_{n_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+, \dots, x_{n_\alpha}^+\ \right)^t = (0)$. Syarat cukup agar iterasi yang dihasilkan konvergen yaitu persamaan (1) harus memenuhi syarat koefisien matriks domain secara diagonal atau "*strictly diagonally dominant*".

$$|a_{ii}| > \textstyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,3, \dots \quad (6)$$

Persamaan umum dari Metode Gauss-Seidel dinyatakan sebagai berikut [15]:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2, \dots \tag{7}$$

Proses iterasi untuk dimulai dengan cara mengubah bentuk umum sistem persamaan linier non-*fuzzy* pada persamaan (5) menjadi persamaan iterasi, yaitu:

$$\begin{aligned} x_{1_\alpha}^{-} &= \frac{b_{1_\alpha}^{-} - s_{1,2} x_{2_\alpha}^{-} - s_{1,3} x_{1_\alpha}^{+} - s_{1,4} x_{2_\alpha}^{+}}{s_{1,1}} \\ x_{2_\alpha}^{-} &= \frac{b_{2_\alpha}^{-} - s_{2,1} x_{1_\alpha}^{-} - s_{2,3} x_{1_\alpha}^{+} - s_{2,4} x_{2_\alpha}^{+}}{s_{2,2}} \\ x_{1_\alpha}^{+} &= \frac{b_{1_\alpha}^{+} - s_{3,1} x_{1_\alpha}^{-} - s_{3,2} x_{2_\alpha}^{-} - s_{3,4} x_{2_\alpha}^{+}}{s_{3,3}} \\ x_{2_\alpha}^{+} &= \frac{b_{2_\alpha}^{+} - s_{4,1} x_{1_\alpha}^{-} - s_{4,2} x_{2_\alpha}^{-} - s_{4,3} x_{1_\alpha}^{+}}{s_{4,4}} \end{aligned} \tag{8}$$

Proses iterasi berhenti jika toleransi tertentu telah dicapai dengan cara memberikan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Toleransi kesalahan didefinisikan sebagai berikut:

$$\left| \frac{\tilde{x}_i^{(k+1)} - \tilde{x}_i^{(k)}}{\tilde{x}_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \tag{9}$$

Analisis Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*

Solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* didapatkan jika iterasi yang dihasilkan menggunakan Metode Gauss-Seidel mencapai batas toleransi yang sudah ditentukan. Kemudian solusi yang telah diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan awal untuk membuktikan bahwa solusi tersebut memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy*.

Contoh 1

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* berikut dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 &= \widetilde{14} \\ 2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= \widetilde{14} \end{aligned} \tag{10}$$

Dengan $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^{-}, x_{1_\alpha}^{+}\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^{-}, x_{2_\alpha}^{+}\right]$. Proses iterasi dengan diberikan nilai awal, yaitu $\left(x_{1_\alpha}^{-(0)}, x_{2_\alpha}^{-(0)}, x_{1_\alpha}^{+(0)}, x_{2_\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$. Iterasi berhenti ketika batas toleransi telah tercapai dengan mensubsitusikan setiap nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid $\widetilde{14} = \text{sigmoid}(x; 10, 12, 14)$.

Penyelesaian:

a. **Pertama**, mengubah konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan. maka fungsi keanggotaannya adalah:

$\widetilde{14} = \text{sigmoid}(x; 10, 12, 14)$

$$\mu_{\widetilde{14}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \le 10 \\ 2\left(\dfrac{(x-10)}{(14-10)}\right)^2, & \text{untuk } 10 \le x \le 12 \\ 1 - 2\left(\dfrac{(14-x)}{(14-10)}\right)^2, & \text{untuk } 12 \le x \le 14 \\ 1, & \text{untuk } x \ge 14 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{14}}(14_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{14}}(14_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(14_\alpha^- - 10)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(14 - 14_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Maka didapatkan untuk $14_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 10$ dan $14_\alpha^+ = 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Sehingga diperoleh $14_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$. Sedangkan ntuk variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right]$.

b. **Kedua,** mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right] \end{bmatrix}, \text{dan}$$
$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{14} \\ \widetilde{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \end{bmatrix} \tag{11}$$

c. **Ketiga,** Memeriksa sistem persamaan linier *fuzzy* memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel. Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (11)

$$|a_{11}| > |a_{12}| \;\rightarrow\; |4| > |-1|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| \;\rightarrow\; |3| > |2|$$

Terbukti memenuhi syarat cukup Metode Gauss-Seidel

d. **Keempat,** Mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* dari $n \times n$ dengan bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* $2n \times 2n$ dengan bentuk matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (11)

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
$$s_{1,1} = 4, s_{2,1} = 2, s_{2,2} = 3, \text{dan } s_{3,3} = 4, s_{4,3} = 2, s_{4,4} = 3$$
2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.
$$s_{1,4} = -(-1), \text{dan } s_{3,2} = -(-1)$$
3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Didapatkan matriks perluasan S, variabel *fuzzy* $\tilde{X}^*$, dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}^*$

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1_\alpha}^- \\ x_{2_\alpha}^- \\ x_{1_\alpha}^+ \\ x_{2_\alpha}^+ \end{bmatrix}, \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 10 \\ \sqrt{8\alpha} + 10 \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy*, yaitu:

$$\begin{aligned} 4x_{1_\alpha}^- + x_{2_\alpha}^+ &= \sqrt{8\alpha} + 10 \\ 2x_{1_\alpha}^- + 3x_{2_\alpha}^- &= \sqrt{8\alpha} + 10 \\ x_{2_\alpha}^- + 4x_{1_\alpha}^+ &= 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 2x_{1_\alpha}^+ + 3x_{2_\alpha}^+ &= 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{aligned} \tag{13}$$

e. **Kelima,** berdasarkan rumusan umum Metode Gauss-Seidel pada persamaan (7), didapatkan persamaan persamaan iterasi, yaitu:

$$\begin{aligned} x_{1_\alpha}^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2_\alpha}^+}{4} \\ x_{2_\alpha}^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^-}{3} \\ x_{1_\alpha}^+ &= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{2_\alpha}^-}{4} \end{aligned} \tag{14}$$

$$x_{2_\alpha}^{+} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+}}{3}$$

Selanjutnya, proses iterasi dimulai dengan substitusikan nilai awal $\left(x_{1_\alpha}^{-(0)}, x_{2_\alpha}^{-(0)}, x_{1_\alpha}^{+(0)}, x_{2_\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ pada iterasi pertama

Iterasi pertama

$$x_{1_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2_\alpha}^{+(0)}}{4}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^{-(1)}}{3}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(1)} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{2_\alpha}^{-(1)}}{4}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(1)} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+(1)}}{3}$$

Dengan mensubstitusikan nilai awal pada iterasi pertama, maka diperoleh:

$$x_{1_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{4}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{6}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(1)} = \frac{74 - \sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8-8\alpha}}{24}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(1)} = \frac{94 - 6\sqrt{8-8\alpha} + \sqrt{8\alpha}}{36}$$

Hasil dari iterasi pertama, yaitu:

$$\left[\frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{4}, \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{6}, \frac{74 - \sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8-8\alpha}}{24}, \frac{94 - 6\sqrt{8-8\alpha} + \sqrt{8\alpha}}{36}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2_\alpha}^{+(1)}}{4}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^{-(2)}}{3}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(2)} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{2_\alpha}^{-(2)}}{4}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(2)} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+(2)}}{3}$$

Dengan mensubstitusikan nilai iterasi pertama pada iterasi kedua, maka diperoleh:

$$x_{1_\alpha}^{-(2)} = \frac{35\sqrt{8\alpha} + 266 + 6\sqrt{8-8\alpha}}{144}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(2)} = \frac{37\sqrt{8\alpha} + 454 - 6\sqrt{8-8\alpha}}{216}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(2)} = \frac{2570 - 210\sqrt{8-8\alpha} - 37\sqrt{8\alpha}}{864}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(2)} = \frac{3478 - 222\sqrt{8-8\alpha} + 37\sqrt{8\alpha}}{1296}$$

Hasil iterasi kedua, yaitu:

$$\left[\frac{35\sqrt{8\alpha}+266+6\sqrt{8-8\alpha}}{144},\frac{37\sqrt{8\alpha}+454-6\sqrt{8-8\alpha}}{216},\right.$$
$$\left.\frac{2570-210\sqrt{8-8\alpha}-37\sqrt{8\alpha}}{864},\frac{3478-222\sqrt{8-8\alpha}+37\sqrt{8\alpha}}{1296}\right]$$

Iterasi berlangsung sampai dengan iterasi kelima. Nilai setiap iterasi pertama sampai dengan iterasi kelima kemudian disubstitusikan dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$.

Tabel 1. Simulasi $\alpha = 0$

Ketika $\alpha = 0$				
Iterasi Ke-n	$x_{1_\alpha}^-$	$x_{2_\alpha}^-$	$x_{1_\alpha}^+$	$x_{2_\alpha}^+$
1	2,500	1,600	2,376	2,140
2	1,965	2,023	2,287	2,199
3	1,950	2,033	2,285	2,201
4	1,950	2,033	2,285	2,201
5	1,950	2,033	2,285	2,201

Tabel 2. Simulasi $\alpha = 1$

Ketika $\alpha = 1$				
Iterasi Ke-n	$x_{1_\alpha}^-$	$x_{2_\alpha}^-$	$x_{1_\alpha}^+$	$x_{2_\alpha}^+$
1	3,207	2,138	2,965	2,690
2	2,535	2,586	2,853	2,764
3	2,516	2,599	2,850	2,766
4	2,515	2,599	2,850	2,767
5	2,515	2,599	2,850	2,767

Berdasarkan tabel (1) dan (2), iterasi berhenti pada iterasi kelima karena toleransi kesalahan telah dicapai, yaitu

- Simulasi $\alpha = 0$

$$\left|\frac{x_{1_\alpha}^{-(5)} - x_{1_\alpha}^{-(4)}}{x_{1_\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$
$$\left|\frac{1{,}950 - 1{,}950}{1.950}\right| < 0{,}001$$
$$0 < 0{,}001$$

- Simulasi $\alpha = 1$

$$\left|\frac{x_{1_\alpha}^{-(5)} - x_{1_\alpha}^{-(4)}}{\tilde{x}_{1_\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$
$$\left|\frac{2{,}515 - 2{,}515}{2{,}515}\right| < 0{,}001$$
$$0 < 0{,}001$$

Maka, solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*:

$$x_{1_\alpha}^- = \frac{1631627\sqrt{8\alpha}+12285194+287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}$$
$$x_{2_\alpha}^- = \frac{1727605\sqrt{8\alpha}+21307126-287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696} \quad (15)$$

$$x_{1\alpha}^{+} = \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Untuk mengetahui letak interval dari setiap solusi yang telah didapatkan, maka setiap solusi didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$

Letak interval untuk $\alpha = 0$

$$x_{1\alpha} = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] = [(1{,}950), (2{,}285)]$$

$$x_{2\alpha} = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = [(2{,}033), (2{,}201)]$$

Letak interval untuk $\alpha = 1$

$$x_{1\alpha} = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] = [(2{,}515), (2{,}850)]$$

$$x_{2\alpha} = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = [(2{,}599), (2{,}767)]$$

Solusi yang telah didapatkan kemudian disubstitusikan ke dalam setiap sistem persamaan linier *fuzzy* dengan dengan menggunakan operasi aritmetika bilangan *fuzzy* [11].

Persamaan I

$$4\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \widetilde{14}$$

$$4\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] - \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[4x_{1\alpha}^{-}, 4x_{1\alpha}^{+}\right] - \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[4x_{1\alpha}^{-} - x_{2\alpha}^{+}\right], \left[4x_{1\alpha}^{+} - x_{2\alpha}^{-}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[4x_{1\alpha}^{-} - x_{2\alpha}^{+}\right], \left[4x_{1\alpha}^{+} - x_{2\alpha}^{-}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika kedua ruas didefuzzifikasikan dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan;

Hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(0)} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8(0)}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8(0)} - 1727605\sqrt{8(0)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(5{,}593), (7{,}105)] = [(10),(11{,}172)]$$

Hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(1)} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8(1)}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8(1)} - 1727605\sqrt{8(1)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(7{,}295),(8{,}802)] = [(12{,}183),(14)]$$

Persamaan II

$$\begin{aligned}
2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= \widetilde{14}\\
2\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] + 3\left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]\\
\left[2x_{1\alpha}^{-}, 2x_{1\alpha}^{+}\right] + \left[3x_{2\alpha}^{-}, 3x_{2\alpha}^{+}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]\\
\left[\left[2x_{1\alpha}^{-} + 3x_{2\alpha}^{-}\right], \left[2x_{1\alpha}^{+} + 3x_{2\alpha}^{+}\right]\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]\\
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Jika kedua ruas didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan:

Hasil $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]\\
\left[\sqrt{8(0)} + 10, 14 - \sqrt{8-8(0)}\right] &= \left[\sqrt{8(0)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(0)}\right]\\
[(10),(11{,}172)] &= [(10),(11{,}172)]
\end{aligned}$$

Hasil $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]\\
\left[\sqrt{8(1)} + 10, 14 - \sqrt{8-8(1)}\right] &= \left[\sqrt{8(1)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(1)}\right]\\
[(12{,}828),(14)] &= [(12{,}828),(14)]
\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* berikut dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel

$$\begin{aligned}
4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &= \widetilde{15}\\
\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 &= \tilde{7}\\
\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 &= \widetilde{12}
\end{aligned} \tag{16}$$

Dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $\tilde{x}_1 = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right]$, $\tilde{x}_2 = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right]$, dan $\tilde{x}_3 = \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right]$. Proses iterasi dengan diberikan nilai awal, yaitu $\left(x_{1\alpha}^{-(0)}, x_{2\alpha}^{-(0)}, x_{3\alpha}^{-(0)}, x_{1\alpha}^{+(0)}, x_{2\alpha}^{+(0)}, x_{3\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$. Iterasi berhenti ketika batas toleransi telah tercapai dengan mensubstitusikan setiap nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid $\widetilde{15} = \text{sigmoid}(x; 11, 13, 15)$, $\tilde{7} = \text{sigmoid}(x; 3, 5, 7)$, dan $\widetilde{12} = \text{sigmoid}(x; 8, 10, 12)$

Penyelesaian:

a. **Pertama,** mengubah konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan, maka fungsi keanggotaannya adalah:

   $\widetilde{15} = \text{sigmoid}(x; 11, 13, 15)$

$$\mu_{\widetilde{15}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 11 \\ 2\left(\dfrac{(x-11)}{(15-11)}\right)^2, & \text{untuk } 11 \leq x \leq 13 \\ 1-2\left(\dfrac{(15-x)}{(15-11)}\right)^2, & \text{untuk } 13 \leq x \leq 15 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 15 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{15}}(15_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{15}}(15_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(15_\alpha^- - 11)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(15 - 15_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Didapatkan $15_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 11$ dan $15_\alpha^+ = 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Sehingga diperoleh $15_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 11\, , 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$.

$\tilde{7} = \text{sigmoid}(x; 3, 5, 7)$

$$\mu_{\tilde{7}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 3 \\ 2\left(\dfrac{(x-3)}{(7-4)}\right)^2, & \text{untuk } 3 \leq x \leq 5 \\ 1-2\left(\dfrac{(7-x)}{(7-4)}\right)^2, & \text{untuk } 5 \leq x \leq 7 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 7 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{7}}(7_\alpha^-) = \mu_{\tilde{7}}(7_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(7_\alpha^- - 3)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(7 - 7_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Didapatkan $7_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 3$ dan $7_\alpha^+ = 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Sehingga diperoleh $7_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 3\, , 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$

$\widetilde{12} = \text{sigmoid}(x; 8, 10, 12)$

$$\mu_{\widetilde{12}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 8 \\ 2\left(\dfrac{(x-8)}{(12-8)}\right)^2, & \text{untuk } 8 \leq x \leq 10 \\ 1-2\left(\dfrac{(12-x)}{(12-8)}\right)^2, & \text{untuk } 10 \leq x \leq 12 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 12 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{12}}(12_\alpha^-) = \mu_{\tilde{7}}(12_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(12_\alpha^- - 8)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(12 - 12_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Didapatkan $12_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 8$ dan $12_\alpha^+ = 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Sehingga diperoleh $12_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 8\, , 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$. Sedangkan untuk variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right], x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right]$, dan $x_{3_\alpha} = \left[x_{3_\alpha}^-, x_{3_\alpha}^+\right]$.

b. **Keuda,** mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{3_\alpha}^-, x_{3_\alpha}^+\right] \end{bmatrix}, \text{dan} \tag{17}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{15} \\ \tilde{7} \\ \widetilde{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{8\alpha} + 11 \,, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,] \\ [\sqrt{8\alpha} + 3 \,, 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,] \\ [\sqrt{8\alpha} + 8 \,, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,] \end{bmatrix}$$

c. **Ketiga,** memeriksa sistem persamaan linier *fuzzy* memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel. Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (17)

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \rightarrow |4| > |2| + |1|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \rightarrow |5| > |1| + |-1|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \rightarrow |8| > |5| + |1|$$

Terbukti memenuhi syarat cukup Metode Gauss-Seidel

d. **Keempat,** mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* dari $n \times n$ dengan bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* $2n \times 2n$ dengan matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (17)

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
   $s_{1,1} = 4, s_{1,2} = 2, s_{1,3} = 1, s_{2,1} = 1, s_{2,2} = 5, s_{3,1} = 1, s_{3,2} = 5, s_{3,3} = 8$ dan
   $s_{4,4} = 4, s_{4,5} = 2, s_{4,6} = 1, s_{5,4} = 1, s_{5,5} = 5, s_{6,4} = 1, s_{6,5} = 5, s_{6,6} = 8$
2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.
   $s_{2,6} = -(-1)$ dan $s_{5,3} = -(-1)$
3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Didapatkan matriks perluasan S, variabel *fuzzy* $\tilde{X}^*$, dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}^*$

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} {x_1}_\alpha^- \\ {x_2}_\alpha^- \\ {x_3}_\alpha^- \\ {x_1}_\alpha^+ \\ {x_2}_\alpha^+ \\ {x_3}_\alpha^+ \end{bmatrix}, \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 11 \\ \sqrt{8\alpha} + 3 \\ \sqrt{8\alpha} + 8 \\ 15 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 7 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 12 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy*, yaitu:

$$\begin{aligned} 4{x_1}_\alpha^- + 2{x_2}_\alpha^- + {x_3}_\alpha^- &= \sqrt{8\alpha} + 11 \\ {x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- + {x_3}_\alpha^+ &= \sqrt{8\alpha} + 3 \\ {x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- + 8{x_3}_\alpha^- &= \sqrt{8\alpha} + 8 \\ 4{x_1}_\alpha^+ + 2{x_2}_\alpha^+ + {x_3}_\alpha^+ &= 15 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ {x_3}_\alpha^- + {x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ &= 7 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ {x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ + 8{x_3}_\alpha^+ &= 12 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{aligned} \qquad (19)$$

e. **Kelima,** berdasarkan rumusan umum Metode Gauss-Seidel pada persamaan (7), didapatkan persamaan persamaan iterasi, yaitu:

$$\begin{aligned} {x_1}_\alpha^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2{x_2}_\alpha^- - {x_3}_\alpha^-}{4} \\ {x_2}_\alpha^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - {x_1}_\alpha^- - {x_3}_\alpha^+}{5} \\ {x_3}_\alpha^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - {x_1}_\alpha^- - 5{x_2}_\alpha^-}{8} \\ {x_1}_\alpha^+ &= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2{x_2}_\alpha^+ - {x_3}_\alpha^+}{4} \end{aligned} \qquad (20)$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{3\alpha}^{-} - x_{1\alpha}^{+}}{5}$$

$$x_{3\alpha}^{+} = \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1\alpha}^{+} - 5x_{2\alpha}^{+}}{8}$$

Selanjutnya, proses iterasi dimulai dengan substitusikan nilai awal $\left(x_{1\alpha}^{-(0)}, x_{2\alpha}^{-(0)}, x_{3\alpha}^{-(0)}, x_{1\alpha}^{+(0)}, x_{2\alpha}^{+(0)},\ x_{3\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ pada iterasi pertama

Iterasi pertama

$$x_{1\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2\alpha}^{-(0)} - x_{3\alpha}^{-(0)}}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1\alpha}^{-(1)} - x_{3\alpha}^{+(0)}}{5}$$

$$x_{3\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1\alpha}^{-(1)} - 5x_{2\alpha}^{-(1)}}{8}$$

$$x_{1\alpha}^{+(1)} = \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+(0)} - x_{3\alpha}^{+(0)}}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{+(1)} = \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{3\alpha}^{-(1)} - x_{1\alpha}^{+(1)}}{5}$$

$$x_{3\alpha}^{+(1)} = \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1\alpha}^{+(1)} - 5x_{2\alpha}^{+(1)}}{8}$$

Dengan mensubstitusikan nilai awal pada iterasi pertama, maka diperoleh:

$$x_{1\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{-(1)} = \frac{3\sqrt{8\alpha} + 1}{20}$$

$$x_{3\alpha}^{-(1)} = \frac{5}{8}$$

$$x_{1\alpha}^{+(1)} = \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha}}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{+(1)} = \frac{21 - 6\sqrt{8-8\alpha}}{40}$$

$$x_{3\alpha}^{+(1)} = \frac{45}{64}$$

Hasil dari iterasi pertama, yaitu:

$$\left[\frac{\sqrt{8\alpha} + 11}{4}, \frac{3\sqrt{8\alpha} + 1}{20}, \frac{5}{8}, \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha}}{4}, \frac{21 - 6\sqrt{8-8\alpha}}{40}, \frac{45}{64}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2\alpha}^{-(1)} - x_{3\alpha}^{-(1)}}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1\alpha}^{-(2)} - x_{3\alpha}^{+(1)}}{5}$$

$$x_{3\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1\alpha}^{-(2)} - 5x_{2\alpha}^{-(2)}}{8}$$

$$x_{1\alpha}^{+(2)} = \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+(1)} - x_{3\alpha}^{+(1)}}{4}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+(2)} = \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{3}{}_{\alpha}^{-(2)} - x_{1}{}_{\alpha}^{+(2)}}{5}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{+(2)} = \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1}{}_{\alpha}^{+(2)} - 5x_{2}{}_{\alpha}^{+(2)}}{8}$$

Dengan mensubstitusikan nilai iterasi pertama pada iterasi kedua, maka diperoleh:

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-(2)} = \frac{28\sqrt{8\alpha} + 411}{160}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-(2)} = \frac{264\sqrt{8\alpha} - 87}{1600}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{-(2)} = \frac{365}{512}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+(2)} = \frac{4239 - 224\sqrt{8-8\alpha}}{1280}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+(2)} = \frac{7617 - 2112\sqrt{8-8\alpha}}{12800}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{+(2)} = \frac{2925}{4096}$$

Hasil iterasi kedua, yaitu:

$$\left[\frac{28\sqrt{8\alpha} + 411}{160}, \frac{264\sqrt{8\alpha} - 87}{1600}, \frac{365}{512}, \frac{4239 - 224\sqrt{8-8\alpha}}{1280}, \frac{7617 - 2112\sqrt{8-8\alpha}}{12800}, \frac{2925}{4096}\right]$$

Iterasi berlangsung sampai dengan iterasi keenam. Nilai setiap iterasi pertama sampai dengan iterasi keenam kemudian disubstitusikan dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$.

Tabel 3. Simulasi $\alpha = 0$

Ketika $\alpha = 0$						
Iterasi Ke-n	$x_{1}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{3}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{1}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{3}{}_{\alpha}^{+}$
1	2,750	0,050	0,625	3,043	0,101	0,703
2	2,569	-0,054	0,713	2,817	0,128	0,714
3	2,599	-0.063	0.714	2,800	0,131	0,714
4	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714
5	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714
6	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714

Tabel 4. Simulasi $\alpha = 1$

Ketika $\alpha = 1$						
Iterasi Ke-n	$x_{1}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{3}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{1}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{3}{}_{\alpha}^{+}$
1	3,457	0,474	0,625	3,750	0,525	0,703
2	3,064	0,412	0,713	3,312	0,595	0,714
3	3,073	0,408	0,714	3,274	0,602	0,714
4	3,074	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714
5	3,075	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714
6	3,075	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714

Berdasarkan tabel (3) dan (4), iterasi berhenti pada iterasi kelima karena toleransi kesalahan telah dicapai, yaitu

- Simulasi $\alpha = 0$

$$\left|\frac{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)} - x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)}}\right| < 0{,}001$$
$$\left|\frac{2{,}603 - 2{,}603}{2{,}603}\right| < 0{,}001$$
$$0 < 0{,}001$$

- Simulasi $\alpha = 1$

$$\left|\frac{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)} - x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}{x_{2}{}_{\alpha}^{-(6)}}\right| < 0{,}001$$
$$\left|\frac{3{,}075 - 3{,}075}{3{,}075}\right| < 0{,}001$$
$$0 < 0{,}001$$

Maka, solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*:

$$\begin{aligned} x_{1}{}_{\alpha}^{-} &= \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000} \\ x_{2}{}_{\alpha}^{-} &= \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000} \\ x_{3}{}_{\alpha}^{-} &= \frac{6135667565}{8589934592} \\ x_{1}{}_{\alpha}^{+} &= \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000} \\ x_{2}{}_{\alpha}^{+} &= \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000} \\ x_{2}{}_{\alpha}^{+} &= \frac{49085340525}{68719476736} \end{aligned} \tag{21}$$

Untuk mengetahui letak interval dari setiap solusi yang telah didapatkan, maka setiap solusi didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$

Letak interval untuk $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} x_{1\alpha} &= \left[x_{1}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(2{,}603), (2{,}798)] \\ x_{2\alpha} &= \left[x_{2}{}_{\alpha}^{-}, x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(-0{,}063), (0{,}132)] \\ x_{3\alpha} &= \left[x_{3}{}_{\alpha}^{-}, x_{3}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(0{,}714), (0{,}714)] \end{aligned}$$

Letak interval untuk $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} x_{1\alpha} &= \left[x_{1}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(3{,}075), (3{,}270)] \\ x_{2\alpha} &= \left[x_{2}{}_{\alpha}^{-}, x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(0{,}408), (0{,}603)] \\ x_{3\alpha} &= \left[x_{3}{}_{\alpha}^{-}, x_{3}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(0{,}714), (0{,}714)] \end{aligned}$$

Solusi yang telah didapatkan kemudian disubstitusikan ke dalam setiap sistem persamaan linier *fuzzy* dengan dengan menggunakan operasi aritmetika bilangan *fuzzy* [11].

Persamaan I

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &= \widetilde{15} \\ 4\left[x_{1}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] + 2\left[x_{2}{}_{\alpha}^{-}, x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right] + \left[x_{3}{}_{\alpha}^{-}, x_{3}{}_{\alpha}^{+}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\ \left[4x_{1}{}_{\alpha}^{-}, 4x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] + \left[2x_{2}{}_{\alpha}^{-}, 2x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right] + \left[x_{3}{}_{\alpha}^{-}, x_{3}{}_{\alpha}^{+}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\ \left[\left[4x_{1}{}_{\alpha}^{-} + 2x_{2}{}_{\alpha}^{-} + x_{3}{}_{\alpha}^{-}\right], \left[4x_{1}{}_{\alpha}^{+} + 2x_{2}{}_{\alpha}^{+} + x_{3}{}_{\alpha}^{+}\right]\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\ \left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000},\right. &= \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \end{aligned}$$

$$\frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\Bigg]$$

Jika kedua ruas didefuzzifikasikan dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan;
Hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(0)}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8(0)}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 11, 15 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(11{,}000), (14{,}717)] = [(11), (12{,}172)]$$

Hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(1)}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8(1)}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 11, 15 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(13{,}828), (15{,}000)] = [(13{,}828), (15)]$$

Persamaan II

$$\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = \tilde{7}$$

$$\left[x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+\right] + 5\left[x_{2\alpha}^-, x_{2\alpha}^+\right] - \left[x_{3\alpha}^-, x_{3\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+\right] + \left[5x_{2\alpha}^-, 5x_{2\alpha}^+\right] - \left[x_{3\alpha}^-, x_{3\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[x_{1\alpha}^- + 5x_{2\alpha}^- - x_{3\alpha}^+\right], \left[x_{1\alpha}^+ + 5x_{2\alpha}^+ - x_{3\alpha}^-\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika kedua ruas didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan:
Hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 3, 7 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(15{,}716), (2{,}743)] = [(3), (4{,}172)]$$

Hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(1)}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 3,7 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$
$$[(18{,}544), (5{,}571)\ ] = [(5{,}828), (7)]$$

Persamaan III

$$\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 = \widetilde{12}$$
$$\left[x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+\right] + 5\left[x_{2\alpha}^-, x_{2\alpha}^+\right] + 8\left[x_{3\alpha}^-, x_{3\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$
$$\left[x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+\right] + \left[5x_{2\alpha}^-, 5x_{2\alpha}^+\right] + \left[8x_{3\alpha}^-, 8x_{3\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$
$$\left[\left[x_{1\alpha}^- + 5x_{2\alpha}^- + 8x_{3\alpha}^-\right], \left[x_{1\alpha}^+ + 5x_{2\alpha}^+ + 8x_{3\alpha}^+\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$
$$\left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\ \right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika kedua ruas didefuzzifikasikan dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan;
Hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\ \right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$
$$\left[\sqrt{8(0)} + 8, 12 - \sqrt{8-8(0)}\ \right] = \left[\sqrt{8(0)} + 8, 12 - \sqrt{8-8(0)}\ \right]$$
$$[(8), (9{,}172)] = [(8), (9{,}172)]$$

Hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\ \right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$
$$\left[\sqrt{8(1)} + 8, 12 - \sqrt{8-8(1)}\ \right] = \left[\sqrt{8(1)} + 8, 12 - \sqrt{8-8(1)}\ \right]$$
$$[(10{,}828), (12)] = [(10{,}828), (12)]$$

Analisis:

Solusi yang diperoleh akan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* jika hasil dari kedua sisi persamaan sama dan hasil defuzzifikasi nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ memberikan hasil yang sama. Jika terdapat perbedaan hasil dari kedua sisi persamaan, maka solusi yang didapatkan tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Berdasarkan hasil dari contoh 1 dan contoh 2 untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel. Hasil yang diberikan menunjukkan bahwa dalam beberapa kasus seperti pada persamaan I dari contoh 1 serta pada persamaan I dan II dari contoh 2, solusi yang ditemukan tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Sedangkan dibeberapa kasus seperti pada persamaan II dari contoh 1 serta persamaan III dari contoh 2, solusi yang ditemukan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* sehingga akan kembali ke persamaan semula. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun Metode Gauss-Seidel merupakan metode numerik atau metode iteratif yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, belum tentu memberikan solusi yang tepat atau langsung untuk memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan *fuzzy* yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$.

KESIMPULAN

Solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy* yang diperoleh menggunakan Metode Gauss-Seidel akan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* jika hasil dari kedua sisi persamaan sama dan hasil defuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ memberikan hasil yang sama. Jika menunjukkan perbedaan hasil dari kedua sisi persamaan, maka solusi yang diperoleh tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Berdasarkan interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid, solusi yang didapatkan hanya dapat memenuhi beberapa kasus saja. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun Metode Gauss-Seidel merupakan metode numerik atau metode iteratif yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, belum tentu memberikan solusi yang tepat atau langsung untuk memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] E. R. Sari dan E. Alisah, "Studi Tentang Persamaan Fuzzy," *CAUCHY J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 2, no. 2, hal. 55–65, 2012, doi: 10.18860/ca.v2i2.2228.

[2] A. Andari, *Aljabar Linier Elementer*. Malang: Malang: UB Press, 2017.

[3] A. O. Sativa, S. Putra, dan Z. Zulkarnain, "Metode Gauss-seidel Prekondisi Untuk Mencari Solusi Sistem Persamaan Linear," *J. Online Mhs. Fak. Mat. dan Ilmu Pengetah. Alam Univ. Riau*, vol. 2, no. 1, hal. 21–30, 2015.

[4] S. Sukarna, M. Abdy, dan R. Rahmat, "Perbandingan Metode Iterasi Jacobi dan Metode Iterasi Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Fuzzy," *J. Math. Comput. Stat.*, vol. 2, no. 1, hal. 1, 2020, doi: 10.35580/jmathcos.v2i1.12447.

[5] C. Rahmad, I. Deasy, dan E. Sandhya, *Metode Numerik*. Malang: Malang: Polinema Press, 2016.

[6] A. R. Permata, "Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Crout," *J. Math.*, vol. 1, hal. 20–27, 2018.

[7] S. Kusumadewi dan H. Purnomo, *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.

[8] M. M. Setiawan, *Solusi Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Bilangan Fuzzy Trapesium Menggunakan Metode Gauss-Jordan*. (Skripsi Sarjana, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang), 2019. [Daring]. Tersedia pada: http://etheses.uin-malang.ac.id/15023/1/13610105.pdf

[9] T. Allahviranloo dan S. Salahshour, "Fuzzy symmetric solutions of fuzzy linear systems," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 235, no. 16, hal. 4545–4553, 2011, doi: 10.1016/j.cam.2010.02.042.

[10] T. Allahviranloo, N. Mikaeilvand, N. A. Kiani, dan R. M. Shabestari, "Signed decomposition of fully fuzzy linear systems," *An Int. J. Appl. Appl. Math.*, vol. 3, no. 1, hal. 77–88, 2008.

[11] F. Susilo, *Himpunan & Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006.

[12] M. Matinfar, S. H. Nasseri, dan M. Sohrabi, "Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Householder Decomposition Method," *Appl. Math. Sci.*, vol. 2, no. 52, hal. 2569–2575, 2008.

[13] I. Irmawati, I. Sukarsih, dan R. Respitawulan, "Solusi Sistem Persamaan Linear Fuzzy," *J. Teor. dan Terap. Mat.*, vol. 16, no. 2, hal. 1–8, 2017, doi: 10.29313/jmtm.v16i2.3412.

[14] M. Dehghan dan B. Hashemi, "Iterative solution of fuzzy linear systems," *Appl. Math. Comput.*, vol. 175, no. 1, hal. 645–674, 2006, doi: 10.1016/j.amc.2005.07.033.

[15] R. Munir, *Metode Numerik*. Bandung: Bandung: Penerbit Informatika, 2015.