Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(6) (2024), Pages 274-280
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Rumus Umum Pelabelan L(2,1) pada Graf Koprima Grup Bilangan Bulat Modulo m

Siti Nur Kamila*, Mohammad Nafie Jauhari, Erna Herawati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

nurrkamila17@gmail.com, nafie.jauhari@uin-malang.ac.id

Abstrak

Grup adalah himpunan takkosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Salah satu contoh grup yaitu grup bilangan bulat modulo m. Graf koprima dari grup G adalah graf yang simpulnya merupakan elemen di G dan dua simpul x, y di G yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari orde x dan y relatif prima. Pelabelan $L(2,1)$ memiliki aplikasi penting dalam jaringan telekomunikasi nirkabel, di mana terdapat keterbatasan frekuensi radio yang tersedia dan transmitter yang berdekatan tidak dapat menggunakan frekuensi yang sama. Untuk mengatasi masalah ini, penetapan frekuensi dilakukan menggunakan konsep pelabelan, di mana transmitter disimbolkan sebagai simpul yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Pelabelan $L(2,1)$ adalah teknik pelabelan graf yang memberikan label bilangan bulat non-negatif pada simpul-simpul graf dengan aturan bahwa dua simpul yang terhubung langsung harus memiliki selisih label minimal dua, dan dua simpul yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui rumus umum pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m dan rumus umum nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ tersebut. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan bentuk graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m. Kemudian melabeli setiap simpul dengan aturan pelabelan $L(2,1)$. Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m mempunyai pelabelan $L(2,1)$ dengan $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_m}) = 2p^2$.

Kata kunci: Pelabelan $L(2,1)$; Graf Koprima; Grup Bilangan Bulat Modulo m.

Abstract

Groups are nonempty sets equipped with binary operations and fulfill certain conditions. One example of a group is the group of integers modulo m. A coprime graph of a group G is a graph whose vertices are elements in G and any two vertices x, y in G are directly connected if and only if the greatest common factor (GCD) of the orders x and y are relatively prime. $L(2,1)$ labeling has important applications in wireless telecommunication networks, where there are limited radio frequencies available and adjacent transmitters cannot use the same frequency. To overcome this problem, frequency assignment is done using the concept of labeling, where transmitters are symbolized as vertices connected by edges. $L(2,1)$ labeling is a graph labeling technique that assigns non-negative integer labels to graph vertices with the rule that two directly connected vertices must have a minimum label difference of two, and two vertices that are two apart must have a minimum label difference of one. The purpose of this research is to find out the general formula for the $L(2,1)$ labeling on the coprime graph of the group of integers modulo m and the general formula for the minimum value of the largest label of the $L(2,1)$ labeling. The steps taken in this research are to determine the coprime graph form of the group of integers modulo m. Then label each vertex with a non-negative label. Then label each vertex with $L(2,1)$ labeling rule. From the result of this research, it can be concluded that the coprime graph of integer group modulo m has a $L(2,1)$ labeling with $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

Keywords: $L(2,1)$ Labeling; Coprime Graph; Integer Group Modulo m.

Submitted: 8 2024 Reviewed: 11 Januari 2024 Accepted: 18 Mei 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i6.28426

PENDAHULUAN

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata yang ditulis dengan bahasa simbolik dan topik-topik yang dibahas tersusun dengan rapi[1]. Berbagai cabang ilmu matematika terus berkembang, salah satunya adalah teori graf[2]. Graf merupakan subjek bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki keunikan yang terletak pada kesederhanaan bahasa yang dipelajari. Teori graf dapat diaplikasikan pada berbagai disiplin ilmu seperti biologi, ekonomi, linguistik, teknik informatika, ilmu sosial, ilmu komputer, dan kesehatan[3]. Selain itu, teori graf dapat diterapkan pada cabang matematika di antaranya matematika diskrit dan aljabar abstrak, seperti membangun graf dari grup. Salah satu contoh grup yaitu grup bilangan bulat modulo m yang banyak digunakan dalam kriptografi, koding, dan bidang lainnya.

Konsep graf koprima dikemukakan oleh Sattanathan dan Kala[4] dalam artikelnya tentang orde graf prima dari grup berhingga. Definisi graf koprima dari grup G adalah graf yang simpulnya merupakan elemen di G dan dua simpul x, y di G yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari orde x dan y relatif prima[5]. Adapun penelitian terdahulu mengenai graf koprima dilakukan oleh Ma, dkk, tentang sifat-sifat khusus graf koprima dari grup dihedral. Penelitian lain juga dilakukan oleh Dorbidi[6] tentang bilangan kromatik dan bilangan $clique$ pada graf koprima dari suatu grup. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Shelas & Jasim[7] tentang banyaknya sisi dan tabel orde elemen pada graf koprima dari D_{2n} dengan n adalah perkalian bilangan prima.

Pelabelan pada graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang melibatkan pemberian label berupa bilangan bulat positif pada simpul-simpul atau sisi-sisi graf dengan aturan tertentu yang telah ditetapkan[8]. Terdapat berbagai jenis pelabelan pada graf di antaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan[9]. Salah satu teknik pelabelan adalah pelabelan berdasarkan jaraknya yaitu pelabelan $L(2,1)$ yang merupakan bentuk khusus dari pelabelan $L(d1, d2)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah pemetaan f dari himpunan simpul $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat non negatif, dengan aturan: dua simpul terhubung langsung di $V(G)$ memiliki selisih label minimal dua sedangkan dua simpul yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu[10]. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui rumus umum pelabelan $L(2,1)$ dan nilai minimal label terbesar pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m.

METODE

Tahap Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan oleh penulis untuk melakukan penelitian sebagai berikut:

1. Menentukan orde dari semua elemen di grup $\mathbb{Z}_{2p^2}$,
   orde elemen g dari grup G adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e$.(dalam notasi penjumlahan, bisa ditulis sebagai $ng = 0$)[11].
2. Menentukan faktor persekutuan terbesar dari setiap dua orde elemen di grup $\mathbb{Z}_{2p^2}$,
   faktor persekutuan terbesar dari a dan b adalah bilangan bulat positif terbesar d sehingga $d|a$ dan $d|b$[12].
3. Menentukan sisi dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$,
   Dua simpul x, y di graf G yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari orde x dan y relatif prima.

4. Menentukan pelabelan $L(2,1)$ dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$,

   Pelabelan $L\,(2,1)$ pada graf G adalah pemetaan $f : V(G) \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ sedemikian sehingga jika x, y adalah dua simpul yang berjarak satu di $V(G)$ maka $|f(x) - f(y)| \geq 2$, dan jika jarak antara x dan y adalah 2 maka $|f(x) - f(y)| \geq 1$[13]. Nilai pelabelan $L(2,1)$ dari graf G adalah bilangan terkecil m sedemikian sehingga G mempunyai label $L(2,1)$ dengan label tidak lebih dari m dan dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$[14].

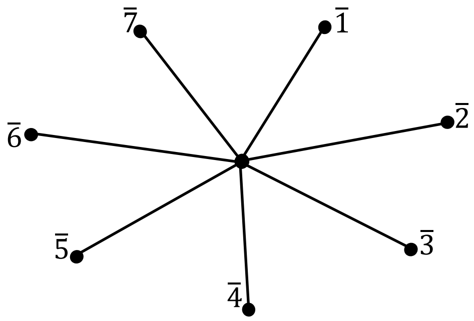
dengan p adalah sebarang bilangan prima.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

Pada bagian ini, akan dipaparkan tentang generalisasi bentuk graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima

a. Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p = 2$



Gambar 1 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p = 2$

b. Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$

   Lemma 1

   Misalkan $A, B, C, D \subseteq \mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ dengan $A = \{p^2\}$, $B = \{2n \mid 1 \leq n \leq p^2 - 1\}$, $C = \{0\}$, dan $D = \{2n + 1 \mid 0 \leq n \leq p^2 - 1\} \setminus \{p^2\}$.

   i. Setiap elemen dari C terhubung langsung dengan semua elemen $\mathbb{Z}_{2p^2}$.
      Misalkan $x \in C$, maka $ord(x) = 1$. Misalkan $y \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ maka $ord(y) > 1$. Dengan demikian diperoleh $FPB\,(1, ord(y)) = 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in C, y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \setminus \{0\}$.

   ii. Setiap elemen dari A terhubung langsung dengan semua elemen dari B
      Misalkan $x \in A$, maka $ord(x) = 2$. Misalkan $y \in B$, maka $ord(y) = p$ atau $ord(y) = p^2$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$.
      Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(y)) = 1$
      Kasus 1, $ord(y) = p$.
      Karena $ord(x) = 2$ dan $ord(y) = p$, maka $FPB(2, p) = 1$.
      Kasus 2, $ord(y) = p^2$.
      Karena $ord(x) = 2$ dan $ord(y) = p^2$, maka $FPB(2, p^2) = 1$.
      Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $FPB(ord(x), ord(y)) = 1$.
      Sehingga dari poin i dan ii diperoleh $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in A, y \in B \cup C$.

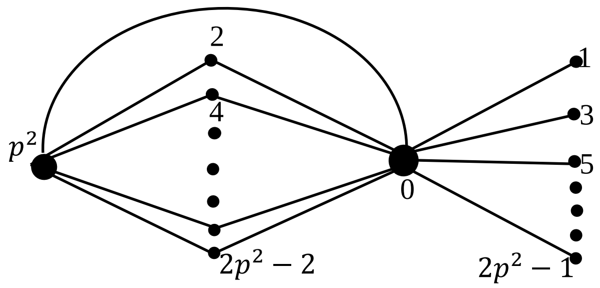
   iii. Setiap elemen dari D hanya terhubung langsung dengan semua elemen dari C

Misalkan $x \in D$, maka $ord(x) = 2p$ atau $ord(x) = 2p^2$. Misalkan $y \in A$, maka $ord(y) = 2$ dan misalkan $z \in B$, maka $ord(z) = p$ atau $ord(z) = p^2$

1. Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(y)) \neq 1$
   Kasus 1, $ord(x) = 2p$
   Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(y) = 2$, maka
   $FPB(2p, 2) \geq 2 \neq 1$.
   Kasus 2, $ord(x) = 2p^2$
   Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(y) = 2$, maka
   $FPB(2p^2, 2) \geq 2 \neq 1$.
   Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa
   $FPB(ord(x), ord(y)) \neq 1$.
   Sehingga diperoleh $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D,\ y \in A$.
2. Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(z)) \neq 1$
   Kasus 1, $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p$
   Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p$, maka
   $FPB(2p, p) \geq p \neq 1$.
   Kasus 2, $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p^2$
   Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p^2$, maka
   $FPB(2p, p^2) \geq p \neq 1$.
   Kasus 3, $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p$
   Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p$, maka
   $FPB(2p^2, p) \geq p \neq 1$.
   Kasus 4, $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p^2$
   Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p^2$, maka
   $FPB(2p^2, p^2) \geq p \neq 1$.
   Dari ke empat kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $FPB(ord(x), ord(z)) \neq 1$, sehingga $\{x, z\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D, z \in B$.

Jadi berdasarkan poin 1 dan 2 diperoleh $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D, y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \backslash \{C\}$.

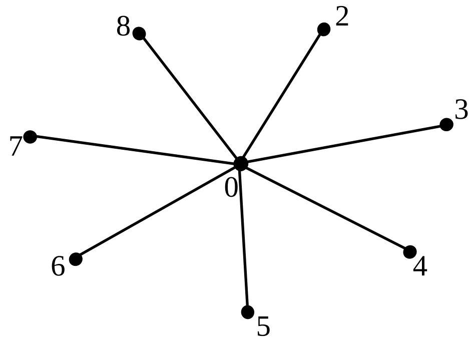
Berdasarkan poin i, ii, dan iii maka graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$ dapat diilustrasikan seperti berikut:



Gambar 2 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$

Pelabelan $L(2,1)$ pada Bentuk Secara Umum Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

a. Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p = 2$



Gambar 3 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p = 2$

Berdasarkan Gambar 3 tersebut, maka diperoleh pemetaan sebagai berikut:
$\bar{0} \mapsto 0$
$\bar{1} \mapsto 2$
$\bar{2} \mapsto 3$
$\bar{3} \mapsto 4$
$\bar{4} \mapsto 5$
$\bar{5} \mapsto 6$
$\bar{6} \mapsto 7$
$\bar{7} \mapsto 8$
Secara umum untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_8$ diperoleh pemetaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 1, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Dari Teorema 4.1[15] diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 8$, untuk $p = 2$

b. Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p \geq 3$

Lemma 2. Misalkan $x \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Pemetaan f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 2, & \bar{0} < x < \overline{p^2} \\ 2, & x = \overline{p^2} \\ x + 1, & \overline{p^2} < x \leq \overline{2p^2 - 1} \end{cases}$$

adalah suatu pelabelan $L(2,1)$.
Bukti.
Domain dari f adalah $\mathbb{Z}_{2p^2} = \left\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{2p^2 - 1}\right\}$. Dari definisi di atas, f memetakan semua unsur domain ke tepat satu bilangan bulat. Dengan demikian f adalah suatu pemetaan.
Adapun syarat untuk pelabelan $L(2,1)$ sebagai berikut:

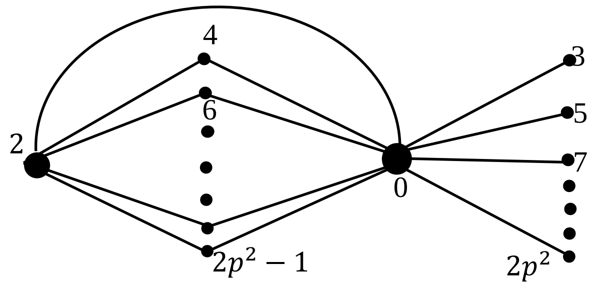
1. Dua simpul yang terhubung langsung harus mempunyai selisih label minimal dua.
   Dari Lemma 1 diperoleh:
   i. $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in C, y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \backslash \{0\}$.
      Sehingga $f(x) = 0$ dan $f(y) \geq 2$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 2$.
   ii. $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in A, y \in B \cup C$.
      Kasus 1, $y \in B$
      Sehingga $f(x) = 2$ dan $f(y) \geq 4$ dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 2$.

Kasus 2, $y \in C$

Dari poin i diperoleh, $|f(x) - f(y)| \geq 2$.

2. Dua simpul yang berjarak dua harus mempunyai selisih label minimal satu.
   Dari Lemma 1 diperoleh:
   i. $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \; \forall \, x \in D, y \in B$.
      Dari Gambar 4.5 diketahui bahwa jarak dari $x \in D$ ke $y \in B$ adalah 2. Sehingga $f(x) \geq 3$ dan $f(y) \geq 4$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 1$.
   ii. $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \; \forall \, x \in D, \; y \in A$.
      Dari Gambar 4.5 diketahui bahwa jarak dari $x \in D$ ke $y \in A$ adalah 2. Sehingga $f(x) \geq 3$ dan $f(y) = 2$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 1$.

Dari poin 1 dan 2 maka dapat disimpulkan bahwa pemetaan f memenuhi kaidah pelabelan $L(2,1)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p \geq 3$ dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p \geq 3$

Lemma 3

Untuk setiap bilangan prima $p \geq 3$ berlaku

$$\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2.$$

Bukti

Dari Lemma 2 diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \leq 2p^2$. Dari Lemma 3.3[16] dan Teorema 4.1[15] diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \geq \lambda_{2,1}(K_{1,2p^2-1}) = 2p^2$. Dengan demikian $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, dapat disimpulkan bahwa pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk p adalah bilangan prima sebagai berikut:

1. Untuk $p = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 1, & \textit{untuk lainnya} \end{cases}$$

2. Untuk $p \geq 3$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=\overline{0} \\ x+2, & \overline{0}<x<\overline{p^2} \\ 2, & x=\overline{p^2} \\ x+1, & \overline{p^2}<x\le\overline{2p^2-1} \end{cases}$$

dengan $x \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ dan $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)=2p^2$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdusysyakir, *Ketika kyai mengajar matematika*. Malang: UIN-Malang Press, 2007.

[2] D. Suryadi and N. Priatna, “Pengantar Dasar Teori Graf,” 2005.

[3] Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press, 2009.

[4] M. Sattanathan and R. Kala, “An Introduction to Order Prime Graph,” *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 4, no. 10, pp. 467–474, 2009.

[5] X. Ma, H. Wei, and L. Yang, “The Coprime graph of a group,” *Int. J. Gr. Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 13–23, 2014.

[6] H. R. Dorbidi, “A note on the coprime graph of a group,” *Int. J. Gr. Theory*, vol. 5, no. 4, pp. 17–22, 2016.

[7] H. B. Shelash and M. Jasim, “Co-prime Graph of Finite Groups,” *Order*, no. April, 2021, doi: 10.13140/RG.2.2.25739.41762.

[8] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & digraphs*. 2010. doi: 10.1201/b19731.

[9] N. Irawati and R. Heri, “Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Complete Graph,” *Matematika*, vol. 13, no. 3, pp. 136–142, 2010.

[10] Z. Shao and R. Solis-Oba, “L (2, 1)-Labelings on the composition of n graphs,” *Theor. Comput. Sci.*, vol. 411, no. 34–36, pp. 3287–3292, 2010, doi: 10.1016/j.tcs.2010.03.013.

[11] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Cengage Learning, 2017.

[12] G. T. Lee, *Abstract Algebra An Introductory Course*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2010. doi: 10.2307/3607096.

[13] S. Fatimah, I. W. Sudarsana, and S. Musdalifah, “Pelabelan L(2,1) Pada Operasi Beberapa Kelas Graf,” *J. Ilm. Mat. Dan Terap.*, vol. 13, no. 2, pp. 73–84, 2016, doi:10.22487/2540766x.2016.v13.i2.7207.

[14] A. Lum, “Upper bounds on the L(2, 1)-labeling number of graphs with maximum degree Δ,” pp. 1–22, 2007.

[15] J. R. Griggs and R. K. Yeh, “Labeling Graphs with a Condition at Distance 2,” vol. 5, no. 4, pp. 586–595, 1992.

[16] Chang, G. J, and D. Kuo, “The L(2, 1)-labeling Problem On Graphs,” vol. 9, no. 2, pp. 309–316, 1996, doi: 10.1137/S0895480193245339.