Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(6) (2024), Pages 289-295
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian Serta Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian

Qurratul Aini Az-Zakiyah*, Intan Nisfulaila

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

qurotulaini2002@gmail.com, i.nisfulaila@uin-malang.ac.id

Abstrak

Modul merupakan struktur aljabar yang dibentuk dari grup Abelian dan ring sebagai skalar. Suatu modul adalah modul Noetherian jika modul memenuhi kondisi rantai naik *(ascending chain condition)* atas submodulnya. Sebuah R-modul M disebut modul hampir Noetherian jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga. Terdapat sebuah kelas baru yakni Modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Simbol r mengacu pada ideal sejati dari ring dengan $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$ Sifat yang akan dikaji adalah sifat rantai naik pada modul r-Noethetian. Selanjutnya, akan dikaji mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur. Adapun tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu diawali dengan melengkapi pembuktian lemma yang berkaitan rantai naik pada Modul r-Noetherian. Selanjutnya, Melengkapi pembuktian proposisi mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir. Sifat rantai naik pada modul r-Noetherian adalah setiap barisan rantai naik dari r-submodul pada modul r-Noetherian akan berhenti pada suatu langkah berhingga. Selanjutnya, keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian adalah saling subset.

Kata kunci: rantai naik; keterkaitan; modul r-Noetherian; modul Noetherian; modul hampir Noetherian.

Abstract

Modules are algebraic structures formed from Abelian groups and rings as scalars. A module is a Noetherian module if it satisfies the ascending chain condition on its submodules. An R-module M is called an almost Noetherian module if every true submodule in M is finitely generated. There is a new class of r-Noetherian modules. Let R be a ring and M an R-module, M is said to be an r-Noetherian module if every r-submodule of M is finitely generated. The symbol r refers to the true ideal of the ring with $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$. The properties to be studied are the ascending chain properties of r-Noethetian modules. Furthermore,, the relationship of r-Noetherian module with Noetherian module and almost Noetherian module will be studied. This research uses a literature study approach. The stages carried out in this study begin with completing the proof of the lemma relating to the ascending chain on the r-Noetherian Module. Furthermore, completing the proof of the proposition regarding the relationship of the r-Noetherian module with the Noetherian module and almost Noetherian module. The property of ascending chain on r-Noetherian module is that every ascending chain line of r-submodules on r-Noetherian module will stop at a finite step. Furthermore, the connection of r-Noetherian module with Noetherian module and almost Noetherian module is mutual subset.

Keywords: ascending chain; linkage; r-Noetherian module; Noetherian module; almost Noetherian module.

PENDAHULUAN

Ring termasuk dalam struktur aljabar paling sederhana setelah grup. Ring adalah suatu himpunan takkosong yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma ring. Ring Noetherian merupakan ring yang didefinisikan

Submitted: 9 Agustus 2023 Reviewed: 4 September 2023 Accepted: 18 Mei 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i6.29590

berdasarkan himpunan ideal berhingga dari suatu ring (Wardhana, 2022). Ideal dari suatu ring diperumum ke dalam struktur aljabar yang dikenal dengan modul.

Modul atas ring R adalah suatu grup abelian terhadap penjumlahan bersamaan dengan pemetaannya yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Diberikan M merupakan himpunan dengan dua operasi dan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang elemennya berupa skalar, maka dinotasikan dengan M: R-modul yakni modul M atas ring R (Wahyuni & dkk, 2016).

Diketahui bahwa R sebagai ring dengan elemen satuan yang memenuhi sifat rantai naik untuk ideal-ideal di dalamnya. Apabila dipandang sebagai R-modul, setiap ideal di ring R dapat dipandang dengan submodul dari R. Dengan demikian, sifat rantai naik juga berlaku pada submodul-submodul di R. Hal inilah yang melatar belakangi pendefinisian sifat rantai naik untuk suatu R-modul M yang selanjutanya melatarbelakangi munculnya definisi modul noetherian (Wahyuni, & dkk, 2021).

Suatu modul dikatakan sebagai modul Noetherian apabila modul tersebut memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul submodulnya di M yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots$, terdapat k bilangan bulat positif, sehingga $N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq N_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq N_{k+n}$ (Wahyuni, & dkk 2021). Selain modul Noetherian terdapat modul hampir Noetherian. Sebuah R-modul M disebut modul hampir Noetherian jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga (Anebri A & dkk, 2021).

Pada pengertian ideal adalah subhimpunan takkosong S dari ring R adalah subring dari R jika S tertutup terhadap operasi pengurangan dan operasi perkalian, yaitu jika a dan b keduanya ada di S maka $a - b$ dan ab ada di S (Gallian, 2016). Sebuah ideal sejati I dalam sebuah ring R disebut sebuah r-ideal, jika $ab \in I$ dengan $Ann\,\langle a \rangle = \langle 0 \rangle$, maka $b \in I$ untuk setiap $a, b \in R$ (Mohamadian, 2015). Simbol r pada r-ideal mengacu pada ideal sejati dari ring dengan $Ann\,\langle a \rangle = \langle 0 \rangle$, bukan sebagai atas ring R karena hal itu sering didefiniskan pada modul atas ring atau biasa dinotasikan sebagai R-modul.

Sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a \rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R, ma \in M$ (Koc & dkk, 2018). Dari pendefinisian r-ideal dan r-submodul dikembangkan pada modul Noetherian. Terdapat sebuah kelas baru yakni Modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga (Anebri A. & dkk, 2021).

Selanjutnya penulis termotivasi untuk melakukan penelitian mengenai modul r-Noetherian. Pada skripsi ini terdapat alur penulisan, langkah-langkah pembuktian serta penyajian hasil disesuaikan dengan tujuan penulisan skripsi dan cara pandang penulis sehingga menjadikan skripsi ini tulisan yang utuh mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian serta keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

Skripsi ini merupakan kajian dari beberapa sumber pustaka. Rujukan utama dari pembahasan skripsi ini adalah jurnal ilmiah yang berjudul "*Commutative Rings and Modules That Are r-Noetherian*" yang ditulis oleh Adam Anebri Najib Mahdou dan Unsal Tekir. Pada artikel tersebut akan dikaji lebih dalam mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian serta keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Pada skripsi ini terdapat alur penulisan, langkah-langkah pembuktian serta penyajian hasil disesuaikan dengan tujuan penulisan skripsi dan cara pandang penulis sehingga menjadikan skripsi ini tulisan yang utuh.

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kualitatif, sebab mengkaji tahapan suatu definisi, teorema dan sifat-sifat dari modul r-Noetherian. Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur atau studi pustaka (*library research*). Studi literatur yakni proses mengumpulkan data maupun informasi dengan mengkaji berbagai macam sumber literatur seperti buku, artikel jurnal, *lecture note* dan lain sebagainya yang membahas mengenai modul r-

Noetherian yang bertujuan untuk dasar acuan atau pendukung dalam penyelesaian masalah penelitian.

Tahapan Penelitian

1. Melengkapi pembuktian lemma yang berkaitan rantai naik pada Modul r-Noetherian yaitu, misalkan M adalah sebuah R-modul r-Noetherian yang dibangkitkan secara berhingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul. Proses pembuktiannya, akan dibuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen. Pertama, M merupakan modul r-Noetherian. Kedua, M memenuhi kondisi maksimal. Ketiga, Setiap submodul di M dibangun secara berhingga.
2. Melengkapi pembuktian proposisi mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Proposisi tersebut adalah misalkan R adalah sebuah ring, maka modul Noetherian ⊆ modul hampir Noetherian ⊆ modul r-Noetherian. Proses pembuktiannya akan terdiri dari dua tahap, yaitu.
   a. Jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian.
   b. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat Rantai Naik Modul r-Noetherian

Lemma 4.1. Misalkan M adalah sebuah R-modul r-Noetherian yang dibangun secara berhingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul (Anebri, A., & Mahdou, N., 2021).

Bukti. Untuk membuktikan R-modul r-Noetherian yang dibangun secara hingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul maka akan dibuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. M merupakan modul r-Noetherian;
2. M memenuhi kondisi maksimal;
3. Setiap submodul di M dibangun secara berhingga.

$(1. \Rightarrow 2.)$ Diketahui bahwa M merupakan modul r-Noetherian yang berarti bahwa memenuhi kondisi rantai naik dalam setiap r-submodulnya. Diambil sebarang submodul dari M, yaitu N dengan $N \neq \emptyset$.

1. Proses ke-1. $N = \langle a_1 \rangle$, maka a_1 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_1 \notin N$ maka terdapat $a_2 \in N$ sedemikian sehigga $a_1 \subset a_2$.
2. Proses ke-2. $N = \langle a_2 \rangle$, maka a_2 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_2 \notin N$ maka terdapat $a_3 \in N$ sedemikian sehigga $a_2 \subset a_3$.
   ⋮
3. Proses ke-n. $N = \langle a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1} \rangle$, maka a_0, a_1 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1} \notin N$ maka terdapat $a_n \in N$ sedemikian sehingga $a_{n-1} \subset a_n$.

Proses dilanjutkan sampai diperoleh salah satu submodul maksimal di dalam N. Oleh karena diketahui M memenuhi kondisi rantai naik pada r-submodulnya, proses pengulangan tersebut akan berhenti pada suatu langkah yang berhingga, misalkan langkah ke-n. Dengan demikian, diperoleh a_n merupakan submodul maksimal di dalam N. Jadi, terbukti bahwa modul M memenuhi kondisi maksimal.

$(2. \Rightarrow 3.)$ Diketahui bahwa modul M memenuhi kondisi maksimal. Akan dibuktikan bahwa setiap submodul di M dibangun secara hingga. Diambil sebarang r-submodul N di M. Dibentuk koleksi submodul-submodul N yang dibangun secara hingga, misalkan himpunan

$$H = \{A \subseteq M \mid A \text{ r} - \text{submodul } N, A \text{ dibangun secara berhingga}\}$$

Jelas bahwa $H \neq \emptyset$ karena $\{0_M\} \in H$. Menurut ketentuan, H mememiliki elemen maksimal, misalkan A^*. Akan ditunjukkan bahwa $A^* = N$. Jelas bahwa, $A^* \subseteq N$ sehingga akan ditunjukkan bahwa $A^* \supseteq N$. Diambil sebarang $x \in N$, maka $A^* + \langle x \rangle$ merupakan submodul di N dan dibangun secara berhingga. Akibatnya, $A^* + \langle x \rangle \in H$. Karena diketahui bahwa A^* merupakan elemen maksimal di dalam H, haruslah $A^* + \langle x \rangle = A^*$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\langle x \rangle \subseteq A^*$. Sehingga, $x \in A^*$. Maka terbukti $N = A^*$, yaitu setiap r-submodulnya di M dibangun secara hingga.
$(3. \Rightarrow 1.)$ Diketahui bahwa setiap submodul di M dibangun secara berhingga. Akan ditunjukkan bahwa M merupakan modul r-Noetherian. Berarti akan ditunjukkan bahwa modul M memenuhi kondisi rantai naik untuk r-submodulnya.
Diambil sebarang rantai naik submodul di M, yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ Diperoleh bahwa $N^* \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, merupakan submodul di M. Karena diketahui bahwa setiap submodul di M dibangun secara hingga, terdapat $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sehingga $N^* = \langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle$. Selanjutnya setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, diperoleh $n_i \in N^*$, sehingga $n_i \in N_{k_i}$ untuk suatu $k_i \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian dipilih bilangan $j = max\,\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Akibatnya, dieroleh $N_{k_i} \subseteq N_j$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jadi, diperoleh $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N_j$ sehingga memenuhi

$$N^* = \langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle \subseteq N_j \subseteq N^*$$

Dengan demikian terbukti bahwa $N^* = N_j$ untuk semua $j \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga memenuhi $N_t = N_j$, untuk setiap bilangan bulat positif $t \geq j$. Sehingga, terbukti bahwa modul M memenuhi kondisi rantai naik untuk submodulnya. Jadi, terbukti bahwa M merupakan modul r-Noetherian.
Pada subbab kedua akan dibahas mengenai hubungan modul r-Noetherian, terhadap modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian.
Selanjutnya akan dibahas mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Dalam pembuktiannya akan dibagi menjadi dua tahap yaitu keterkaitan modul Noetherian dengan modul hampir Noetherian dan keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian

Keterkaitan Modul Noetherian dengan Modul Hampir Noetherian
Proposisi 4.1
Misalkan R adalah sebuah ring, M adalah R-modul dan $R' = \{r \in R | rM \neq M\}$. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah (R')-Noetherian (Faisol & dkk, 2019).
Bukti.
Untuk setiap $r \in R'$ dan setiap submodul N dari M,

$$rN \subseteq rM \subset M.$$

Maka, M adalah modul hampir Noetherian, rN adalah sebuah submodul sejati yang dibangkitkan secara berhingga di M. Sehingga, untuk setiap submodul N dari M terdapat $r \in R'$ dan submodul yang dibangkitkan secara berhingga. $F = rN$ dari M. Sedemikian sehingga,

$$rN \subseteq Fr \subseteq N$$

Jadi, M adalah modul (R')-Noetherian.

Proposisi 4.1 menjelaskan keterkaitan modul Noetherian dengan modul hampir Noetherian yaitu jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian. Selanjutnya akan dibahas keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian.

Keterkaitan Modul Hampir Noetherian dengan Modul r-Noetherian

Proposisi 4.2

Misalkan M adalah modul hampir Noetherian namun bukan Noetherian.

1. Untuk sebarang $x \in R$ maka $xM = 0$ atau $xM = M$.
2. $Ann(M)$ adalah ideal prima dari R dan M adalah modul bebas torsi pada integral domain $R/Ann\ (M)$.

(Armendariz, 1977).

Bukti.

1. Setiap elemen di x dari R menginduksi endomorfisme M melalui perkalian kernelnya,
   Maksud dari menginduksi endomorfisma adalah suatu pemetaan modul ke modul itu sendiri. Misalkan M adalah suatu modul atas ring R dan $\phi : M \to M$ adalah suatu endomorfisma modul. Kernel dari ϕ atau dapat ditulis ker (ϕ) adalah submodul dari M yang terdiri dari semua elemen yang dipetakan ke nol oleh ϕ.
   $$\ker(\phi) = \{m \in M | \phi(m) = 0\}$$
   Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Sedangkan r-submodul adalah sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a\rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R$, $ma \in M$.Simbol r pada r-submodul mengacu pada submodul sejati dari ring dengan $Ann\ \langle a\rangle = \langle 0\rangle$, bukan sebagai atas ring R karena hal itu sering didefiniskan pada modul atas ring atau biasa dinotasikan sebagai R-modul. Sehingga menjadi,
   $$Ann_M(x) = \{u \in M : xu = 0\}$$
   Jika $xM \neq 0$ maka $Ann_M(x) \neq 0$ sehingga $xM \approx M/Ann_M(x)$ bukan merupakan Noetherian. Oleh karena itu, $xM = M$.
2. Sebelum membuktikan akan dikaji mengenai daerah intgral utama.
   Suatu daerah integral dimana setiap idealnya merupakan ideal utama, yaitu idealnya dapat dibangun oleh satu elemen saja, disebut Daerah Ideal Utama (*Principal Ideal Domain*, PID) (Amir, 2008). Artinya utnuk setiap ideal $I \subseteq R$ ada elemen $a \in R$ sehingga $I = (a)$ dimana (a) adalah ideal utama yang dihasilkan oleh a. Ideal utama (a) terdiri dari semua kelipatan a, yaitu
   $$(a) = \{ra | r \in R\}$$
   Salah satu sifat dari PID adalah tidak memiliki elemen pembagi nol, PID adalah domain integral, yang berarti tidak ada dua elemen bukan nol $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.
   Modul torsi pada domain ideal utama (PID) seringkali memiliki struktur yang memungkinkan mereka untuk memenuhi sifat ACC. Misalkan R adalah domain ideal utama dan M adalah modul torsi atas R. Berdasarkan teori struktur modul atas PID, kita tahu bahwa M dapat dinyatakan sebagai penjumlahan langsung dari modul-modul siklik. Oleh karena itu, setiap rantai naik dari submodul-submodul di M akan berhenti pada suatu titik, dan M memiliki ACC pada submodul-submodulnya.
   Berdasarkan penjelasan meneganai daerah ideal utama dan modul torsi hal ini merujuk pada definisi modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Sedangkan r-submodul adalah sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a\rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R$, $ma \in M$.Simbol r pada r-submodul mengacu pada submodul sejati dari ring dengan $Ann\ \langle a\rangle = \langle 0\rangle$. Sehingga diperoleh,

Jika $x, y \in R$ dengan $x \notin Ann(M)$ dan $y \notin Ann(M)$ dengan $xM = M$, maka $M = xyM$. Jadi, $xy \notin Ann(M)$ akan ditunjukkan bahwa $Ann(M)$ adalah ideal dari R. Asumsikan bahwa R domain dan $Ann(M) = 0$. Kemudian untuk $x \in R$ dengan $x \neq 0$ dan $xM = M$. Sehingga, M adalah R-modul yang habis dibagi. Misalkan M tidak bebas torsi, pilih $x \in R$ dengan $x \neq 0$. Sehingga,

$$Ann_M(x) \subseteq Ann_M(x^2) \subseteq \cdots$$

adalah rantai naik submodul di M. Selanjutnya,

$$Ann_M(x) \neq M \text{ dan } {}^{M}/_{Ann_M(x)} \approx M$$

Maka, rantai akan terus naik. Artinya $\bigcup_{i=1}^{\infty} Ann_M(x^i)$ bukan merupakan submodul sejati dari M. Sehingga, $\bigcup_{i=1}^{\infty} Ann_M(x^i) = M$. Oleh karena itu, M adalah modul bebas torsi.

KESIMPULAN

1. Sifat rantai naik pada modul r-Noetherian adalah setiap barisan rantai naik dari r-submodul pada modul r-Noetherian akan berhenti pada suatu langkah berhingga. Artinya, jika diberikan r-submodul $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$, maka terdapat bilangan pulat positif k sehingga $N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq N_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq N_{k+n}$.
2. Keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian adalah saling subset dan dapat ditulis sebagai berikut.
   Modul Noetherian ⊆ Modul Hampir Noetherian ⊆ Modul r-Noetherian.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Andari, A. (2015). *Pengantar Teori Modul*. Universitas Brawijaya Press.

[2] Anebri, A., & Mahdou, N. (2021). *Commutative rings and modules that are r-Noetherian*. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 58(5), 1221-1233.

[3] Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.

[4] Armendariz, E. P. (1977). Rings with an almost Noetherian ring of fractions. *Mathematica Scandinavica*, *41*(1), 15-18.

[5] Bland, Paul. 2011. *Rings and Their Modules*. Berlin: De Gruyter.

[6] Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra.* Vol. 3. Hoboken: Wiley.

[7] Faisol, A., Surodjo, B., & Wahyuni, S. (2019, August). The Relation between Almost Noetherian Module, Almost Finitely Generated Module and T-Noetherian Module. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1306, No. 1, p. 012001). IOP Publishing.

[8] Fitriani. (2013). Ring Noetherian dan Ring Artinian. *Jurnal Sainsmat*,2(1), 79-83.

[9] Gallian, J. A. (2016). *Contemporary Abstract Algebra (ninth edit).* Brooks/Cole Cengage Learning.

[10] Ghoffari, L. H., & Gayatri, M. R. (2023). *Ideal, Gelanggang Faktor Dari Gelanggang Noether*. Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan, 4(1), 31-36.

[11] Gillbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Element of Modern Algebra*. Boston: nelson Education, Ltd.

[12] Gilbert, L. (2014). *Elements of modern algebra*. Cengage Learning.

[13] Grillet, P. A. (2007). *Semisimple Rings and Modules*. Abstract Algebra, 359-392.

[14] Koc, S., & Tekir, Ü. N. S. A. L. (2018). *r-Submodules and sr-Submodules.* Turkish Journal of Mathematics, 42(4), 1863-1876.

[15] Mardiani, D. (2016). Modul dan keujudan basis pada modul bebas. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *5*(3), 195-204.

[16] Martasari, S., Arnawa, I. M., & Bakar, N. (2020). Sifat-sifat Modul Noetherian. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(2), 121-129.

[17] Mohamadian, R. (2015). *r-ideals in commutative rings*. Turkish Journal of Mathematics, 39(5), 733-749.

[18] Wahyuni, S., Wijayant

[19] i, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.Wardhana, I. G. A. W. (2022). *The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring*. JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika), 6(2), 261-267.

[20] Wattimena, E. M., Patty, H. W., Patty, D., & Rahakbauw, D. L. (2022). *Some Necessary and Sufficient Conditions of Comultiplication Module.* Parameter: Jurnal Matematika, Statistika dan Terapannya, 1(2), 79-84.