Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 3(6) (2024), Pages 289-297
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

# Pembentukan Representasi Adjoin pada Aljabar Lie

**Baiq Afifah Zahra Himmawan*, Intan Nisfulaila**

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

baiqafifah5@gmail.com, i.nisfulaila@uin-malang.ac.id

**Abstrak**

Aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang dapat memberikan pemahaman dalam menyelesaikan masalah. Penelitian ini membahas salah satu bentuk aljabar yaitu aljabar Lie. Dimana aljabar Lie $g$ merupakan suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear yang dilengkapi oleh operasi komutator yang biasa disebut dengan operasi *bracket Lie* bernotasikan $[-,-]$ dari $g \times g$ ke $g$ jika memenuhi aksioma anti-simetri dan memenuhi Identitas Jacobi. Salah satu model dari aljabar Lie adalah himpunan semua operator linear dari ruang vektor $V$ yang dinotasikan dengan $gl(V)$. Selain itu, salah satu yang dibahas terkait aljabar Lie pada penelitian ini adalah teori representasi. Aljabar Lie menggunakan teori representasi dengan tujuan untuk menyederhanakan permasalahan aljabar abstrak ke dalam aljabar linear dengan cara mempresentasikan setiap anggotanya ke dalam bentuk pemetaan linear pada ruang vektor. Terdapat berbagai bentuk dari teori representasi pada aljabar Lie salah satunya ialah representasi adjoin. Dan representasi adjoin ini terbentuk dari adanya sebuah derivasi dan homomorfisma Lie. Adapun tujuan dari adanya penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif, Dimana metode tersebut menerapkan sebuah cara untuk mengumpulkan data-data atau bahan pustaka sebagai acuan berupa artikel, jurnal, bahkan buku-buku yang berkaitan dengan penelitian ini.

**Kata kunci:** Aljabar Lie, Representasi, Representasi Adjoin

**Abstract**

Algebra is a branch of mathematics that can provide understanding in solving problems. This research discusses one form of algebra, namely Lie algebra. Where Lie algebra g is a vector space over the field $\mathbb{F}$ equipped with a bilinear mapping equipped by a commutator operation commonly called the Lie bracket operation denoted $[-,-]$ from $g \times g$ to g if it satisfies the anti-symmetry axiom and satisfies Jacobi Identity. One model of Lie algebra is the set of all linear operators of a vector space $V$ denoted by $gl(V)$. In addition, one of the discussions related to Lie algebra in this research is representation theory. Lie algebra uses representation theory with the aim of simplifying abstract algebraic problems into linear algebra by presenting each of its members in the form of linear mappings on vector spaces. There are various forms of representation theory in Lie algebra, one of which is adjoin representation. And this adjoin representation is formed from a derivation and Lie homomorphism. The purpose of this research is to find out how the formation of adjoin representation on Lie algebra. This research uses a qualitative method, where the method applies a way to collect data or library materials as a reference in the form of articles, journals, and even books related to Lie algebra.

**Keywords:** Lie algebra, Representation, Adjoin Representation.

## PENDAHULUAN

Aljabar adalah salah satu bagian dari ilmu matematika yang banyak dikembangkan dan di dalamnya mencakup bilangan, kuantitas, relasi, dan fungsi (Watson, 2007). Banyak ilmu yang dipelajari dalam bidang aljabar dan aljabar abstrak merupakan salah satu ilmu yang dipelajari dalam bidang aljabar tersebut. Materi aljabar abstrak digunakan untuk mempelajari struktur-

Submitted: 9 Agustus 2023 Reviewed: 4 September 2023 Accepted: 18 Mei 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v3i6.29590

struktur aljabar yang lebih kompleks seperti grup, ring, lapangan, bahkan ruang vektor. Di dalam itu, struktur aljabar telah menekankan pada konsep-konsep matematika yang ada, dengan tujuan menemukan pola umum, hubungan, serta sifat-sifat yang berlaku dari berbagai struktur matematika (Dummit & M.Foote, 2004).

Aljabar Lie merupakan salah satu cabang ilmu aljabar yang menggunakan struktur aljabar dengan operasi komutator yang khusus sehingga terdapat perbedaan antara aljabar Lie dengan aljabar lainnya. Pada tahun 1930-an, nama aljabar Lie ini telah diberikan oleh Hermann Weyl. Shopus Lie yang merupakan matematikawan yang berasal dari Norwegia mulai memperkenalkan aljabar Lie ini pada akhir abad ke-19. Pada awalnya aljabar Lie ini diperkenalkan dengan tujuan mengkaji konsep grup transformasi kontinu yang dapat disebut grup Lie sehingga akhirnya dikembangkan menjadi aljabar Lie, dimana aljabar Lie merupakan salah satu materi yang berperan penting pada ilmu matematika (Fuchs, Kisil & Onishchik, 1994). Merujuk ke dalam aljabar Lie, penulisan simbol dengan arti tertentu biasanya digunakan huruf kecil dengan tema font *Gothic (Fraktur)* seperti g dan . Aljabar Lie yang real maupun kompleks berdimensi hingga pada ruang vektor g atas lapangan $\mathbb{F}$ dilengkapi menggunakan pemetaan bilinear yang dilengkapi oleh operasi komutator dan biasa disebut dengan operasi *bracket Lie* bernotasikan $[-,-]$ dari g $\times$ g ke g. Operasi *bracket Lie* ini harus memenuhi aksioma anti-simetri dan memenuhi Identitas Jacobi.

Representasi adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari bagaimana cara elemen-elemen suatu struktur aljabar direpresentasikan melalui objek-objek matematika lainnya, sehingga struktur aljabar melalui objek-objek matematika tersebut dapat lebih mudah dipahami. Dalam ilmu aljabar, representasi sangat berkaitan dengan pemetaan bahkan homomorfisma antara struktur aljabar. Misalnya dalam representasi grup terdapat cara bagaimana grup tersebut direpresentasikan melalui matriks, transformasi linear, atau objek-objek aljabar lainnya (James & Liebeck, 2001). Selain itu representasi dapat diterapkan dalam berbagai cabang matematika seperti ring, modul dan aljabar lainnya.

Representasi pada aljabar Lie adalah suatu ilmu yang dipelajari untuk menyederhanakan permasalahan aljabar abstrak ke dalam aljabar linear. Istilah representasi aljabar Lie didapatkan dari homomorfisma Lie yang memetakan sebarang aljabar Lie g ke $gl(V)$. Dan representasi aljabar Lie ini menjelaskan bahwa setiap elemen dari sebarang aljabar Lie akan dibentuk ke dalam pemetaan linear pada ruang vektor (Assal, 2014).

Representasi yang dimiliki oleh aljabar Lie salah satunya adalah representasi adjoin. Representasi adjoin ini dibentuk oleh homomorfisma Lie yang biasa didefinisikan dengan $ad$(g) : g $\rightarrow$ g. Konsep pengkajian dalam penelitian ini sebenarnya didapatkan berdasarkan penelitian yang sudah ada sebelumnya. Namun terdapat perbedaan alur dalam membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie dengan penelitian sebelumnya. Penelitian ini menggunakan ruang vektor sebagai konsep dalam membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie, sedangkan penelitian sebelumnya menggunakan konsep grup seperti homomorfisma grup, Lie grup dalam pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie. Disamping itu, penelitian ini akan menjabarkan konsep-konsep yang belum diberikan pada penelitian sebelumnya seperti pembuktian teorema, dan lain sebagainya.

Alasan dari pentingnya pengkajian penelitian mengenai teori representasi ini adalah berdasar pernyataan dalam karya dari Karin Erdmann, yang merupakan seorang Matematikawan Oxford spresialis bidang aljabar yaitu teori representasi. Berikut adalah pernyataannya, “Secara kasar, teori representasi menyelidiki bagaimana sistem aljabar dapat bertindak pada ruang vektor. Ketika ruang vektor berdimensi-hingga, ini memungkinkan seseorang untuk secara eksplisit mengekspresikan elemen sistem aljabar dengan matriks, maka seseorang dapat memanfaatkan aljabar linear untuk mempelajari ‘abstrak’ sistem aljabar. dengan cara ini seseorang dapat mempelajari simetri, melalui aksi grup. Seseorang juga dapat mempelajari proses yang tidak dapat diubah. Aljabar dan representasinya memberikan kerangka alami untuk ini.” (Erdmann & Holm, 2018)

.

## METODE PENELITIAN

### *Data dan Sumber Data*

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan cara studi literatur. Studi literatur ini adalah sebuah cara untuk mengumpulkan data-data atau bahan pustaka sebagai acuan penelitian berupa artikel, jurnal, *lecture note*, bahkan buku-buku yang berkaitan pada penelitian ini. Sedangkan deskriptif kualitatif merupakan sebuah rancangan kegiatan dengan tujuan memperoleh data yang hasilnya bersifat naratif. Pada penelitian ini, peneliti membahas dari hal-hal yang *general* menuju ke khusus. Acuan dalam penelitian ini adalah pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie.

### *Tahapan Penelitian*

1. Membuktikan lemma yang membahas tentang pembentukan sifat aljabar Lie dan teorema mengenai sifat-sifat yang dimiliki oleh aljabar Lie.
2. Membuktikan proposisi yang menyatakan bahwa homomorfisma Lie telah memenuhi aksioma aljabar Lie, dan pembuktian teorema yang menyatakan bahwa representasi aljabar Lie g merupakan homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear.
3. Membuktikan lemma yang menunjukkan bahwa derivasi $V$ bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie*.
4. Membuktikan teorema yang menyatakan bahwa pemetaan adjoin merupakan derivasi dari aljabar Lie. Selain itu juga ditunjukkan pembuktian teorema yang menyatakan bahwa pemetaan adjoin juga merupakan sebuah homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear atau diistilahkan dengan representasi aljabar Lie. Dan diberikan hasil akhir berupa pembuktian proposisi yang menyatakan bahwa representasi adjoin pada aljabar Lie terbentuk dari representasi aljabar Lie g yang memetakan g ke derivasi g.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini diberikan jawaban atas rumusan masalah mengenai pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dari berbagai pembuktian teorema, lemma bahkan proposisi.

### 1.1 Aljabar Lie g

Terdapat sajian satu mengenai aljabar Lie beserta satu teorema mengenai sifat-sifat aljabar Lie g. Lemma 4.1.1 ini diberikan karena berkaitan dengan teorema selanjutnya sehingga dapat mempermudah penyelesaian pembuktian pada Teorema 4.1.2.

**Lemma 4.1.1**

Misalkan g merupakan aljabar Lie dan diperoleh $[\mathbf{v}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$,
untuk semua $\mathbf{v} \in$ g (Erdmann & Wildon, 2006).

**Bukti:**

Penyelesaian pembuktian dari lemma ini dapat disesuaikan dengan pembuktian dari teorema ruang vektor pada kajian teori. Disamping itu berdasarkan aksioma **(L2)** dari definisi aljabar Lie, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] && \text{(Aksioma } \mathbf{(L2)} \text{ pada aljabar Lie)} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{0}] && \text{(Distributif)} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{v}, \mathbf{0}] \end{aligned}$$

$= \mathbf{0} + [\mathbf{v}, \mathbf{0}]$

$= [\mathbf{v}, \mathbf{0}]$

dan juga diperoleh
$\mathbf{0} = [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
$= [\mathbf{v} + \mathbf{0}, \mathbf{v}]$
$= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$
$= \mathbf{0} + [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$
$= [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$.
Jadi terbukti bahwa $[\mathbf{v}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$.

Selanjutnya diberikan teorema yang memberikan sifat-sifat aljabar Lie yaitu Teorema 4.1.2 di bawah ini.

**Teorema 4.1.2**
Diberikan suatu aljabar Lie yang berlaku,
1. $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$, untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathrm{g}$
2. $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \mathbf{0}$, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathrm{g}$
3. $[\mathbf{x}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathrm{g}$ (Hall, 2005).

**Bukti:**

1. Berdasarkan aksioma **(L2')** pada definisi aljabar Lie, maka untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathrm{g}$ diperoleh $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= -[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \\ [\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= -[\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{x}] \\ [\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= \mathbf{0} \\ 2[\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= \mathbf{0} \qquad \text{(Membagi kedua sisi persamaan dengan 2)} \\ [\mathbf{x}, \mathbf{x}] &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Sehingga untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathrm{g}$, berlaku $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$.

2. Dari aksioma **(L2')** dan **(L3)** pada definisi aljabar Lie, diperoleh

$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$ (Aksioma **(L3)** pada aljabat Lie)
- $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = -[\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]]$ (Memenuhi sifat anti-simetri)
- $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \mathbf{0}$.

### 1.2 *Representasi Aljabar Lie* g *dari Homomorfisma Lie* g

Setelah disajikan mengenai teorema, lemma dari aljabar Lie, maka pada bagian ini akan disajikan pembuktian proposisi dan teorema mengenai representasi aljabar Lie g yang berkaitan dengan homomorfisma Lie.

**Proposisi 4.2.1**
Jika g merupakan aljabar Lie dan ditunjukkan bahwa
$\pi: \mathrm{g} \to gl(\mathrm{g})$
$\mathbf{x} \mapsto \pi_{[\mathrm{x,y}]}(\mathbf{z}) = [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}]$

kemudian $\pi_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} = \pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}} - \pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}} = [\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}]$, maka $\pi$: g → $gl$(g) merupakan homomorfisma Lie yang memenuhi Identitas Jacobi dengan menggunakan definisi komutator (Hall, 2015).

**Bukti:**

Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $\pi$: g → $gl$(g) memenuhi aksioma Identitas Jacobi. Perhatikan bahwa

$\pi_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(\mathbf{z}) = [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}]$

Sedangkan $[\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}](\mathbf{z}) = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$ sehingga diperoleh

$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$.

Karena $[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$, maka pemetaan tersebut telah terbukti memenuhi aksioma Identitas Jacobi.

Setelah ditunjukkan bahwa homomorfisma telah memenuhi aksioma aljabar Lie yaitu Identitas Jacobi pada Proposisi 4.2.1, kemudian akan ditunjukkan bahwa representasi aljabar Lie g merupakan homomorfisma Lie dengan menggunakan pemetaan linear pada Teorema 4.2.2 berikut.

**Teorema 4.2.2**

Jika homomorfisma Lie didefinisikan dengan $\pi$: g → $gl(V)$, maka dapat disebut dengan representasi aljabar Lie g atas $V$ (Hall, 2015).

**Bukti:**

Akan dibuktikan bahwa pemetaan $\pi$ merupakan suatu homomorfisma Lie.

1. Sebelumnya dikarenakan representasi aljabar Lie g menggunakan pemetaan linear, maka akan dibuktikan bahwa $\pi$ merupakan pemetaan linear sesuai sifat *homogenity* pada definisi pemetaan linear. Sehingga $\pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\pi(\mathbf{x}) + \beta\pi(\mathbf{y})$ untuk setiap $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in$ g dan $\alpha$, $\beta$ merupakan skalar. Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{v}) = \pi_{(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})}(\mathbf{v})\\
&= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\mathbf{v}\\
&= (\alpha\mathbf{x})\mathbf{v} + (\beta\mathbf{y})\mathbf{v}\\
&= \alpha(\mathbf{xv}) + \beta(\mathbf{yv})\\
&= \alpha\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) + \beta\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})\\
&= (\alpha\pi_{\mathbf{x}} + \beta\pi_{\mathbf{y}})(\mathbf{v})\\
&= (\alpha\pi(\mathbf{x}) + \beta\pi(\mathbf{y}))(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Jadi $\pi$ terbukti merupakan pemetaan linear.

2. Akan dibuktikan bahwa $\pi$ merupakan suatu homomorfisma Lie sesuai definisi homomorfisma Lie. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in$ g dan untuk setiap $\mathbf{v} \in V$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi([\mathbf{x}, \mathbf{y}])(\mathbf{v}) &= \pi([\mathbf{x},\mathbf{y}])(\mathbf{v})\\
&= ([\mathbf{x}, \mathbf{y}])\mathbf{v}\\
&= (\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx})\boldsymbol{v} && \text{(Definisi Komutator)}\\
&= (\mathbf{xy})\mathbf{v} - (\mathbf{yx})\mathbf{v} && \text{(Sifat Distributif)}\\
&= \pi_{(xy)}(\boldsymbol{v}) - \pi_{(yx)}(\boldsymbol{v})\\
&= (\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}})(\mathbf{v}) - (\pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}})(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$= (\pi_x\pi_y - \pi_y\pi_x)(\mathbf{v})$$

$$= ([\pi_x, \pi_y])(\mathbf{v})$$

$$= ([\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})])(\mathbf{v}).$$

Jadi $\pi$ terbukti merupakan homomorfisma Lie.

Karena pemetaan $\pi$: g → $gl(V)$ telah memenuhi syarat definisi representasi aljabar Lie g adalah sebuah homomorfisma Lie dan pemetaan tersebut menggunakan pemetaan linear, maka dapat dikatakan bahwa $\pi$ adalah representasi aljabar Lie g atas $V$.

### 1.3 *Derivasi* g

Sebelum membahas representasi adjoin akan diberikan lemma dari teori yang melatarbelakangi pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie yaitu derivasi g. Pada Lemma 4.3.1 berikut, ditunjukkan bahwa derivasi $V$ bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie* (operasi komutator aljabar Lie).

**Lemma 4.3.1**
Jika $D$ dan $E$ merupakan derivasi dari $V$ atas lapangan $\mathbb{F}$, maka operasi *bracket Lie* yang dinotasikan dengan $[D, E]$ yang menggunakan definisi komutator, didefinisikan dengan $[D, E] = DE - ED$ juga merupakan derivasi dari $V$ (Erdmann & Wildon, 2006).
**Bukti:**
Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $[D, E] = DE - ED$ merupakan operator linear dari $V$ ke $V$. Ambil sebarang $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$. Maka diperoleh,
$[D, E](\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = (DE - ED)(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$
$= (DE)(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) - (ED)(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)$
$= D(E(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2)) - E(D(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2))$
$= D(E(\alpha\mathbf{x}_1) + E(\beta\mathbf{x}_2)) - E(D(\alpha\mathbf{x}_1) + D(\beta\mathbf{x}_2))$
$= D(E(\alpha\mathbf{x}_1)) + D(E(\beta\mathbf{x}_2)) - E(D(\alpha\mathbf{x}_1)) - E(D(\beta\mathbf{x}_2))$
$= D(\alpha E(\mathbf{x}_1)) + D(\beta E(\mathbf{x}_2)) - E(\alpha D(\mathbf{x}_1)) - E(\beta D(\mathbf{x}_2))$
$= \alpha D(E(\mathbf{x}_1)) + \beta D(E(\mathbf{x}_2)) - \alpha E(D(\mathbf{x}_1)) - \beta E(D(\mathbf{x}_2))$
$= \alpha(DE)(\mathbf{x}_1) + \beta(DE)(\mathbf{x}_2) - \alpha(ED)(\mathbf{x}_1) - \beta(ED)(\mathbf{x}_2)$
$= \alpha(DE)(\mathbf{x}_1) - \alpha(ED)(\mathbf{x}_1) + \beta(DE)(\mathbf{x}_2) - \beta(ED)(\mathbf{x}_2)$
$= \alpha((DE)(\mathbf{x}_1) - (ED)(\mathbf{x}_1)) + \beta(DE)(\mathbf{x}_2) - (ED)(\mathbf{x}_2))$
$= \alpha(DE - ED)(\mathbf{x}_1) + \beta(DE - ED)(\mathbf{x}_2)$
$= \alpha[D, E](\mathbf{x}_1) + \beta[D, E](\mathbf{x}_2).$
Setelah ditunjukkan bahwa $[D, E]$ merupakan operator linear, kemudian akan dibuktikan $[D, E]$ merupakan sebuah derivasi $V$ berdasarkan definisi derivasi untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.
$[D, E](\mathbf{ab}) = (DE)(\mathbf{ab}) - (ED)(\mathbf{ab})$
$= D(\mathbf{a}E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{a})\mathbf{b}) - E(\mathbf{a}D(\mathbf{b}) + D(\mathbf{a})\mathbf{b})$
$= D(\mathbf{a}E(\mathbf{b})) + D(E(\mathbf{a})\mathbf{b}) - E(\mathbf{a}D(\mathbf{b})) - E(D(\mathbf{a})\mathbf{b})$
$= \mathbf{a}D(E(\mathbf{b})) + D(\mathbf{a})E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{a})D(\mathbf{b}) + D(E(\mathbf{a}))\mathbf{b} - \mathbf{a}E(D(\mathbf{b}))$
$- E(\mathbf{a})D(\mathbf{b}) - D(\mathbf{a})E(\mathbf{b}) - E(D(\mathbf{a}))\mathbf{b}$
$= \mathbf{a}D(E(\mathbf{b})) + D(E(\mathbf{a}))\mathbf{b} - \mathbf{a}E(D(\mathbf{b})) - E(D(\mathbf{a}))\mathbf{b}$
$= \mathbf{a}[D, E](\mathbf{b}) + [D, E](\mathbf{a})\mathbf{b}.$
Jadi $[D, E](\mathbf{ab}) = \mathbf{a}[D, E](\mathbf{b}) + [D, E](\mathbf{a})\mathbf{b} \in Der(V)$ sehingga terbukti bahwa $[D, E]$

merupakan derivasi $V$.
Dapat dilihat pada Lemma 4.3.1 ini bahwa untuk setiap $D, E \in Der(V)$ berlaku $[D, E] \in Der(V)$ sehingga dapat dikatakan bahwa $Der(V)$ bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie* (operasi komutator aljabar Lie).

### *1.4 Representasi Adjoin pada Aljabar Lie*

Setelah membahas derivasi, selanjutnya diberikan pembahasan dari inti dari penelitian ini yaitu terbentuknya representasi adjoin. Terdapat sebuah teorema yang mengatakan bahwa pemetaan adjoin adalah derivasi dari aljabar Lie g yang dinyatakan pada Teorema berikut.

**Teorema 4.4.1**
Pemetaan adjoin merupakan derivasi dari g yang dapat disebut dengan *inner derivation* (Hall, 2015).
**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa sebuah pemetaan adjoin $ad$ yang didefinisikan
$ad$: g → g
$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathrm{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$
merupakan derivasi dari g. Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in$ g, maka berlaku

$$\begin{aligned} ad_{\mathrm{x}}([\mathbf{y}, \mathbf{z}]) &= [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] \\ &= [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]] && \text{(Identitas Jacobi)} \\ &= -[\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] && \text{(Anti-simetri)} \\ &= [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]] \\ &= [ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{z})] && \text{(Operator Adjugasi)} \\ &= [\mathbf{y}, ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{z})] + [ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{z}]. && \text{(Derivasi)} \end{aligned}$$

Karena $ad_{\mathrm{x}}([\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = [\mathbf{y}, ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{z})] + [ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{z}]$ telah memenuhi definisi derivasi, jadi terbukti bahwa pemetaan adjoin $ad_{\mathrm{x}}$ merupakan derivasi dari g. Dapat juga dikatakan bahwa $ad_{\mathrm{x}}$ merupakan elemen dari $Der$(g) yang merupakan himpunan semua derivasi dari g.

Pada Teorema 4.4.2 ini, terdapat pembahasan bahwa representasi adjoin tidak hanya merupakan derivasi, melainkan juga merupakan sebuah homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear.

**Teorema 4.4.2**
Pemetaan adjoin $ad$ merupakan sebuah homomorfisma Lie (Erdmann & Wildon, 2006).
**Bukti:**
Akan ditunjukkan bahwa pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie.
Misalkan g merupakan aljabar Lie, didefinisikan pemetaan
$ad$: g → $gl$(g)
dengan $ad_{[\mathrm{x,y}]}(\mathbf{z}) = [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}]$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in$ g. Untuk menunjukkan $ad$ merupakan homomorfisma Lie, maka perlu ditunjukkan
$ad([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = ad_{\mathrm{x}}ad_{\mathrm{y}} - ad_{\mathrm{y}}ad_{\mathrm{x}}$
Ambil sebarang $\mathbf{z} \in$ g, sehingga diperoleh

$ad[\mathbf{x},\mathbf{y}](\mathbf{z})$ = $[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$

= $[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] + [\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]]$ (Identitas Jacobi)

= $(ad\mathbf{x})([\mathbf{y},\mathbf{z}]) + (ad\mathbf{y})([\mathbf{z},\mathbf{x}])$ (Operator Adjugasi)

= $(ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(z) - (ad\ \mathbf{y})([\mathbf{x},\mathbf{z}])$ (Antri-Simetri)

= $(ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (ad\mathbf{y})(ad\mathbf{x})(\mathbf{z})$.

Karena $(ad[\mathbf{x},\ \mathbf{y}]) = (ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (ad\mathbf{y})(ad\mathbf{x})(\mathbf{z})$, maka dari itu terbukti bahwa pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie.

Setelah diberikan pembahasan pada Teorema 4.4.1 dan Teorema 4.4.2, kemudian didapatkan sebuah proposisi representasi adjoin pada aljabar Lie yang menggunakan konsep derivasi dengan mengambil pemetaan adjoin sebagai anggota dari $Der$(g) dan pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie.

**Proposisi 4.4.3**

Diberikan aljabar Lie g atas ruang vektor $V$ berdimensi hingga. Pemetaan $ad$ dari g ke $Der$(g) yang didefinisikan oleh

$ad$: g $\rightarrow Der$(g)

$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{y}) = [\mathbf{x},\mathbf{y}]$

untuk setiap $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in$ g merupakan representasi aljabar Lie g yang disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie (Hall, 2015).

**Bukti:**

1. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $ad$ merupakan pemetaan linear $ad(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha ad(\mathbf{x}) + \beta ad(\mathbf{y})$. Ambil sebarang $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in$ g, diperoleh

$ad(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{z}) = ad_{(\alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{y})}(\mathbf{z})$

$= [\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},\mathbf{z}]$

$= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$

$= \alpha\mathbf{x}(\mathbf{z}) + \beta\mathbf{y}(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})\alpha\mathbf{x} - (\mathbf{z})\beta\mathbf{y}$

$= (\alpha\mathbf{x}(z) - (z)\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{y}(z) - (z)\beta\mathbf{y})$

$= [\alpha\mathbf{x},\mathbf{z}] + [\beta\mathbf{y},\mathbf{z}]$

$= \alpha[\mathbf{x},\mathbf{z}] + \beta[\mathbf{y},\mathbf{z}]$

$= \alpha ad\mathbf{x}(\mathbf{z}) + \beta ad\mathbf{y}(\mathbf{z})$

$= (\alpha ad_{\mathrm{x}} + \beta ad_{\mathrm{y}})(\mathbf{z})$

$= (\alpha ad(\mathbf{x}) + \beta ad(\mathbf{y}))(\mathbf{z})$.

Sehingga terbukti bahwa pemetaan $ad$ merupakan pemetaan linear

2. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $ad$ merupakan homomorfisma Lie. Ambil sebarang $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in$ g, sehingga diperoleh

$ad([\mathbf{x},\mathbf{y}])(\mathbf{z}) = ad_{([\mathrm{x},\mathrm{y}])}(\mathbf{z})$

$= [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$

$= -[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]]$

$= -[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}] - [\mathbf{x},[\mathbf{z},\mathbf{y}]]$

$= [\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]] + [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]]$

$= [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]]$

$= ad_{\mathrm{x}}\ (ad_{\mathrm{y}}(\mathbf{z})) - ad_{\mathrm{y}}(ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{z}))$

$= (ad_{\mathrm{x}}ad_{\mathrm{y}})(\mathbf{z}) - (ad_{\mathrm{y}}ad_{\mathrm{x}})(\mathbf{z})$

$= (ad_{\mathrm{x}}ad_{\mathrm{y}} - ad_{\mathrm{y}}ad_{\mathrm{x}})(\mathbf{z})$

= $([ad_{\mathbf{x}}, ad_{\mathbf{y}}])(\mathbf{z})$
= $([ad(\mathbf{x}), ad(\mathbf{y})])(\mathbf{z})$.
Jadi pemetaan $ad$ terbukti merupakan homomorfisma Lie. Selain itu dapat dikatakan bahwa pemetaan $ad$ merupakan representasi aljabar Lie g atas g yang dapat disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie.

**KESIMPULAN**

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, maka dapat disimpulkan bahwa representasi adjoin pada aljabar Lie dapat dibentuk dari sebuah homomorfisma Lie yang merupakan sebuah pemetaan yang memenuhi aksioma aljabar Lie. Homomorfisma Lie itu dapat disebut dengan representasi aljabar Lie. Selain itu, representasi adjoin ini juga dapat dibentuk dari sebuah derivasi g. Sehingga representasi adjoin pada aljabar Lie ini merupakan sebuah gabungan dari suatu homomorfisma Lie dan derivasi g. Dan diketahui bahwa representasi adjoin ini merupakan salah satu representasi yang dimiliki oleh aljabar Lie sehingga dapat disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Assal, F. A. (2014). Invitation to Lie Algebras and Representations. https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/A1Assal.pdf, diakses pada 25 Januari 2024.

[2] Dummit, D D., & M. Foote, R. (2004). Abstract Algebra. Burlington: John Wiley $ Sond, Inc,1-17.

[3] Fuchs, J., Kisil, V. V., & Onishchik, A. L. (1994). The Shopus Lie Memories Collection.

[4] InggrisL Aschehoug, AS, 3-4.

[5] Erdmann, K., & Holm, T. (2018). Algebras and Representation Theory. USA: Springer, 1-2.

[6] Erdmann, K., & Wildon. M. J. (2006). Introduction to Lie Algebras. USA: Springer, 2-6.

[7] Hall, B. (2015). Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. USA: Springer, 49-52.

[8] Michiel, H. (2004) Algebras, Ring and Modules. USA: Springer, 3-5.

[9] Watson, A. (2007). Key Understanding in Mathematics Learning. Inggris: University of Oxfort, 3-5