Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 4(1) (2024), Pages 10-17
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Kekonvergenan Norma Hasil Bagi dan Kekontinuan Seminorma

Dwi Ajeng Rosmaya*, Dian Maharani

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

dwirosmaya@gmail.com*, dian.maharani@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Misalkan terdapat ruang vektor atas lapangan bilangan riil atau kompleks. Suatu fungsi dikatakan seminorma pada ruang vektor jika memenuhi kondisi pada seminorma. Seminorma merupakan perumuman dari norma. Norma hasil bagi didefinisikan pada ruang hasil bagi dari ruang bernorma dengan subruang tertutup, di mana sifat kekonvergenan norma hasil bagi ditinjau melalui konvergensi barisan dalam ruang bernorma. Tujuan penelitian ini yaitu membahas terkait sifat konvergen pada norma hasil bagi dan pada seminorma hanya akan dibahas mengenai sifat konveks, penyerapan, dan seimbang, kekontinuan seminorma, serta hubungan seminorma dan norma. Sifat kekonvergenan pada norma hasil bagi adalah suatu barisan akan konvergen di ruang hasil bagi jika dan hanya jika terdapat barisan di subruang tertutup dalam ruang bernorma sedemikian sehingga konvergen di ruang bernorma. Kemudian, sifat pada seminorma yaitu suatu seminorma di ruang vektor memenuhi sifat konveks, penyerapan dan seimbang, seminorma pada ruang bernorma akan kontinu di ruang bernorma dan suatu seminorma yang dibentuk oleh suatu pemetaan linier.

Kata kunci: Ruang Hasil Bagi; Norma Hasil Bagi; Seminorma

Abstract

Consider a vector space over the field of real or complex numbers. A function is said to be a seminorm on a vector space if it satisfies the conditions of a seminorm. A seminorm is a generalization of a norm. The quotient norm is defined on the quotient space formed from a normed space with a closed subspace, where the convergence property of the quotient norm is examined through the convergence of sequences in the normed space. This study aims to explore the convergence properties of the quotient norm and, regarding seminorms, to examine properties of convexity, absorption, and balance, the continuity of seminorms, as well as the relationship between seminorms and norms. The convergence property of the quotient norm indicates that a sequence will converge in the quotient space if and only if there exists a sequence in the closed subspace in the normed space such that it converges in the normed space. Furthermore, a seminorm on a vector space satisfies properties of convexity, absorption, and balance; a seminorm on a normed space will be continuous in that normed space and is formed by a linear mapping.

Keywords: Quotient Space; Qoutient Norm; Seminorm

PENDAHULUAN

Ruang bernorma adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) yang dilengkapi dengan fungsi norma, yang dinotasikan dengan $\|\cdot\|$ atau dapat dinotasikan dengan $\|\cdot\|_X$ untuk norma pada X [1]. Fungsi dari bilangan riil yang memetakan ruang vektor X ke dalam $\mathbb{R}$ adalah norma pada X jika untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, memenuhi kondisi ruang bernorma yaitu terdefinisi positif, homogen dan ketaksamaan segitiga [2].

Suatu himpunan tak kosong V dalam ruang vektor X disebut subruang dari X jika $x + y$, $\alpha x \in V$, di mana $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ [3]. Misalkan Y adalah subruang dari ruang vektor X. Koset dari $x \in X$ atas Y dinotasikan sebagai $x + Y$ dan didefinisikan sebagai himpunan

Submitted: 5 Maret 2024 Reviewed: 13 Mei 2024 Accepted: 16 September 2024
Doi: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v4i1.29995

$$x + Y = \{v \in X \mid v = x + y, y \in Y\}$$

Koset-koset di atas membentuk partisi dalam ruang vektor. Untuk $w, x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ didiefinisikan operasi aljabar berikut.

$$(w + Y) + (x + Y) = (w + x) + Y$$
$$\alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$

Koset-koset yang memenuhi dua operasi tersebut membentuk sebuah ruang vektor. Ruang ini disebut ruang hasil bagi (atau ruang faktor) atas X oleh Y (atau modulo Y) dan dinotasikan sebagai X/Y. Serta, dimensi dari ruang tersebut disebut Kodimensi dari Y dan dinotasikan sebagai *codim* Y, ditulis sebagai

$$codim\, Y = \dim(X/Y) \text{ [4]}.$$

Berkaitan dengan hal tersebut dalam ruang bernorma juga terdapat ruang hasil bagi yang disebut norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi. Misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan Y merupakan subruang tertutup dari X, untuk $x \in X$ didefinisikan norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi X/Y sebagai

$$|||x + Y||| = \inf\{\|z\|: z \in x + Y\} = \inf\{\|x + y\|: y \in Y\} \text{ [5]}$$

Selain itu, fungsi yang memetakan ruang vektor X ke dalam $\mathbb{R}$ disebut juga sebagai seminorma jika untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi kondisi pada seminorma. Seminorma l merupakan sebuah norma jika dan hanya jika $l(x) = 0$ mengakibatkan $x = 0$. Dengan kata lain, bahwa seminorma merupakan perumuman dari norma [6].

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan cara studi literatur. Sebelumnya, telah dilakukan penelitian oleh [10] mengenai norma pada ruang hasil bagi dengan judul "n-Normed spaces with Norm of its qoutient spaces" Kemudian, pada penelitian [11] yang berjudul "Vector seminorms spaces with vector norm and regular operators" telah dipaparkan juga mengenai seminorma.

Tahapan penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan ditempuh pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dan mengkaji buku refrensi utama.
2. Mencari sumber atau refrensi untuk memaparkan konsep dan teori yang relevan.
3. Membuktikan sifat kekonvergenan dari norma hasil bagi.
4. Membuktikan bagaimana kekontinuan seminorma atas sifat-sifat dari seminorma.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proposisi 4.2 [3]

Misalkan Y subruang tertutup dari ruang bernorma X. Untuk $x + Y$ dalam ruang hasil bagi X/Y, misalkan

$$|||x + Y||| := \inf\{\|x + y\|: y \in Y\}$$

maka $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y, disebut norma hasil bagi. Barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Bukti. Pertama, akan dibuktikan bahwa $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y berdasarkan kondisi-kondisi norma [7].

1. Akan dibuktikan bahwa $|||x + Y||| := \inf\{\|x + y\|: y \in Y\} \geq 0$.
2. Akan dibuktikan bahwa $|||x + Y||| = 0$ jika dan hanya jika $x + Y = 0$
3. Akan dibuktikan bahwa $|||k(x + Y)||| = |k||||x + Y|||$
4. Akan dibuktikan bahwa $|||(x_1 + Y) + (x_2 + Y)||| \leq |||x_1 + Y||| + |||x_2 + Y|||$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Pertama, Akan dibuktikan barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y.

Misalkan $(x_n + Y)$ merupakan barisan di X/Y. Andaikan terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $x_n + y_n \to x$ di X, maka

$$|||(x_n + Y) - (x + Y)||| = |||(x_n - x) + Y||| \leq \|x_n - x + y_n\|$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Jadi, terbukti bahwa $x_n + Y \to x + Y$ di X/Y.
Kemudian, Akan dibuktikan $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.
Asumsikan bahwa $x_n + Y \to x + Y$ di X/Y.
karena

$$|||(x_n + Y) - (x + Y)||| = \inf\{\|x_n - x + y\| : y \in Y\}$$

terdapat $y_n \in Y$ sedemikian sehingga

$$\|x_n - x + y_n\| < |||(x_n + Y) - (x + Y)||| + 1/n$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, $x_n - x + y_n \to 0$.
Jadi terbukti bahwa $x_n + y_n \to x \in X$.
Sehingga, terbukti bahwa barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X. Dengan demikian, Proposisi 4.2 terbukti.

Teorema 4.3 [3]
Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma, Y merupakan ruang vektor dan misalkan F merupakan pemetaan linier dari X pada Y. Didefinisikan $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$. Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka $l(y) = \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\}$. Akibatnya, l merupakan seminorma di Y. Lebih lanjut lagi l merupakan norma di Y jika dan hanya jika $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.
Bukti. Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma, Y merupakan ruang vektor dan misalkan F merupakan pemetaan linier dari X pada Y.
Didefinisikan $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$.
Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka $l(y) = \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\}$.
Sehingga, akan ditunjukkan bahwa $l(y) = \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\}$.
Misalkan $Z(F)$ merupakan kernel dari pemetetaan linier $F: X \to Y$ yaitu didefinisikan

$$Z(F) = \{z \in X : F(x) = 0\}$$

Karena $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka setiap $x + Z(F)$ dipetakan ke y.
di mana

$$F(x + z) = F(x) + F(z) = y + 0 = y$$

Untuk $z \in Z(F)$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} l(y) &\coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\} \\ &= \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\} \end{aligned}$$

Kemudian, akan dibuktikkan bahwa l merupakan seminorma di Y jika memenuhi kondisi berikut.

1. Akan dibuktikkan bahwa $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\} \geq 0$
2. Akan dibuktikkan bahwa $l(\alpha y) = |\alpha| l(y)$
3. Akan dibuktikkan bahwa $l(y_1 + y_2) \leq l(y_1) + l(y_2)$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa l merupakan norma di Y jika dan hanya jika $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.
Pertama, akan ditunjukkan bahwa l merupakan norma di Y.
Sebelumnya telah dibuktikan bahwa l merupakan seminorma di Y. l dikatakan norma jika l memiliki sifat $l(y) = 0$ yang berakibat $y = 0$
Andaikan $Z(F)$ merupakan subhimpunan tertutup dari X.
Misalkan $y \in Y$ sedemikian sehingga $l(y) = 0$.
Jika $x \in X$ dan $F(y) = y$ maka

$$l(y) = \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\} = 0$$

Misalkan terdapat $(x_n) \in X$ sedemikian sehingga $F(x_n) = y$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $\|x_n\| \to 0$.
Karena $\|x_n\| \to 0$ maka

$$F(x_n) \to F(0) = 0$$

Namun, $F(x_n) = y$ sehingga $y \to 0$. Oleh karena itu, $y = 0$.
Jadi, l merupakan norma di Y.

Kemudian, kan ditunjukkan bahwa $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.
Andaikan $Z(F)$ tidak tertutup
Misalkan (z_n) merupakan barisan di $Z(F)$ sedemikian sehingga $z_n \to z$ di X dengan $z \notin Z(F)$.
Karena l merupakan norma jika

$$l(0) = \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = 0\}$$
$$= \inf\{\|z\| : z \in Z(F)\}$$

Karena $z_n \in Z(F)$ dan $z_n \to z$ maka $\|z_n\| \to 0$
Sehingga

$$l(0) = \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = 0\} = 0$$

Namun, karena $z \notin Z(F)$ serta $F(x) = 0$ dan $\|x\| \neq 0$ maka l bukan norma. Jadi, pengandaian salah.
Jadi, terbukti bahwa $Z(F)$ merupakan subhimpunan tertutup dari X. Dengan demikian, Teorema 4.3 terbukti.

Teorema 4.4 [3]
Misalkan $m \geq 2$ dan misalkan $l_1, \dots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

$$l(x) := \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) := min\,\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$$

untuk $x \in X$, jika satu dari $l_1, \dots, l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X. Akan tetapi, l mungkin bukan seminorma meskipun setiap dari $l_1, \dots, l_m$ merupakan norma di X.
Bukti:
Pertama, akan dibuktikkan jika satu dari $l_1, \dots, l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X.
Misalkan $l_1, \dots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X maka disimpulkan bahwa $l(x) := \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ juga memenuhi sifat seminorma. Jika $l(x)$ memiliki sifat $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$ maka l_i adalah norma. Sehingga dibuktikan bahwa $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$ sebagai berikut.

$$l(x) := \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} = 0$$

artinya $\max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} = 0$ sehingga berakibat seminorma $l_1(x), \dots, l_m(x) = 0$.
Jadi, terbukti bahwa l merupakan norma di X.
Selanjutnya, akan dibuktikkan l mungkin bukan seminorma meskipun setiap dari $l_1, \dots, l_m$ merupakan norma di X.
Sebelumnya, telah dibuktikan bahwa l merupakan norma.
Andaikan l seminorma maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut.

1. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,
   Diketahui bahwa $l_1, \dots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X artinya $l_1, \dots, l_m$ memenuhi sifat $l_1, \dots, l_m \geq 0$ sehingga untuk $x \in X$ nilai minimum dari $l_1, \dots, l_m$ juga tidak akan negatif. Sehingga diperoleh
   $$l(x) := min\,\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \geq 0$$
2. $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$,
   $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$
   $l(min\,\{l_1(x+y), \dots, l_m(x+y)\})$
   $\leq l(min\,\{l_1(x)+l_1(y), \dots, l_m(x) + l_m(y)\})$
   $\leq l(min\,\{l_1(x)), \dots, l_m(x)\}) + l(min\,\{l_1(y), \dots, l_m(y)\})$
3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$
   $$l(\alpha x) := \min\{\alpha l_1(x), \dots, \alpha l_m(x)\}$$
   $= |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$
   Nilai $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ memiliki nilai yang sama untuk $\alpha \neq 0$ sedangkan untuk nilai α berbeda $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ tidak terpenuhi artinya sifat $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ pada $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ tidak selalu terpenuhi.

Jadi, pengandaian di atas salah karena l tidak selalu memenuhi sifat $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ yang artinya terbukti bahwa l mungkin bukan seminorma.
Sehingga disimpulkan bahwa jika satu dari $l_1, \dots, l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X dan juga l mungkin bukan seminorma meskipun setiap dari $l_1, \dots, l_m$ merupakan norma di X.

Teorema 4.5 [3]
Misalkan l merupakan seminorma pada ruang vektor X, dan misalkan $U \coloneqq \{x \in X : l(x) < 1\}$, maka himpunan U konveks (yaitu, $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$), penyerapan (yaitu untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$) dan seimbang (yaitu $kx \in U$ ketika $x \in U$ dan $k \in \mathbb{F}$ dengan $|k| \leq 1$).
Bukti:
Misalkan l merupakan seminorma pada ruang vektor X, dan misalkan $U \coloneqq \{x \in X : l(x) < 1\}$. Akan dibuktikan bahwa

1. U konveks
   Akan dibuktikan $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$.
   Misalkan $x, y \in U$ maka $l(x) < 1$ dan $l(y) < 1$.
   Misalkan $t \in (0,1)$ maka $l\big((1-t)x + ty\big) < 1$
   Sehingga berdasarkan sifat seminorma yang ke-2 dan ke-3 yaitu $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$ dan $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh
   $$l\big((1-t)x + ty\big) \leq |1-t| l(x) + |t| l(y)$$
   $$l\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t) l(x) + (t) l(y)$$
   karena $l(x) < 1$ dan $l(y) < 1$, maka
   $$l\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)1 + (t)1 = 1$$
   Jadi, terbukti bahwa $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$ karena $l\big((1-t)x + ty\big) < 1$.
2. Penyerapan U
   Akan dibuktikan untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$.
   Misalkan $x \in X$ terdapat $r > 0$.
   Berdasarkan sifat seminorma yang ke-3 yaitu $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh
   $$l\left(\frac{x}{r}\right) = \left|\frac{1}{r}\right| l(x) = \left(\frac{1}{r}\right) l(x) = \frac{l(x)}{l(x)+1}$$
   karena $l(x) + 1 > l(x)$ maka $l\left(\frac{x}{r}\right) < 1$.
   Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$.
3. U diseimbangkan
   Akan dibuktikan bahwa $kx \in U$ ketika $x \in U$ dan $k \in \mathbb{K}$ dengan $|k| \leq 1$.
   Misalkan $x \in U$ dan $k \in \mathbb{K}$ dengan $|k| \leq 1$.
   Berdasarkan sifat seminorma yang ke-3 yaitu $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh
   $$l(kx) = |k| l(x)$$
   karena $|k| \leq 1$, maka
   $$l(kx) \leq (1) l(x) < 1$$
   Sehingga, diperoleh $l(kx) < 1$
   Jadi, terbukti $kx \in U$ yang berarti seimbang.

Jadi, terbukti bahwa U konveks, penyerapan, dan seimbang.

Teorema 4.6 [12]
Andaikan l adalah seminorma pada ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), maka

1. $l(0) = 0$
2. $|l(x) - l(y)| \leq l(x-y)$
3. $l(x) \geq 0$
4. $\{x \in X : l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X

Bukti:
Misalkan l adalah seminorma pada ruang vektor X.

1. Akan dibuktikan bahwa $l(0) = 0$
   Berdasarkan sifat homogenitas seminorma yaitu $l(\alpha x) = |\alpha| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\alpha \in \mathbb{F}$
   Misalkan $\alpha = 0$ maka
   $$l(0x) = |0| l(x)$$
   $$l(0) = 0$$
   Terbukti bahwa $l(0) = 0$.
2. Akan dibuktikan bahwa $|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$
   Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga yaitu $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$ diperoleh
   $$l(x) = l(x - y + y) \leq l(x - y) + l(y)$$
   $$l(x - y) \leq l(x - y)$$
   Begitu juga apabila x dan y ditukar akan tetap berlaku, karena $l(x - y) = l(y - x)$ sehingga,
   $$l(x) - l(y) \leq l(x - y)$$
   dan
   $$l(y) - l(x) \leq l(y - x)$$
   diperoleh
   $$|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$$
   Terbukti bahwa bahwa $|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$.
3. Akan dibuktikan bahwa $l(x) \geq 0$
   Berdasarkan definisi seminorma yaitu terdapat pada sifat $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$.
   Terbukti bahwa $l(x) \geq 0$.
4. Akan dibuktikan bahwa $\{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X
   Misalkan $S = \{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X
   Jika $l(x) = l(y) = 0$ dan α, β adalah skalar maka
   a. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,
   $$l(0) = 0, 0 \in S$$
   b. $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$
   $$l(x + y) \leq l(x) + l(y) \leq 0 + 0 \leq 0, \qquad 0 \in S$$
   c. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$
   $$l(\lambda x) = |\lambda| l(x) = |\lambda| \cdot 0 = 0, \qquad 0 \in S$$
   Karena S tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian makaa terbukti bahwa $S = \{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X.

Remark 4.7 [3]
Misalkan X dan Y merupakan ruang vektor dan misalkan $F: X \rightarrow Y$ merupakan pemetaan linier. Andaikan $\|\cdot\|_Y$ merupakan norma di Y. Untuk $x \in X$, didefinisikan $l(x) \coloneqq \|F(x)\|_Y$, di mana l merupakan seminorma di X dan terdapat norma di X jika dan hanya jika pemetaan F satu-satu.

Proposisi 4.8 [3]
Misalkan $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|_0$ merupakan norma pada ruang vektor X. Norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$ jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha \|x\|$ untuk semua $x \in X$.
Bukti:
Pertama, ndaikan $\|\cdot\|_0 \leq \alpha \|\cdot\|$ untuk semua $x \in X$,
Akan dibuktikan bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dibanding norma $\|\cdot\|_0$.
Misalkan (x_n) merupakan barisan di X dan misalkan $\|x_n\| \rightarrow 0$
maka
$$\|x_n\|_0 \leq \alpha \|x_n\|$$

karena $\|x_n\| \rightarrow 0$ maka $\alpha \|x_n\|$ sedemikian sehingga
$$\|x_n\|_0 \rightarrow 0$$
Jadi, terbukti bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.
Sebaliknya, andaikan norma $\|\cdot\|$ lebih besar dari norma $\|\cdot\|_0$.

Jika tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat barisan tak kosong $x_n \in X$ sedemikian sehingga

$$\|x_n\|_0 > n\|x_n\|$$

Misalkan $y_n \coloneqq \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$$

Sehingga $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ karena $\frac{1}{n} \to 0$, akan tetapi $\|y_n\|_0 \nrightarrow 0$ karena

$$\|y_n\|_0 = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\|_0 = \frac{\|x_n\|_0}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

Oleh karena itu,

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ akan tetapi } \|y_n\|_0 \nrightarrow 0 \text{ karena } \|y_n\|_0 > 1$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Jadi, terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$ sehingga terbukti bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.
Kemudian, andaikan norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.
Akan dibuktikan terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$.
Berdasarkan definisi 4.9 yaitu mengenai norma yang ekuivalen di X jika terdapat bilangan positif α dan β sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$

$$\beta\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$$

Sehingga pengandain diatas benar.
Jadi, terbukti bahwa terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$.

Lemma 4.9 [3]
Misalkan X merupakan ruang bernorma dengan norma $\|\cdot\|$ dan l merupakan seminorma pada X, maka l kontinu di X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.
Bukti:
Pertama, andaikan terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.
Akan dibuktikan bahwa l kontinu.
Misalkan terdapat barisan (x_n) di mana $x_n \to x$ di X, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$,

$$l(x_n) - l(x) \leq l(x_n - x)$$

dan

$$l(x) - l(x_n) \leq l(x - x_n)$$

sehingga berdasarkan teorema 4.6 (2)

$$|l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x) \leq \alpha\|x_n - x\|$$

Jika $\|x_n - x\| < \delta$, diberikan $\varepsilon > 0$ dan dipilih $\delta = \varepsilon/\alpha$ maka

$$|l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x) \leq \alpha\|x_n - x\| < \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) < \varepsilon$$

dengan demikian

$$|l(x_n) - l(x)| \to 0$$

Jadi, terbukti bahwa l kontinu.
Sebaliknya, diandaikan bahwa tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga

$$l(x) \leq \alpha\|x\|$$

untuk semua $x \in X$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $x_n \in X$ sedemikian sehingga

$$l(x_n) > n\|x_n\|$$

Berdasarkan Proporsisi 4.8 diketahui bahwa

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ akan tetapi } \|y_n\|_0 \nrightarrow 0 \text{ karena } \|y_n\|_0 > 1$$

Hal ini berlaku juga jika misalkan $y_n \coloneqq \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$$

Sehingga, $y_n \to 0$ karena $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ saat $n \to \infty$, akan tetapi $l(y_n) \nrightarrow 0$ karena

$$l(x_n) > n\|x_n\|$$

maka

$$l(y_n) = \frac{l(x_n)}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

Oleh karena itu, $l(y_n) > 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
Jadi, l tidak kontinu pada titik $0 \in X$ jika bahwa tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$.
Kemudian, andaikan l kontinu di X.
Akan dibuktikan bahwa $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.
Misalkan terdapat barisan (x_n) di mana $x_n \to x$ di X, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$

$$l(x_n - x) \to 0$$

Karena l kontinu maka

$$|l(x_n) - l(x)| \to 0$$

Sehingga berdasarkan Teorema 4.6

$$|l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x)$$

Kemudian, berdasarkan Remark 4.7 seminorma mendefinisikan norma pada X sebagai berikut.

$$l(x_n - x) = \|x_n - x\|$$

Jika terdapat suatu α pada norma, maka

$$l(\alpha(x_n - x)) = \|\alpha(x_n - x)\| = |\alpha|\|x_n - x\|$$

Jadi, terbukti bahwa terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembuktian yang telah dibahas, maka adalah suatu barisan $(x_n + Y)$ akan konvergen ke $(x + Y)$ di ruang hasil bagi jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y yaitu subruang tertutup dalam ruang bernorma sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di ruang bernorma X. Kemudian, suatu seminorma l pada ruang bernorma X akan kontinu di ruang bernorma X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk $x \in X$, suatu seminorma dapat dibentuk oleh suatu pemetaan linier.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. A. Akcocglu, P. F. A. Bartha, and D. Minh Ha, "Analysis In Vector Spaces," 2009.
[2] B. Rynne and M. Youngson, "Linear Functional Analysis," Swiss, 2008.
[3] B. V Limaye, "Linear Functional Analysis for Scientists and Engineers," 2016.
[4] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. 1978.
[5] Nik. Weaver, *Measure theory and functional analysis*. World Scientific, 2013.
[6] I. Wilde, "Functional Analysis 'Topological Vector Spaces' version," 2003.
[7] L. Nel, "Continuity Theory," Canada, 2016.
[8] A. Khanfer, *Fundamentals of Functional Analysis*. Springer Nature Singapore, 2023.
[9] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, "Introduction to Real Analysis," 2011.
[10] H. Batkunde, "Norms on Quotient Spaces of The 2-Inner Product Space," 2021.
[11] R. Cristescue, "Vector Seminorms Spaces With Vector Norm and Regular Operators," 2008.
[12] W. Rudin, *Functional analysis*. 1991.
[13] D. Maharani, Keterbatasan Operator Mikhlin di Ruang Grand Grand Morrey. 2022.