Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 4(3) (2025), Pages 97-109
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Indeks Konektivitas Eksentrik Edis Pada Graf Annihilator dari Ring Bilangan Bulat Modulo

Risma Amelia, Mohammad Nafie Jauhari*, Erna Herawati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Email: nafie.jauhari@uin-malang.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang bagaimana rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) dalam graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo. Tujuan dari penelitian ini untuk menentukan indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modul p^m, dengan p adalah bilangan prima untuk $p \geq 2$, dan m adalah bilangan bulat positif. Langkah awal dalam melakukan penelitian ini yaitu membentuk graf annihilator dari ring bilangan bulat modul p^m, kemudian mencari derajat titik dan eksentrisitas titik pada graf annihilator yang digunakan untuk menghitung indeks konektivitas eksentrik Ediz dari setiap graf. Setelah itu, merumuskan dugaan tentang indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modul p^m, dan yang terakhir membuktikan dugaan yang diperoleh. Hasil penelitian ini adalah rumus umum indeks konduktivitas eksentrik Ediz pada graf Annihilator dari ring bilangan bulat modulo p^m dengan p adalah bilangan prima dan m adalah bilangan bulat positif.

Kata kunci: Graf Annihilator; Ring Bilangan Bulat Modulo p^m; Indeks Konektifitas Eksentrik Ediz.

Abstract

This study discusses how the general formula of the Ediz eccentric connectivity index (IKEE) in the annihilator graph of the ring of integers modulo. This study aims to determine the Ediz eccentric connectivity index on the annihilator graph of the ring of modular integers p^m, with p is a primer number for $p \geq 2$, and m is a positif integer. The initial step in conducting this research is to form an annihilator graph from the ring of integers of the modul p^m , then find the vertex degree and the eccentricity of the vertex on the annihilator graph which is used to calculate the Ediz eccentric connectivity index of each graph. After that, formulate a conjecture about the Ediz eccentric connectivity index on the annihilator graph of the ring of integers of the modul p^m , and the last one proves the hypothesis obtained. The results of this study is general formula for the Ediz eccentric conductivity index on the Annihilator graph of the ring of integers modulo p^m where p is a prime number and m is a positive integer.

Keywords: Graph Annihilator; Ring of Integer Modulo p^m; Ediz Eccentric Connectivity Index.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah ilmu matematika yang saat ini banyak mengalami perkembangan. Berbagai manfaat graf dalam kehidupan sehari-hari antara lain dapat digunakan dalam penjadwalan sesuatu, dapat membantu menemukan rute tercepat dan terpendek antara dua lokasi, dapat digunakan untuk memodelkan struktur molekul pada bidang kimia. Penerapan teori graf sangat berguna dalam kehidupan sehari-hari. Dengan adanya bantuan dari teori graf maka proses memvisualisasikan konsep matematika abstrak menjadi jauh lebih mudah. Tidak hanya

Submitted: 27 November 2024 Reviewed: 7 Februari 2025 Accepted: 24 Februari 2025
Doi: https://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v4i2.30059

dalam memvisualisasikan konsep matematika abstrak saja, akan tetapi dalam menyelesaikan masalah matematika, dan mempelajari algoritma matematika juga membutuhkan peran dari teori graf.

Indeks topologi adalah salah satu topik dari teori graf yang dikenal sebagai indeks konektivitas. Indeks konektivitas adalah bilangan riil yang berkaitan dengan graf yang diperoleh dengan aturan tertentu dan tidak merubah keisomorfisan graf [1]. Berbagai indeks topologi banyak digunakan untuk studi hubungan struktur properti kuantitatif (QSPR) dan hubungan struktur aktivitas kuantitatif (QSAR) [2].

Salah satu bentuk indeks konektivitas yang sering diteliti adalah indeks konektivitas eksentrik, yang diaplikasikan pada suatu graf terhubung G, dengan indeks konektivitasnya menyatakan jumlah kali derajat titik v dengan eksentrisitasnya atau $\xi^c(G) = \sum_{v \epsilon V(G)} \deg(v)\, e(v)$, dengan deg (v) adalah derajat titik v, sementara $e(v)$ adalah eksentrisitas v [2]. Selain itu, ada variasi dari indeks konektivitas eksentrik yang disebut sebagai indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) atau indeks keterhubungan langsung eksentrik. Indeks konektivitas eksentrik Ediz didefinisikan sebagai total dari hasil bagi antara jumlah derajat dari semua titik yang terhubung secara langsung dengan titik dalam graf molekul dan eksentrisitas titik tersebut dalam graf molekul. Indeks konektivitas eksentrik Ediz dari graf G didefinisikan sebagai ${}^E\xi^c(G) = \sum_{v \epsilon V(G)} \frac{S_v}{e(v)}$, dengan S_v adalah total derajat dari semua titik yang terhubung langsung dengan titik v dan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v [4].

Pengkajian struktur dalam bentuk graf dianggap sebagai alternatif dalam memahami struktur aljabar yang sebelumnya dipandang sebagai studi teoritis. Berdasarkan perkembangannya, graf merupakan diagram yang terdiri dari himpunan titik dan sisi, serta melibatkan dua operasi biner penambahan dan perkalian. Himpunan yang melibatkan dua operasi biner disebut ring. Ring memenuhi sifat grup abelian yaitu tertutup terhadap operasi penjumlahan, asosiatif terhadap operasi penjumlahan, tertutup terhadap operasi perkalian, asosiatif terhadap operasi perkalian dan distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Ring komutatif adalah ring yang operasi perkaliannya komutatif [14]. Dalam penelitian sebelumnya, indeks konektivitas eksentrik telah diteliti oleh [1] . Penelitian lebih lanjut terhadap indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) telah diteliti oleh [2]. Dalam penelitian lain yang ditulis oleh [15] juga menyelidiki tentang indeks konektivitas eksentrik, indeks konektivitas eksentrik Ediz dan indeks konektivitas eksentrik yang diperluas. Pengkajian struktur dalam bentuk graf dianggap sebagai alternatif dalam memahami struktur aljabar yang sebelumnya dipandang sebagai studi teoritis. Berdasarkan perkembangannya, graf merupakan diagram yang terdiri dari himpunan titik dan sisi, serta melibatkan dua operasi biner penambahan dan perkalian. Himpunan yang melibatkan dua operasi biner disebut ring. Ring memenuhi sifat grup abelian yaitu tertutup terhadap operasi penjumlahan, asosiatif terhadap operasi penjumlahan, tertutup terhadap operasi perkalian, asosiatif terhadap operasi perkalian dan distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Ring komutatif adalah ring yang operasi perkaliannya komutatif [14].

Pada tahun 1988, artikel yang ditulis oleh Beck memperkenalkan gagasan ring komutatif dalam bentuk graf pembagi nol Γ(R). Dalam graf ini, himpunan titik berasal dari elemen dalam ring komutatif R, yaitu titik x dan y terhubung langsung atau bertetangga jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ [3]. Graf annihilator dari ring R yang dinotasikan sebagai $AG(R)$. Himpunan titik pada graf ini adalah $Z(R)$ dan dua titik berbeda $x, y \in AG(R)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $ann(x) \cup ann(y) \neq ann(xy)$[6].

Berdasarkan penjelasan tersebut, penulis melakukan penelitian mengenai indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) dalam graf annihilator yang dibangun dari ring komutatif dengan unsur kesatuan, khususnya ring bilangan bulat modulo p^m dengan p bilangan prima, atau dinyatakan sebagai ring $\mathbb{Z}_{p^m}$.

METODE

Pra Penelitian

Pra-penelitian yang diperlukan sebelum melaksanakan penelitian ini meliputi dua langkah utama. Pertama, Menentukan bentuk graf annihilator dari bilangan bulat modulo 2^m atau $\mathbb{Z}_{2^m}$ dan $m \in \{2,3,4\}$. Kedua, menentukan bentuk graf annihilator dari bilangan bulat modul 3^m atau $\mathbb{Z}_{3^m}$ dan $m \in \{2,3,4\}$.

Tahapan Penelitian

Pada tahapan penelitian ini, ring bilangan bulat modul yang digunakan untuk memunculkan duggan adalah $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$. Dengan keberadaan ring tersebut, pola untuk menentukan rumus indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) mulai terlihat. Oleh karena itu, langkah langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menentukan pembagi nol dan annihilator dari setiap elemen himpunan ring $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$, menentukan titik-titik yang terhubung langsung pada graf annihilator dari ring$\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$, menggambar graf annihilator ring $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$, menentukan derajat masing-masing titik dari graf annihilator, serta menghitung eksentrisitas setiap titik pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$. Selanjutnya, indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$ dihitung untuk memunculkan dugaan yang lebih umum. Kemudian, langkah-langkah selajutnya yaitu menentukan pembagi nol pada $\mathbb{Z}_{p^m}$ dengan p merupakan bilangan prima dan $m \in \mathbb{N}$, mengidentifikasi keterhubungan titik pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modul p^m, menentukan derajat dan eksentrisitas asing-masing titik, serta merumuskan indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modul p^m secara umum.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada Graf annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{p^m}$, $p \in \{2,3,5\}$ dan $m \in \{2,3,4\}$

Dalam upaya menemukan rumus indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf annihilator dari $\mathbb{Z}_{p^m}$, dengan p suatu bilangan prima dan $m \in \{2,3,4\}$.Langkah awal yang dapat dilakukan yaitu melakukan percobaan untuk mencari nilai indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}$, dan $\mathbb{Z}_{5^3}$.

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{2^2})$

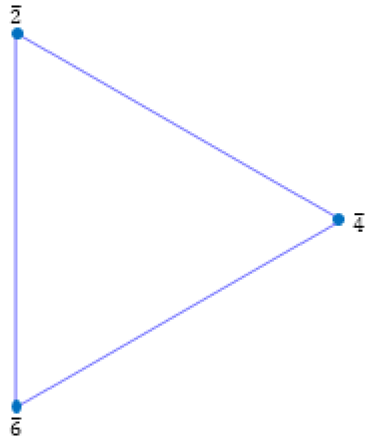
Anggota himpunan $\mathbb{Z}_{2^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{2^2})^* = \{2\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{2^2})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{2^2})^*$.

Gambar 1. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{2^2}$

Dengan demikian indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihlator $\mathbb{Z}_{2^2}$ tidak dapat ditentukan.

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$

Anggota himpunan $\mathbb{Z}_{2^3} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{2^3})^* = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$. . Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{2^3})^*$.



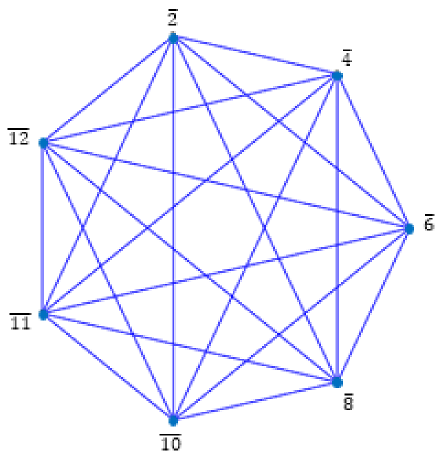
Gambar 2. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{2^3}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$ semua titik-titiknya berderajat $2 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{2^3})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\xi^{c}\left(AG(\mathbb{Z}_{2^3})\right) &= \frac{\deg(\bar{4}) + \deg(\bar{6})}{e(\bar{2})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{6})}{e(\bar{4})} + \frac{\deg(\bar{2}) + \deg(\bar{4})}{e(\bar{6})} \\
&= \frac{2+2}{1} + \frac{2+2}{1} + \frac{2+2}{1} \\
&= \frac{4}{1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{1} \\
&= \frac{(2 \times 2)}{1} \times 3 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$

Anggota himpunan $\mathbb{Z}_{2^4} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{2^4})^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{2^4})^*$.



Gambar 3. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{2^4}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$ semua titik-titiknya berderajat $6 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{2^4})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\xi^{c}(AG(\mathbb{Z}_{2^4}))
&= \frac{\deg(\overline{4}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{2})} \\
&+ \frac{\deg(\overline{2}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{4})} \\
&+ \frac{\deg(\overline{2}) + \deg(\overline{4}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{6})} \\
&+ \frac{\deg(\overline{2}) + \deg(\overline{4}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{8})} \\
&+ \frac{\deg(\overline{2}) + \deg(\overline{4}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{10})} \\
&+ \frac{\deg(2) + \deg(\overline{4}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{14})}{e(\overline{12})} \\
&+ \frac{\deg(\overline{2}) + \deg(\overline{4}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{8}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{12})}{e(\overline{14})} \\
&= \frac{6+6+6+6+6+6}{1} + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} \\
&\qquad + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} \\
&\qquad + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} \\
&\qquad + \frac{6+6+6+6+6+6}{1} \\
&= \frac{36}{1} + \frac{36}{1} + \frac{36}{1} + \frac{36}{1} + \frac{36}{1} + \frac{36}{1} + \frac{36}{1} \\
&= \frac{(6 \times 6)}{1} \times 7 \\
&= \frac{252}{1} \\
&= 252
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$

Anggota himpunan $\mathbb{Z}_{3^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{3^2})^* = \{\overline{3}, \overline{6}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{3^2})^*$.

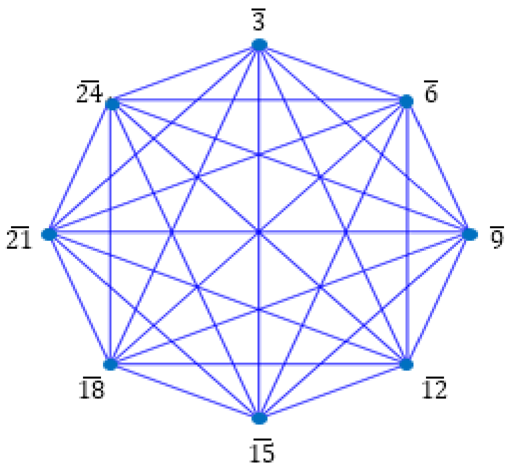
Gambar 4. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{3^2}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$ semua titik-titiknya berderajat $1 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{3^2})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\xi^{c}\left(AG(\mathbb{Z}_{3^2})\right) &= \frac{\deg(\bar{6})}{e(\bar{3})} + \frac{\deg(\bar{3})}{e(\bar{6})} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \\
&= \frac{(1 \times 1)}{1} \times 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$

Anggota himpunan $\mathbb{Z}_{3^3} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \dots, \overline{25}, \overline{26}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{3^3})^* = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{3^3})^*$.



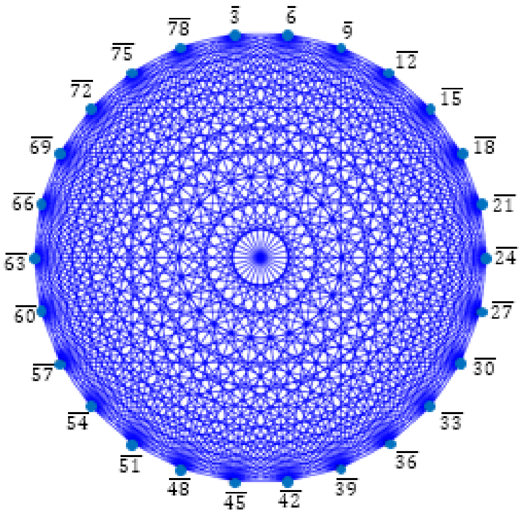
Gambar 5. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{3^3}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$ semua titik-titiknya berderajat $7 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{3^3})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\xi^{c}(AG(\mathbb{Z}_{3^2}))\\
&=\frac{\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\bar{3})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\bar{6})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\bar{9})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\overline{12})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\overline{15})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{21})+\deg(\overline{24})}{e(\overline{18})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{24})}{e(\overline{21})}\\
&+\frac{\deg(\bar{3})+\deg(\bar{6})+\deg(\bar{9})+\deg(\overline{12})+\deg(\overline{15})+\deg(\overline{18})+\deg(\overline{21})}{e(\overline{24})}\\
&=\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}\\
&\qquad+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}\\
&\qquad+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}\\
&\qquad+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}+\frac{7+7+7+7+7+7+7}{1}\\
&=\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}+\frac{49}{1}\\
&=\frac{(7\times 7)}{1}\times 8=\frac{343}{1}=343
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $\boldsymbol{AG}(\mathbb{Z}_{3^4})$

Anggota himpunan dari $\mathbb{Z}_{3^4}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11},\overline{12},\overline{13},\overline{14},\overline{15},\dots,\overline{79},\overline{80}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{3^4})^*=\{\bar{3},\bar{6},\bar{9},\overline{12},\overline{15},\overline{18},\overline{21},\overline{24},\overline{27},\overline{30},\overline{33},\overline{36},\overline{39},\overline{42},\overline{45},\overline{48},\overline{51},\overline{54},\overline{57},\overline{60},\overline{63},\overline{66},\overline{69},\overline{72},\overline{75},\overline{78}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{3^4})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{3^4})^*$.



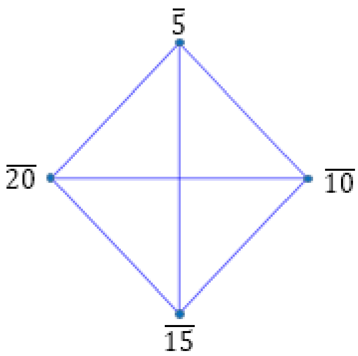
Gambar 6. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{3^4}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{3^4})$ semua titik-titiknya berderajat $25 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{3^4})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{3^4})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{3^4})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
&{}^{E}\xi^{c}(AG(\mathbb{Z}_{3^4}))\\
&= \frac{\deg(\overline{6}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{18}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{3})}\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{18}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{6})}\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{18}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{9})}\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{18}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{12})}\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{18}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{15})}\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{15}) + \cdots + \deg(\overline{78})}{\varepsilon(\overline{18})} + \cdots\\
&+ \frac{\deg(\overline{3}) + \deg(\overline{6}) + \deg(\overline{9}) + \deg(\overline{12}) + \deg(\overline{15}) + \cdots + \deg(\overline{75})}{\varepsilon(\overline{78})}\\
&= \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1} + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1}\\
&\quad + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1}\\
&\quad + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1}\\
&\quad + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1}\\
&\quad + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1} + \cdots\\
&\quad + \frac{25+25+25+25+25+\cdots+25}{1}\\
&= \frac{(25 \times 25)}{1} \times 26 = 16250
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$

Anggota himpunan dari $\mathbb{Z}_{5^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \ldots, \overline{24}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{5^2})^* = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{5^2})^*$.



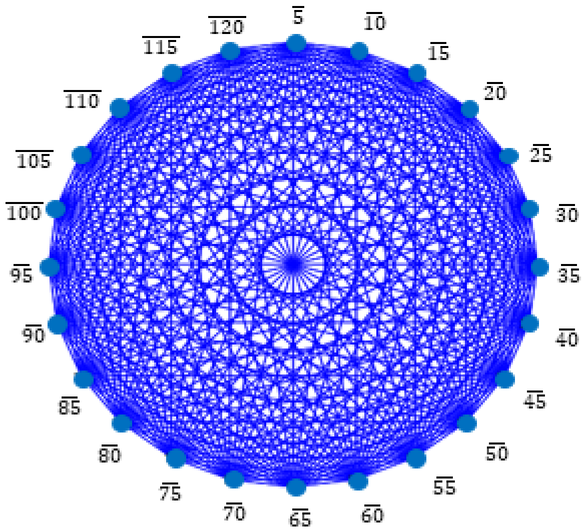
Gambar 7. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{5^2}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$ semua titik-titiknya berderajat $3 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{5^2})$ berikut ini:

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\xi^{c}(AG(\mathbb{Z}_{5^2})) &= \frac{\deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20})}{e(\overline{5})} \\
&\quad + \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20})}{e(\overline{10})} \\
&\quad + \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{20})}{e(\overline{15})} \\
&\quad + \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15})}{e(\overline{20})} \\
&= \frac{3+3+3}{1} + \frac{3+3+3}{1} + \frac{3+3+3}{1} + \frac{3+3+3}{1} \\
&= \frac{9}{1} + \frac{9}{1} + \frac{9}{1} + \frac{9}{1} \\
&= \frac{(3 \times 3)}{1} \times 4 = 36
\end{aligned}
$$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$

Anggota himpunan dari $\mathbb{Z}_{5^3} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \dots, \overline{123}, \overline{124}\}$, sehingga dari hal tersebut didapatkan $Z(\mathbb{Z}_{5^3})^* = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}, \overline{55}, \overline{60}, \overline{65}, \overline{70}, \overline{75}, \overline{80}, \overline{85}, \overline{90}, \overline{95}, \overline{100}, \overline{105}, \overline{110}, \overline{115}, \overline{120}\}$. Kemudian akan dibentuk sebuah graf annihilator $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$ dengan titik dari graf annihilatornya yaitu anggota dari himpuanan dari $Z(\mathbb{Z}_{5^3})^*$.



Gambar 8. Graf Annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{5^3}$

Dengan demikian pada $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$ semua titik-titiknya berderajat $23 = p^{(m-1)} - 2$. Sehingga $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$ semua titiknya memiliki eksentrisitas 1. Setelah diketahui derajat dan eksentrisitas titik masing-masing di $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$, maka dan dihitung indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada $AG(\mathbb{Z}_{5^3})$ berikut ini:

$$^{E}\xi^{c}\left(AG(\mathbb{Z}_{5^3})\right)$$

$$= \frac{\deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{25}) + \deg(\overline{30}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(\overline{5})}$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{25}) + \deg(\overline{30}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(\overline{10})}$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{25}) + \deg(\overline{30}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(\overline{15})}$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{25}) + \deg(\overline{30}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(20)}$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{30}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(\overline{25})}$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{25}) + \cdots + \deg(\overline{120})}{e(\overline{30})}$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{\deg(\overline{5}) + \deg(\overline{10}) + \deg(\overline{15}) + \deg(\overline{20}) + \deg(\overline{25}) + \cdots + \deg(\overline{115})}{e(\overline{120})}$$

$$= \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1} + \cdots$$

$$+ \frac{23 + 23 + 23 + 23 + 23 + \cdots + 23}{1}$$

$$= \frac{(23 \times 23)}{1} \times 24$$

$$= \frac{529}{1} \times 24$$

$$= \frac{12696}{1}$$

$$= 12696$$

Tahap selanjutnya adalah untuk membuktikan hipotesa yang dihasilkan dari percobaan sebelumnya, yang kemudian akan menghasilkan lemma dan teorema. Berdasarkan perhitungan indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring

$\mathbb{Z}_{2^2}, \mathbb{Z}_{2^3}, \mathbb{Z}_{2^4}, \mathbb{Z}_{3^2}, \mathbb{Z}_{3^3}, \mathbb{Z}_{3^4}, \mathbb{Z}_{5^2}, \mathbb{Z}_{5^3}$ dan $\mathbb{Z}_{5^3}$ dapat dibuat tabel untuk mempermudah dalam mencari pola, dengan mengelompokkan titik-titik yang memiliki keterhubungan yang serupa.

Tabel 1. Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada $AG(\mathbb{Z}_{p^m})$

p	G	${}^{E}\xi^{c}\left(AG(\mathbb{Z}_{p^m})\right)$
2	$AG(\mathbb{Z}_{2^3})$	$\left(2^{(3-1)}-2\right)\times\left(2^{(3-1)}-2\right)\times\left(3^{(3-1)}-1\right)=12$
	$AG(\mathbb{Z}_{2^4})$	$\left(2^{(4-1)}-2\right)\times\left(2^{(4-1)}-2\right)\times\left(2^{(4-1)}-1\right)=252$
3	$AG(\mathbb{Z}_{3^2})$	$\left(3^{(2-1)}-2\right)\times\left(3^{(2-1)}-2\right)\times\left(3^{(2-1)}-1\right)=2$
	$AG(\mathbb{Z}_{3^3})$	$\left(3^{(3-1)}-2\right)\times\left(3^{(3-1)}-2\right)\times\left(3^{(3-1)}-1\right)=343$
	$AG(\mathbb{Z}_{3^4})$	$\left(3^{(4-1)}-2\right)\times\left(3^{(4-1)}-2\right)\times\left(3^{(4-1)}-1\right)=16250$
5	$AG(\mathbb{Z}_{5^2})$	$\left(5^{(2-1)}-2\right)\times\left(5^{(2-1)}-2\right)\times\left(5^{(2-1)}-1\right)=36$
	$AG(\mathbb{Z}_{5^3})$	$\left(5^{(3-1)}-2\right)\times\left(5^{(3-1)}-2\right)\times\left(5^{(3-1)}-1\right)=12696$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p\in\{2,3,5\}$	$AG(\mathbb{Z}_{p^m})$	$=\left(p^{(m-1)}-2\right)\times\left(p^{(m-1)}-2\right)\times\left(p^{(m-1)}-1\right)$ $=\left(p^{(m-1)}-2\right)^2\times(p^{m-1}-1)$

Dengan demikian pengamatan tersebut memperoleh dugaan rumus indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_{p^m}$

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada Graf annihilator dari Ring $\mathbb{Z}_{p^m}$, $p \geq 5$ dan $m \geq 2$

Akan ditunjukkan bahwa rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring $\mathbb{Z}_{p^m}$, dengan $p \geq 3$, p adalah bilangan prima dan $m \geq 2$, m adalah bilangan bulat positif, dapat dibuktikan berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya. Hipotesis ini akan diajukan dan dibuktikan sebagai sebuah teorema.

Lemma 4.1
Misalkan p bilangan prima dan m bilangan bulat positif, maka
$$Z(\mathbb{Z}_{p^m})^* = \{p\cdot k \mid k = 1,2,3,\dots,p^{m-1}\}$$

Lemma 4.2
Misalkan p bilangan prima, $m, i, a \in \mathbb{N}$ dan $m > 2, i < m$, maka
$$|ann(ap^i)| = p^i$$
, dengan $ap^i \in Z(\mathbb{Z}_{p^m})$ dan $p \nmid a$.

Definisi 4.2
$$A_1 = \{x \in Z(\mathbb{Z}_{p^m}): x = ap^1,\ \ p^2|x\}$$
$$A_2 = \{x \in Z(\mathbb{Z}_{p^m}): x = ap^2,\ \ p^3|x\}$$
$$\vdots$$
$$A_i = \{x \in Z(\mathbb{Z}_{p^m}): x = ap^i,\ \ p^{i+1}|x\}$$
dengan $i = \{1,2,\dots,m-1\}$, $m \in \mathbb{N}$, dan p bilangan prima.

Lemma 4.3

$$AG(\mathbb{Z}_{p^m}) \cong K_{p^{(m-1)}-1}$$

untuk setiap bilangan prima p dan $m \in \mathbb{N}$.

Akibat Lemma 4.3

Jika S_v adalah total derajat dari semua titik yang terhubung secara langsung dengan titik v di $AG(\mathbb{Z}_{p^m})$ dan $e(v)$ adalah eksentrisitas titik v di $AG(\mathbb{Z}_{p^m})$, maka

$$S_v = (p^{(m-1)} - 2)(p^{(m-1)} - 2) \text{ dan } e(v) = 1$$

untuk setiap titik $v \in V\left(AG(\mathbb{Z}_{p^m})\right)$.

Teorema

Indeks konektivitas eksentrik Ediz pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo p^m dengan dengan $p \geq 2$, $m \geq 2$ dan p bilangan prima, m bilangan bulat positif adalah

$$^{E}\xi^{c}\big(AG(\mathbb{Z}_{p^m}\big) = (p^{3m-3}) - 5(p^{2m-2}) + 8(p^{m-1}) - 4$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisa, diperoleh bahwa rumus umum indeks konektivitas eksentrik Ediz (IKEE) pada graf annihilator dari ring bilangan bulat modulo p^m, yang mana $p \geq 2$, $m \geq 2$, dan p bilangan prima adalah

$$^{E}\xi^{c}\big(AG(\mathbb{Z}_{p^m}\big) = p^{3m-3} - 5(p^{2m-2}) + 8(p^{m-1}) - 4$$

Rumus ini menunjukkan bahwa nilai Indeks Konektivitas Eksenterik Ediz (IKEE) memiliki pertumbuhan eksponensial yang didominasi oleh suku p^{3m-3}, sedangkan suku-suku lainnya memberikan kontribusi korektif dengan dampak yang lebih kecil pada hasil akhir. Pola ini mencerminkan interaksi antara struktur algebra ring $\mathbb{Z}_{p^m}$ dan sifat topologis graf annihilatornya, di mana peningkatan nilai ppp dan mmm menghasilkan graf yang lebih kompleks dengan nilai indeks konektivitas eksentrik yang semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. J. Morgan, S. Mukwembi, and H. C. Swart, “On the eccentric connectivity index of a graph,” *Discrete Math.*, vol. 311, no. 13, pp. 1229–1234, 2011, doi: 10.1016/j.disc.2009.12.013.

[2] S. Ediz, “On the Ediz eccentric connectivity index of a graph,” *Optoelectron. Adv. Mater. Rapid Commun.*, vol. 5, no. 11, pp. 1263–1264, 2011.

[3] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graph and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Press, 2016.

[4] T. A. Kusmayadi and N. A. Sudibyo, “Eccentric Digraph of Cocktail Party Graph and Hypercube,” *IPTEK J. Technol. Sci.*, vol. 22, no. 4, pp. 198–204, 2011, doi: 10.12962/j20882033.v22i4.74.

[5] D. Joyce, *Introduction to Modern Algebra*. Clark University, 2017.

[6] Harold M. Stark, “An introduction to number theory.” 1978.

[7] C. Domicolo and H. Mahmoud, “Degree-Based Gini Index for Graphs,” *Probab. Eng. Informational Sci.*, vol. 34(2), pp. 157–171, 2020.

[8] Abdussakir, Nilna, and Fifi, *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press, 2009.

[9] A. Badawi, “On the Annihilator Graph of a Commutative Ring,” *Commun. Algebr.*, vol. 42, no. 1, pp. 108–121, 2014, doi: 10.1080/00927872.2012.707262.

[10] K. D. Joshi, *Foundations of Discrete Mathematics*. India. KK. Gupta for New Age International, 1989.

[11] J. A. Gallian, “Contemporary Abstract Algebra (chapter 2),” vol. 7, no. 1, pp. 37–72, 2015, [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/269107473_What_is_governance/link/5481

73090cf22525dcb61443/download%0Ahttp://www.econ.upf.edu/~reynal/Civil wars_12December2010.pdf%0Ahttps://think-asia.org/handle/11540/8282%0Ahttps://www.jstor.org/stable/41857625.

[12] H. W. M. Patty, *Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol*. 2016.

[13] W. H. & dkk Irawan, *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UIN Maliki PRESS, 2014.

[14] L. Gilbert and J. Gilbert, *Elements of Modern Algebra, Eight Edition*. USA: Brooks/ Cole Cengage Learning., 2015.

[15] B. S. Reddy, R. S. Jain, and N. Laxmikanth, "Eccentric Topological Index of the Zero Divisor graph $\Gamma[\mathbb {Z}_n]$," pp. 1–13, 2020, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2001.01220.