Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 4(3) (2024), Pages 110-117
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Energi Detour pada Graf Invers dari Grup Quaternion Diperumum

Iftitahur Rohmah, Mohammad Nafie Jauhari*, Erna Herawati

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Email: nafie.jauhari@uin-malang.ac.id

Abstrak

Grup quaternion diperumum (Q_{4n}) adalah grup non abelian dengan orde $4n$ yang dibangun oleh dua elemen a, b yang dinotasikan $\{a, b\}$ didefinisikan sebagai $Q_{4n} = \{a, b | a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\}$ untuk e identitas, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Graf invers dari suatu grup adalah graf yang himpunan titiknya adalah semua anggota grup berhingga sedemikian sehingga dua titik berbeda u dan v terhubung langsung jika $u \cdot v \in S$ atau $v \cdot u \in S$. Energi graf, khususnya energi detour, merupakan aspek penting dalam teori graf yang menggambarkan stabilitas dan ketahanan jaringan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui formula dari energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum dengan $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Melalui metode analisis aljabar dan teori graf, ditemukan bahwa energi detour dapat dihitung dengan menggunakan matriks detour dan nilai eigen yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa formula energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum adalah $E_{DD}\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right) = 32n^2 - 16n + 2$ untuk setiap $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Keywords: Grup Quaternion Diperumum; Graf Invers; Energi Detour

Abstract

A generalized quaternion group (Q_{4n}) is a non-abelian group with a $4n$ order constructed from the two elements a, b that is denoted by $\{a, b\}$ defined as $Q_{4n} = \{a, b | a^{2n} = e, b^2 = a^n, b \cdot a \cdot b^{-1} = a^{-1}\}$ where the e is the identity, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. The inverse graph of a group is a graph which the vertices set are all elements of a finite group and two distinct vertices u and v are adjacent if and only if either $u \cdot v \in S$ or $v \cdot u \in S$. Graph energy, especially detour energy, is an important aspect in graph theory that describes network stability and resistance. The method used in this research is a qualitative method. This study aims to determine the formula of the detour energy in the inverse graph of the quaternion group is announced with $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Through algebra analysis methods and graph theory, it is found that detour energy can be calculated using the detour matrix and the resulting eigen value. The results showed that the detour energy formula in the inverse graph from the quaternion group was founded was $E_{DD}\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right) = 32n^2 - 16n + 2$ for each $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Keywords: Generalized Quaternion Group; Inverse Graph; Detour Energy

PENDAHULUAN

Matematika merupakan bidang ilmu yang mempelajari penalaran logis dan sistematis. Matematika memiliki banyak macam cabang ilmu di antaranya aljabar abstrak dan matematika diskrit [1]. Aljabar abstrak mempelajari struktur-struktur matematika seperti ring, grup, lapangan beserta sifat-sifatnya. Sedangkan matematika diskrit mengkaji topik-topik seperti graf, aljabar *boole*, relasi, dan lain-lain [2]. Dua topik menarik dalam aljabar abstrak dan matematika diskrit adalah graf dan grup.

Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner tertutup dan asosiatif [3]. Himpunan tak kosong tersebut juga harus mempunyai elemen identitas

Submitted: 27 November 2024 Reviewed: 9 Februari 2024 Accepted: 24 Februari 2025
Doi: https://dx.doi.org/10.18860/jrmm.v4i2.30060

dan setiap elemennya mengandung invers. Grup yang operasi binernya bersifat komutatif disebut grup abelian. Jika jumlah elemen dalam grup tersebut berhingga maka grup itu disebut grup hingga. Sebaliknya, jika elemennya tak hingga disebut grup tak hingga[4] .

Grup yang dibahas pada penelitian ini adalah grup quaternion diperumum. Grup Quaternion pertama kali diperkenalkan oleh William Rowan Hamilton pada tahun 1843 sebagai sistem bilangan hiperkompleks yang memperluas bilangan kompleks ke dalam empat dimensi. Grup quaternion merupakan grup non-abelian dengan orde 8, yang dinotasikan dengan Q_8 [4]. Perkembangan lebih lanjut dalam teori grup mengarah pada *generalisasi Group quaternion*, atau yang dikenal sebagai grup quaternion diperumum yang dinotasikan dengan Q_{4n}. Grup quaternion diperumum merupakan grup non-kumutatif dengan orde $4n$, $n \geq 2$, dengan n adalah bilangan bulat dengan operasi perkalian [5]. Grup quaternion tersebut dapat diterapkan pada bentuk graf. Dengan kata lain, graf tersebut terbentuk dari grup quaternion diperumum.

Graf G merupakan pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi [6]. Banyak unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$ [7].

Salah satu graf yang dapat dibentuk dengan menggabungkan struktur graf dan grup adalah graf invers. Graf invers diperkenalkan oleh Alfuraidan dan Zakariya, dua ilmuwan matematika, pada tahun 2017 [8]. Misalkan Γ adalah grup berhingga dan S adalah suatu himpunan yang beranggotakan unsur dari Γ yang inversnya bukan dirinya sendiri yaitu $S = \{u \in \Gamma : u \neq u^{-1}\}$. Graf invers dari Γ dinotasikan dengan $G_S(\Gamma)$ dan didefinisikan dengan graf yang himpunan titiknya adalah himpunan Γ dan dua elemen berbeda u dan v terhubung langsung di $G_S(\Gamma)$ jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ [9].

Energi graf merupakan salah satu topik utama dalam studi teori graf, analisis jaringan kompleks, dan bioinformatika [10]. Energi graf menggambarkan karakteristik penting pada sebuah jaringan seperti kestabilan, ketahanan, modularitas, maupun kecenderungan evolusi. Jaringan dengan energi tinggi cenderung lebih mudah terganggu dan tidak stabil. Sedangkan jaringan dengan energi rendah memiliki alur informasi yang optimal [11]. Salah satu konsep turunan dari energi graf adalah energi detour yang memfokuskan pada ketahanan. Pemahaman energi graf telah berdampak luas pada berbagai bidang seperti biologi, kimia, fisika, transportasi, dan ilmu sosial [12].

Adapun penelitian terdahulu tentang energi graf dilakukan oleh Balakrishnan (2004) tentang konsep energi dari sebuah graf sederhana [13]. Penelitian lain juga dilakukan oleh Das & Mojallal (2014) tentang energi laplacian dari graf [14]. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Ayyaswamy & Balachandran (2010) tentang spektrum detour dari beberapa jenis graf [15].

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti akan mengkaji topik energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum. Topik ini menarik untuk diteliti karena menggabungkan dua bidang matematika, yaitu aljabar melalui struktur grup quaternion diperumum dan teori graf. Pertama berproses pada struktur aljabar dalam grup, kemudian berproses pada teori graf, dan selanjutnya menggabungkan antara grup dan graf. Hasil akhir yang akan ditunjukkan dalam penelitian ini adalah energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini meliputi Langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan invers dari semua unsur Q_{4n},
2. Menentukan himpunan bagian $S \subseteq Q_{4n}$ dengan $S \coloneqq \{x \in Q_{4n} : x^{-1} \neq x\}$,
3. Menentukan keterhubungan titik di $\Gamma_S(Q_{4n})$,
4. Menentukan matriks detour dari $\Gamma_S(Q_{4n})$,
5. Menentukan polinomial karakteristik dan nilai eigen dari matriks detour pada $\Gamma_S(Q_{4n})$,
6. Menentukan energi detour pada $\Gamma_S(Q_{4n})$,

untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari proses percobaan perhitungan masing-masing energi detour dari grup quaternion diperumum. Maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 1 Tabel Energi Detour

n	Q_{4n}	S	E_{DD}
2	Q_8	$Q_8 \backslash \{1, a^2\}$	$98 = (32 \times 2^2) - (16 \times 2) + 2$
3	Q_{12}	$Q_{12} \backslash \{1, a^3\}$	$242 = (32 \times 3^2) - (16 \times 3) + 2$
4	Q_{16}	$Q_{16} \backslash \{1, a^4\}$	$450 = (32 \times 4^2) - (16 \times 4) + 2$
5	Q_{20}	$Q_{20} \backslash \{1, a^5\}$	$722 = (32 \times 5^2) - (16 \times 5) + 2$

Dari penjelasan pada Tabel 1 diperoleh $E_{DD}\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) = 32n^2 - 16n + 2$ untuk $n \in \{2,3,4,5\}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$E_{DD}\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) = 32n^2 - 16n + 2,$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lemma 1

Misalkan $S \subseteq Q_{4n}$ dan $S = \{x \in Q_{4n} | x^{-1} \neq x\}$. Maka $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Bukti

$1^{-1} = 1$ karena $1 \cdot 1 = 1$.

$(a^n)^{-1} = a^n$ karena $a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1$.

Misalkan $v \in Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$.

Kasus 1: $v = a^i$ untuk suatu $i \in \{1,2, \dots ,2n-1\}, i \neq n$.

Andaikan $v \notin S$ maka $v \cdot v = a^i \cdot a^i = a^{2i} = 1$. Solusi dari permasalahan tersebut adalah $2i = 0 \Leftrightarrow i = 0$ atau $i = n$. Kontradiksi bahwa $v \notin \{1, a^n\}$. Dengan demikian $a^i \in S$ untuk setiap $i \in \{1,2, \dots ,2n-1\}, i \neq n$.

Kasus 2: $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0,1,2, \dots ,2n-1\}$.

Jika $v = a^i b$ untuk suatu $i \in \{0,1,2, \dots ,2n-1\}$, maka

$$\begin{aligned} v \cdot v &= a^i b \cdot a^i b \\ &= a^i b a^i b^{-1} b b \\ &= a^i a^{-i} b^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Sehingga $\left(a^i b\right)^{-1} \neq a^i b$ untuk setiap $i \in \{0,1,2, \dots ,2n-1\}$.

Dengan demikian $a^i b \in S$ untuk setiap $i \in \{0,1,2, \dots ,2n-1\}$. Jadi, terbukti bahwa $S = Q_{4n} \setminus \{1, a^n\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Selanjutnya akan ditentukan titik di $\Gamma_S(Q_{4n})$ yang terhubung langsung dengan $\{1, a^n\}$ sebagai berikut:

Lemma 2

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, berlaku:

1. $\{1, v\} \in E\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ untuk setiap $v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) \setminus \{1, a^n\}$.
2. $\{b, v\} \in E\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ untuk setiap $v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n}\,)\big) \setminus \{b, a^n b\}$.

Bukti

1. $\{1, v\} \in E\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ untuk setiap $v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) \setminus \{1, a^n\}$.

   Misalkan $v \in S$, artinya $v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ dan $v \neq 1$.

   Andaikan $b \cdot v \notin S$ maka $b \cdot v = 1$ atau $b.v = a^n$.

   Kasus 1: Jika $b \cdot v = 1$, maka $v = a^n b$ karena

   $$b \cdot a^n b = b \cdot b \cdot a^n = b^2 \cdot a^n = a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1.$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.
Kasus 2: Jika $b \cdot v = a^n$, maka $v = b$ karena

$$b \cdot v = a^n \Rightarrow b^2 \cdot v = a^n \Rightarrow v = b \cdot a^n \cdot a^n = b.a^{2n} = b.$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.
Dengan demikian, $b \cdot v \in S$, sehingga $v \notin \{b, a^n b\}$. Oleh karena itu, $\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$.

2. $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}$.
Misalkan $v \in S$, berarti $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $v \neq b$.
Andaikan $b \cdot v \notin S$, maka $b \cdot v = 1$ atau $b.v = a^n$.
Kasus 1: Jika $b \cdot v = 1$, maka $v = a^n b$ karena
$b \cdot a^n b = b \cdot b^2 \cdot b = b^2 \cdot b^2 = a^n \cdot a^n = a^{2n} = 1$.
Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.
Kasus 2: Jika $b \cdot v = a^n$, maka $v = b$ karena

$$b \cdot v = a^n \Rightarrow b^2 \cdot v = a^n \Rightarrow v = b \cdot a^n \cdot a^n = b.a^{2n} = b.$$

Kontradiksi karena $v \notin \{b, a^n b\}$.
Dengan demikian, $b \cdot v \in S$, sehingga $v \notin \{b, a^n b\}$. Oleh karena itu, $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n b\}$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\{1, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$ untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{1, a^n\}$, dan $\{b, v\} \in E(\Gamma_S(Q_{4n}))$, untuk setiap $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})) \setminus \{b, a^n n\}$.

Lemma 3
Misal $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dan $S = V(\Gamma_S(Q_{4n}))\setminus\{1, a^n\}$. a^i terhubung langsung dengan $a^j b$ di $\Gamma_S(Q_{4n})$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq 2n - 1$.
Bukti
Misalkan $v \in S$, artinya $v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dan $v \neq 1$.
Andaikan $a^i \cdot a^j b \notin S$ maka $a^i \cdot a^j b = a^0$ atau $a^i \cdot a^j b = a^n$.
Kasus 1: $a^i \cdot a^j b = a^0$

$$\begin{aligned} a^i \cdot a^j b &= 1 \\ \Leftrightarrow a^i \cdot a^j \cdot b &= 1 \\ \Leftrightarrow a^{i+j} \cdot b &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga tidak ada i, j yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan demikian $a^i \cdot a^j b \in S$.
Kasus 2: $a^i \cdot a^j b = a^n$

$$\begin{aligned} a^i \cdot a^j b &= a^n \\ \Leftrightarrow a^i \cdot a^j \cdot b &= a^n \\ \Leftrightarrow a^{i+j} \cdot b &= a^n \end{aligned}$$

Sehingga tidak ada i, j yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan demikian $a^i \cdot a^j b \in S$.
Kedua kasus di atas telah menunjukkan bahwa asumsi $a^i \cdot a^j b \notin S$ kontradiksi karena $1 \notin S$ dan $a^n \notin S$. Dengan demikian, terbukti bahwa a^i terhubung langsung dengan $a^j b$ di $\Gamma_S(Q_{4n})$ untuk setiap $0 \leq i, j \leq 2n - 1$.

Lemma 4
Terdapat lintasan Hamilton $u - v$, untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n}))$ $u \neq v$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Bukti
Misalkan $s = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ dan $t = \{b, ab, a^2 b, \dots, a^{n-1} b\}$. Untuk membuktikan bahwa terdapat lintasan Hamilton antara dua titik u dan v di graf $\Gamma_S(Q_{4n})$, akan dibuktikan dengan tiga kasus yang berbeda yaitu

1. $u \in s$ dan $v \in t$ atau $u \in t$ dan $v \in s$,
2. $u, v \in s$,
3. $u, v \in t$.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $u, v \in V(\Gamma_S(Q_{4n})), u \neq v$, terdapat lintasan Hamilton $u - v$. Berikut ini adalah tiga kasus yang akan dibuktikan:

Kasus 1: $u \in s$ dan $v \in t$ atau $u \in t$ dan $v \in s$
Misalkan $u \in s$ dan $v \in t$. Titik-titik s dinyatakan sebagai $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ dan titik t dinyatakan sebagai $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Dengan asumsi $s_0 = u$ dan $t_{n-1} = v$ (atau sebaliknya), berikut adalah langkah-langkah untuk menentukan lintasan Hamiltonnya.
1. Mulai dari titik s_0.
2. Pilih titik berikutnya dari himpunan t secara acak dan tambahkan ke lintasan.
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s atau t sampai mencapai titik t_{n-1}. Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t.

Untuk unsur $u \in t$ dan $v \in s$ analog dengan pembuktian tersebut.

Kasus 2: $u \in s$ dan $v \in s$
Misalkan urutan titik s dinyatakan sebagai $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$.
Dengan asumsi awal $s_0 = u$ dan $s_{n-1} = v$, berikut adalah langkah-langkah pembuktiannya:
1. Mulai dari titik awal $s_0 = u$
2. Kemudian tambahkan titik b dan ab kedalam lintasan sehingga diperoleh lintasan $u - b - ab$
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s dan t sampai mencapai titik s_{n-1}. Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t.

Kasus 3: $u \in t$ dan $v \in t$
Misalkan urutan titik t dinyatakan sebagai $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$.
Dengan asumsi awal $t_0 = u$ dan $t_{n-1} = \ t_{n-1}$, berikut adalah langkah-langkah pembuktiannya:
1. Mulai dari titik $t_0 = u$
2. Kemudian tambahkan titik 1 dan a ke dalam lintasan sehingga diperoleh lintasan $u - 1 - a$.
3. Secara bergantian, pilih titik berikutnya dari himpunan s dan t sampai mencapai titik t_{n-1}. Hal ini mungkin karena setiap titik di s terhubung langsung di setiap titik di t.

Berdasarkan setiap kasus di atas, telah ditunjukkan bahwa ada lintasan Hamilton antara u dan v untuk setiap $u, v \in \mathrm{V}(\Gamma_S(Q_{4n}))$ dengan $u \neq v$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1
Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $S = Q_{4n} \backslash \{1, a^n\}$. Energi detour di graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

$$Q_{4n} = 32n^2 - 16n + 2.$$

Bukti:
Menurut lemma 1 sampai 4 diketahui bahwa terdapat lintasan Hamilton $u - v$ untuk setiap $u, v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ dan $u \neq v$. Dengan demikian matriks $u, v \in V\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big)$ energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum adalah

$$DD\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks detour tersebut, maka dapat diperoleh polinomial karakteristik dan nilai eigen sebagai berikut:
$\det\big(DD\big(\Gamma_S(Q_{4n})\big) - \lambda I\big)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda+(4n-1) & (4n-1)+(4n-1) & \cdots & (4n-1)+(4n-1) \\ (4n-1)+(4n-1) & -\lambda+(4n-1) & \cdots & (4n-1)+(4n-1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (4n-1)+(4n-1) & (4n-1)+(4n-1) & \cdots & -\lambda+(4n-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda+(4n-1) & 2(4n-1) & \cdots & 2(4n-1) \\ 2(4n-1) & -\lambda+(4n-1) & \cdots & 2(4n-1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 2(4n-1) & 2(4n-1) & \cdots & -\lambda+(4n-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untuk menghitung determinan dari matriks ini, kita bisa menggunakan hasil khusus untuk matriks simetris dengan elemen diagonal d dan elemen off-diagonal c. Jika $A+B$ adalah matriks $2n \times 2n$ dengan elemen diagonal d dan elemen non-diagonal c, maka determinan $A+B$ dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:
$\det(A+B) = (d-c)^{n-1}(d+(n-1)c)$
dengan $d = -\lambda + 4n - 1$, $c = 8n - 2$ maka
$d - c = -\lambda + 4n - 1 - (8n-2) = -\lambda - 4n + 1$

$$\begin{aligned} d(n-1)c &= \left(-\lambda + 4n - 1 + (2n-1)(8n-2)\right) \\ &= -\lambda + 4n - 1 + 16n^2 - 4n - 8n + 2 \\ &= -\lambda + 16n^2 - 8n + 1 \end{aligned}$$

$$\det(A+B) = (d-c)^{n-1}(d+(n-1)c)$$
$$= (-\lambda-4n+1)^{2n-1}(-\lambda+16n^2-8n+1)$$
$$= (-\lambda-4n+1)^{2n-1}(-\lambda+(4n-1)^2)$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -\lambda & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & -\lambda & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\lambda-(4n-1) & (4n-1)-(4n-1) & \cdots & (4n-1)-(4n-1) \\ (4n-1)-(4n-1) & -\lambda-(4n-1) & \cdots & (4n-1)-(4n-1) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (4n-1)-(4n-1) & (4n-1)-(4n-1) & \cdots & -\lambda-(4n-1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\lambda-(4n-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda-(4n-1) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda-(4n-1) \end{bmatrix}$$

Ini adalah matriks diagonal dengan elemen diagonalnya $-\lambda-(4n-1)$.
Determinannya dapat dihitung dengan mengalikan elemen-elemen diagonalnya
$$\det(A-B) = \left(-\lambda-(4n-1)\right)^{2n}$$
$$= (-\lambda-4n+1)^{2n}$$
Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:
$$\det\left(DD\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right)-\lambda I\right) = \det(A+B)\cdot\det(A-B) = 0$$
$$= (-\lambda-4n+1)^{2n-1}(-\lambda+(4n-1)^2)\cdot(-\lambda-4n+1)^{2n} = 0$$
$$= (-\lambda-4n+1)^{4n-1}(-\lambda+(4n-1)^2) = 0$$
atau $p(\lambda) = (-\lambda-4n+1)^{4n-1}(-\lambda+(4n-1)^2)$
Dengan demikian, diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $DD\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right)$ adalah sebagai berikut:
$\lambda_1 = -4n+1$ dengan multiplisitas $4n-1$
$\lambda_2 = (4n-1)^2$ dengan multiplisitas 1

Jadi, energi detour dari $\Gamma_S(Q_{4n})$ adalah sebagai berikut:
$$E_{DD}\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right) = \sum_{i=n}^{n}|\lambda_i|$$
$$= 4n-1\cdot|(-4n+1)| + 1\cdot|(4n-1)^2|$$
$$= 4n-1\cdot(4n-1)+(4n-1)^2$$
$$= (4n-1)^2+(4n-1)^2$$
$$= 2(4n-1)^2$$
$$= 2(16n^2-8n+1)$$
$$= 32n^2-16n+2$$

KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil dan pembahasan pada penelitian ini adalah bahwa formula energi detour pada graf invers dari grup quaternion diperumum dapat dinyatakan dengan rumus
$$E_{DD}\left(\Gamma_S(Q_{4n})\right) = 32n^2-16n+2$$
dengan Γ_S merupakan graf invers dan Q_{4n} adalah grup quaternion yang diperumum dengan $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Formula ini memberikan hubungan langsung antara parameter n pada grup quaternion dan energi *detour* dari graf invers yang dihasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, *Teori Graf: Topik dasar untuk tugas akhir/skripsi*. 2009.

[2] U. Jannah *et al.*, "Indeks jumlah jarak eksentrik graf invers dari grup quaternion diperumum," 2023.

[3] J. A. Gallian, "contemporary abstract algebra," Ninth edit.,

[4] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract_algebra_Third_Edition_Foote_Dum.pdf*, Third edit. John wiley & Sons, Inc, 2004.

[5] X. L. Ma, H. Q. Wei, and G. Zhong, "The Cyclic Graph of a Finite Group," *Algebra*, vol. 2013, pp. 1–7, 2013, doi: 10.1155/2013/107265.

[6] R. B. Bapat, *Graphs and matrices*. 2010. doi: 10.1017/cbo9780511659843.006.

[7] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & digraphs*. 2010. doi: 10.1201/b19731.

[8] M. R. Alfuraidan and Y. F. Zakariya, "Inverse graphs associated with finite groups," *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 5, no. 1, pp. 142–154, 2017, doi: 10.5614/ejgta.2017.5.1.14.

[9] A. Abdussakir, "Detour Energy of Complement of Subgroup Graph of Dihedral Group," *ZERO J. Sains, Mat. dan Terap.*, vol. 1, no. 2, pp. 41–48, 2017, doi: 10.30829/zero.v1i2.1460.

[10] I. Gutman, S. Z. Firoozabadi, J. A. De La Peña, and J. Rada, "On the energy of regular graphs," *Match*, vol. 57, no. 2, pp. 435–442, 2007.

[11] K. Erciyes, "Graph-Theoretical Analysis of Biological Networks: A Survey," 2023, doi: 10.20944/preprints202307.1012.v1.

[12] Larson, Edwards, and Falvo, *Elementary linear algebra. Cengage Learning*, Sixth edit. 2009.

[13] R. Balakrishnan, "The energy of a graph," *Linear Algebra Appl.*, vol. 387, no. 1-3 SUPPL., pp. 287–295, 2004, doi: 10.1016/j.laa.2004.02.038.

[14] K. C. Das and S. A. Mojallal, "On Laplacian energy of graphs," *Discrete Math.*, vol. 325, no. 1, pp. 52–64, 2014, doi: 10.1016/j.disc.2014.02.017.

[15] S. K. Ayyaswamy and S. Balachandran, "On detour spectra of some graphs," *World Acad. Sci. Eng. Technol.*, vol. 67, no. 7, pp. 529–531, 2010.