

Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Tengah dari Graf Ilalang

Dewi Nur Angriani Rauf*, Novianita Achmad, Nisky Imansyah Yahya, Nurwan,
Salmun K. Nasib, Asriadi

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas
Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96554, Indonesia

Email: dewirauf03@gmail.com

ABSTRAK

Bilangan terhubung pelangi, yang dinyatakan dengan $rc(G)$, adalah jumlah warna terkecil yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi dari sebuah graf G sehingga graf tersebut menjadi terhubung pelangi. Konsep bilangan terhubung pelangi dapat diteliti melalui berbagai jenis pengembangan graf yang dimodifikasi, salah satunya adalah graf tengah. Graf tengah, yang dinyatakan dengan $M(G)$, dibentuk dari sebuah graf G dan didefinisikan sebagai gabungan dari simpul dan sisi graf G . Dua simpul pada $M(G)$ bersisian jika dan hanya jika keduanya bersisian dengan sisi dalam G , atau salah satu simpul dalam G bersisian dengan sisi dalam G . Penelitian ini berfokus pada pewarnaan pelangi pada graf tengah dari graf ilalang dengan jumlah simpul tiga dan jumlah sisi yang lebih besar atau sama dengan tiga. Berdasarkan penelitian ini, diperoleh teorema bilangan terhubung pelangi pada graf tengah graf ilalang, yaitu bilangan terhubung pelangi pada graf tengah graf ilalang adalah tiga kali jumlah sisi untuk jumlah sisi lebih besar atau sama dengan tiga.

Kata kunci: Bilangan Terhubung Pelangi; Graf Tengah; Graf Ilalang

ABSTRACT

Rainbow connected number, denoted as $rc(G)$, is the smallest number of colors needed to color the edges of a graph G such that the graph becomes rainbow connected. Rainbow connected numbers can be explored through various forms of modified graph development, one of which is the middle graph. A middle graph, denoted by $M(G)$, is formed from a graph G and is defined as the union of the vertices and edges of graph G . Two vertices in $M(G)$ are adjacent if and only if they are adjacent to an edge in G , or one of the vertices in G is adjacent to an edge in G . This study focuses on rainbow coloring of the middle graph of the ilalang graph with three vertices and the number of edges greater than or equal to three. Based on the research, it is obtained that the rainbow connected number theorem on the middle graph of the ilalang graph is three times the number of edges for the number of edges greater than or equal to three.

Keywords: Rainbow Connection; Middle Graph; Ilalang Graph

Copyright © 2025 by Authors, Published by JRMM Group. This is an open access article under the CC BY-SA License (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

PENDAHULUAN

Perkembangan sains dan teknologi tidak terlepas dari peran penting disiplin ilmu matematika dalam pengembangan konsep dan teori. Matematika sebagai bidang ilmu pengetahuan yang terus berkembang dengan cepat, memegang peranan penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan yang ada. Teori graf adalah cabang ilmu matematika yang dapat digunakan untuk merepresentasikan atau mendeskripsikan suatu permasalahan agar lebih mudah dipahami.

Teori graf pertama kali dikemukakan seorang ilmuwan matematika asal Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736. Saat itu, Euler berusaha untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg yang melintasi Sungai Pregel, Rusia. Masalah tersebut merupakan pernyataan dari masyarakat kota Königsberg kepada Euler, apakah tujuh jembatan yang ada mungkin untuk dilintasi, dengan syarat bahwa setiap jembatan hanya boleh dilewati tepat satu kali. Permasalahan tersebut kemudian berhasil dipecahkan dengan memodelkannya ke dalam bentuk graf [1].

Beberapa bidang kajian teori graf yang sering dibahas dalam topik penelitian diantaranya adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf merupakan proses pemetaan unsur-unsur graf baik titik, sisi ataupun sisi dan titik ke himpunan bilangan bulat positif, yang disebut juga sebagai label [2]. Salah satu kajian mengenai pelabelan graf dilakukan oleh [3] yang meneliti terkait pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful, dan pelabelan $\hat{p}$ pada graf ilalang $(S_{n,r})$. Pelabelan graf sendiri mempunyai suatu kasus khusus yaitu pewarnaan graf. Proses pewarnaan pada setiap titik, sisi, maupun wilayah dalam sebuah graf G , sedemikian rupa sehingga setiap unsur-unsur graf yang merupakan tetangga mempunyai warna yang berbeda-beda disebut dengan pewarnaan graf [4].

Salah satu konsep dari pewarnaan graf adalah pewarnaan pelangi, yang pertama kali diperkenalkan oleh [5]. Jika dalam suatu graf G terdapat lintasan pelangi di antara dua titik sehingga setiap sisi pada lintasan tersebut diberi warna yang berbeda, maka graf tersebut dikatakan terhubung pelangi. [6] menjelaskan bahwa pewarnaan pelangi berkaitan erat dengan konsep keterhubungan graf dan merupakan dasar dalam konsep bilangan terhubung pelangi. Bilangan terhubung pelangi dari sebuah graf G merupakan jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi dari graf G agar graf tersebut terhubung pelangi, dan dinotasikan dengan $rc(G)$. Selain itu, sisi-sisi yang termasuk dalam lintasan pelangi harus memiliki warna yang berbeda. Sebuah graf yang berukuran m sisi dan mempunyai diameter $diam(G)$, berlaku hubungan $diam(G) \leq rc(G) \leq m$ [5]. Beberapa penelitian tentang bilangan terhubung pelangi sebelumnya telah diteliti oleh [7] pada beberapa graf khusus, yaitu pada graf lingkaran (C_n) , graf lengkap (K_n) , dan graf pohon (T_n) , [8] meneliti bilangan terhubung pelangi pada graf antiprisma (AP_n) dan graf lengkap (K_4) dengan menggunakan operasi korona dan [9] pada graf bunga $(W_m K_n)$ dan graf lemon (Le_n) .

Konsep bilangan terhubung pelangi juga dapat dikaji dalam beberapa bentuk modifikasi pengembangan graf, yaitu graf tengah (*middle graph*). Semua jenis graf, baik sederhana maupun kompleks, dapat direpresentasikan dalam bentuk graf tengah. Graf tengah terbentuk dari sebuah graf G dan didefinisikan $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$. Dua titik di $M(G)$ bertetangga jika dan hanya jika kedua titik tersebut merupakan sisi yang saling bertetangga pada graf G , atau salah satu titik tersebut merupakan titik dari G yang bersisian dengan sisi dari graf G [10]. Penelitian yang dilakukan oleh [11] membahas bilangan kromatik lokasi pada bentuk modifikasi graf, seperti graf bayangan dan graf tengah pada graf bintang. Selanjutnya, penelitian [12] membuktikan kesetaraan angka dominasi italia, 2-rainbow dan romawi pada graf tengah. Penelitian lain oleh [13]

mengkaji pewarnaan dominator total dalam graf, khususnya pada graf tengah. Selain itu, [14], [15] juga meneliti beberapa bentuk modifikasi graf termasuk graf tengah pada graf kelabang dan graf sapu.

Berdasarkan beberapa penelitian sebelumnya, telah dilakukan penelitian pada beberapa jenis graf untuk memahami bentuk dari graf tengah pada suatu graf. Untuk itu, penulis tertarik untuk mengkaji bagaimana masalah bilangan terhubung pelangi pada graf tengah dari graf ilalang ($S_{n,r}$) yang merupakan representasi graf dari r buah graf bintang (S_n).

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur (*library research*), yaitu mengkaji sumber dari jurnal ilmiah dan artikel yang relevan dengan bilangan terhubung pelangi pada graf tengah yang bertujuan untuk memperoleh informasi dan metode yang akan digunakan dalam pembahasan masalah terkait. Berikut tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian ini:

1. Menggambar graf tengah $M(G)$ dari graf ilalang ($S_{3,r}$).
2. Menentukan dan memperoleh pola bilangan terhubung pelangi $rc(G)$ yang diperoleh dari gambar pada tahap satu tersebut sehingga diperoleh teorema.
3. Membuktikan teorema bilangan terhubung pelangi berdasarkan gambar graf yang dihasilkan pada tahap satu.
4. Merumuskan kesimpulan

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Graf Tengah ($M(G)$) dari Graf Ilalang ($S_{3,r}$)

Definisi 1 : Misalkan r bilangan bulat dengan $r \geq 3$. $M(S_{3,r})$ merupakan graf G yang dihasilkan melalui pembentukan graf tengah dari graf ilalang ($S_{3,r}$). Sehingga, graf G didefinisikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 V(G) &= \{u\} \cup \{u'_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{u_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{v'_i | i \in [1, 3r]\} \cup \{v_i | i \in [1, 3r]\} \\
 E(G) &= \{uu'_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{u'_i u_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{u'_i u'_{i+k} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], k \in [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]\} \cup \\
 &\quad \{u_i v'_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{u_i v'_{i+1} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{u_i v'_{i+2} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{u'_i v'_i | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{u'_i v'_{i+1} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{u'_i v'_{i+2} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{v'_i v'_{i+1} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \{v'_{i+1} v'_{i+2} | i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]\} \cup \\
 &\quad \{v'_i v_i | i \in [1, 3r]\}
 \end{aligned}$$

2. Bilangan Terhubung Pelangi $M(S_{3,r})$

Teorema 2. Misalkan r merupakan bilangan bulat dengan $r \geq 3$ dan $G \cong M(S_{3,r})$, maka :

$$rc(G) = 3r$$

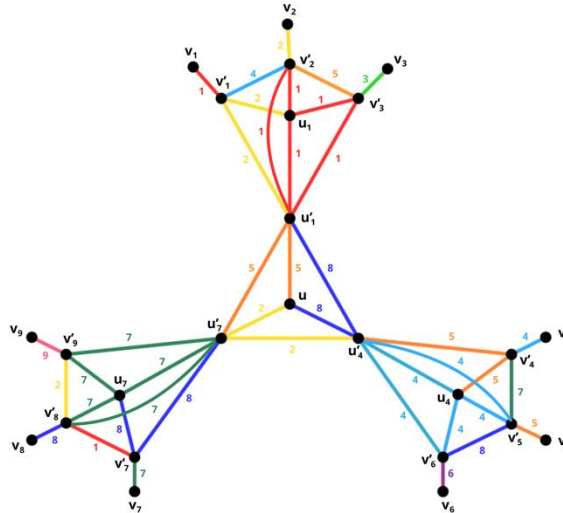
Bukti. Berdasarkan teorema Chartrand dkk. (2008) diketahui bahwa $rc(G) \geq diam(G)$. Apabila $rc(G) = diam(G)$ cukup ditunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, rc(G)\}$. Sedangkan jika $rc(G) > diam(G)$ perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Oleh karena itu, pembuktian pada Teorema 2 ini dibagi menjadi dua kasus pembuktian. Untuk r ganjil, karena $rc(G) > diam(G)$, maka perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Sedangkan, untuk r genap karena $rc(G) > diam(G)$, maka dibuktikan juga dengan kontradiksi.

Kasus 1. r ganjil, $diam = 5$

Diketahui $rc(G) > 5$, terdapat sisi yang merupakan pendant yaitu sisi $v'_i v_i$, sehingga untuk membuat graf tersebut terhubung pelangi dengan warna paling minimum maka semua sisi $v'_i v_i$ haruslah diberi warna yang berbeda sebanyak $3r$. Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc(M(S_{3,r})) \neq 3r - 1$. Andaikan $rc(M(S_{3,r})) = 3r - 1$, maka terdapat c warna yang merupakan suatu pewarnaan pelangi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r - 1\}$. Perhatikan jika sisi-sisi pendant $v'_i v_i$ diberikan warna $1, 2, 3, \dots, 3r - 1$, maka terdapat sisi $v'_i v_i$ yang mempunyai warna sama dengan sisi $v'_i v_i$ lainnya. Hal ini menyebabkan suatu lintasan $v_i - v_j$ pada graf $M(S_{3,r})$ tidak pelangi. Oleh karena graf $M(S_{3,r})$ tidak dapat diwarnai dengan $3r - 1$, maka pengandaian salah, dan terbukti bahwa $rc(M(S_{3,r})) = 3r$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinisikan pewarnaan pelangi dari graf $M(S_{3,r})$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c(u_i v'_{i+1}) &= c(u_i v'_{i+2}) = c(u'_i v'_{i+1}) = c(u'_i v'_{i+2}) = i & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u_i) &= i & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u_i v'_i) &= c(u'_i v'_i) = i + 1 & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u u_i) &= (i + 4) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u'_{i+3}) &= (i + 3r - 2) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u'_{i+k}) &= i + 3 & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], \\
 & & k \in [6, 9, \dots, 3r - i - 5] \\
 c(u'_i u'_{3r-2}) &= i + 3 & i \in [4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_{3r-2} u'_1) &= \frac{3r + 1}{2} \\
 c(v'_i v'_{i+1}) &= (i + 3) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(v'_{i+1} v'_{i+2}) &= (i + 4) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(v'_i v_i) &= i & i \in [1, 3r]
 \end{aligned}$$

Ilustrasi bilangan terhubung pelangi pada graf tengah dari graf ilalang $M(S_{3,3})$ dapat dilihat dalam gambar 1 berikut :



Gambar 1. Pewarnaan Pelangi pada Graf $M(S_{3,3})$

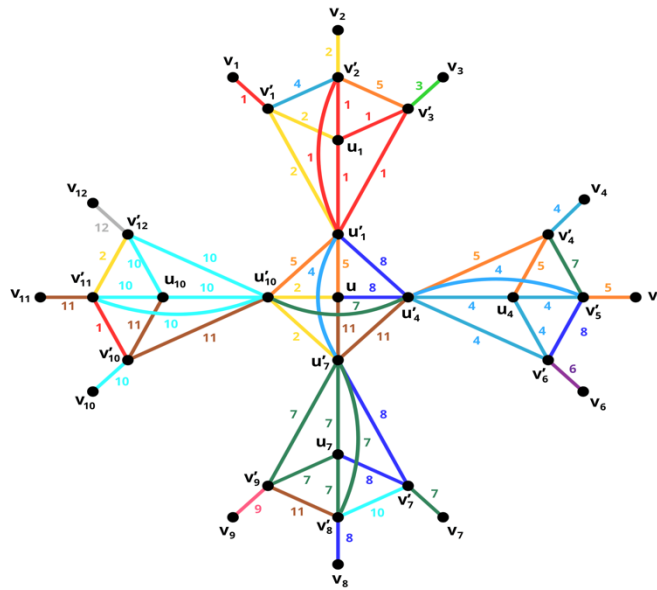
Kasus 2. r genap, $diam = 5$

Pada kasus r genap dengan diameter graf sebesar 5, analisis pewarnaan pelangi dilakukan untuk menentukan jumlah warna minimum yang diperlukan agar graf $M(S_{3,r})$ menjadi terhubung pelangi. Sama seperti pada kasus r ganjil, sisi-sisi pendant $v'_i v_i$, harus diberi warna yang berbeda sebanyak $3r$ untuk membuat graf tersebut terhubung pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa asumsi $rc(M(S_{3,r})) \neq 3r - 1$ tidak berlaku. Jika $rc(M(S_{3,r})) = 3r - 1$, maka akan ada pewarnaan pelangi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3r - 1\}$. Namun, jika sisi-sisi pendant $v'_i v_i$ diberikan warna $1, 2, 3, \dots, 3r - 1$, maka akan terdapat dua sisi $v'_i v_i$ yang memiliki warna sama. Hal ini menyebabkan suatu lintasan $v_i - v_j$ pada graf $M(S_{3,r})$ tidak pelangi. Oleh karena itu, graf $M(S_{3,r})$ tidak dapat diwarnai dengan $3r - 1$ warna, sehingga pengandaian tersebut salah. Dengan demikian, terbukti bahwa $rc(M(S_{3,r})) = 3r$. Tanpa mengurangi keumuman, pewarnaan pelangi dari graf $M(S_{3,r})$ pada kasus ini didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 c(u_i v'_{i+1}) &= c(u_i v'_{i+2}) = c(u'_i v'_{i+1}) = c(u'_i v'_{i+2}) = i & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u_i) &= i & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u_i v'_i) &= c(u'_i v'_i) = i + 1 & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u u_i) &= (i + 4) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u'_{i+3}) &= (i + \frac{3r+2}{2}) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_i u'_{i+k}) &= i + 3 & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], \\
 & & k \in [6, 9, \dots, 3r - i - 5] \\
 c(u'_i u'_{3r-2}) &= i + 3 & i \in [4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(u'_{3r-2} u'_1) &= \frac{3r-2}{2} \\
 c(v'_i v'_{i+1}) &= (i + 3) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(v'_{i+1} v'_{i+2}) &= (i + 4) \bmod 3r & i \in [1, 4, 7, \dots, 3r - 2] \\
 c(v'_i v_i) &= i & i \in [1, 3r]
 \end{aligned}$$

Ilustrasi bilangan terhubung pelangi pada graf tengah dari graf ilalang

$M(S_{3,4})$ dapat dilihat dalam gambar 2 berikut :



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi pada Graf $M(S_{3,4})$

Selanjutnya, lintasan pelangi untuk setiap pasangan $x, y \in E(G)$ dengan pewarnaan c pada graf tengah dari graf ilalang $M(S_{3,r})$ dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Lintasan Pelangi Graf $M(S_{3,r})$

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	u	u'_i	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2]$	u, u'_i, u_i
2	u	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = [i, i + 2]$	u, u'_i, v'_j
3	u	v_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = [i, i + 2]$	u, u'_i, v'_j, v_j
4	u'_i	u_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = (i + k) \bmod 3r$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u'_i, u'_j, u_j
5	u'_i	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u'_i, u'_l, v'_j
6	u'_i	v_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = [i, i + 2]$ $i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u'_i, v'_j, v_j u'_i, u'_l, v'_j, v_j
7	u_i	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u_i, u'_i, u'_l, v'_j
8	u_i	v_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = [i, i + 2]$ $i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u_i, v'_j, v_j $u_i, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
9	u_i	u_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = (i + k) \bmod 3r$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	u_i, u'_i, u'_j, u_j
10	v'_i	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	v'_i, u'_i, u'_l, v'_j
11	v'_{i+1}	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v'_{i+1}, u'_i, u'_l, v'_j$
12	v'_{i+2}	v'_j	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$	$v'_{i+2}, u'_i, u'_l, v'_j$

		$l = (i + k) \bmod 3r, k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	
		$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$	
13	$v'_i \quad v_j$	$l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v'_i, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
	$v_i \quad v'_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_i, v'_i, u'_i, u'_l, v'_j$
14	$v'_{i+1} \quad v_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v'_{i+1}, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
15	$v'_{i+2} \quad v_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v'_{i+2}, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
16	$v_{i+1} \quad v'_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_{i+1}, v'_{i+1}, u'_i, u'_l, v'_j$
17	$v_{i+2} \quad v'_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_{i+2}, v'_{i+2}, u'_i, u'_l, v'_j$
18	$v_i \quad v_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_i, v'_i, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
		$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = i + 1$	v_i, v'_i, v'_j, v_j
19	$v_{i+1} \quad v_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_{i+1}, v'_{i+1}, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$
		$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], j = i + 2$	$v_{i+1}, v'_{i+1}, v'_j, v_j$
20	$v_{i+2} \quad v_j$	$i = [1, 4, 7, \dots, 3r - 2], l = [l, l + 2],$ $l = (i + k) \bmod 3r,$ $k = [3, 6, 9, \dots, 3r - 3]$	$v_{i+2}, v'_{i+2}, u'_i, u'_l, v'_j, v_j$

Berdasarkan pewarnaan pelangi pada gambar 1 dan gambar 2, dan lintasan pelangi pada tabel 1 maka teorema 2 yang menyatakan $rc(M(S_{3,r})) = 3r$ untuk $r \geq 3$ terbukti.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan diperoleh bilangan terhubung pelangi pada graf tengah $M(G)$ dari graf ilalang $(S_{3,r})$ untuk $r \geq 3$ dengan r merupakan bilangan bulat dan $G \cong M(S_{3,r})$, maka $rc(M(S_{3,r})) = 3r$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F. Daniel and P. N. . Taneo, *Teori Graf*. Deepublish, 2019.
- [2] N. N. A. Andayani and I. G. N. Pujawan, "Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf $T(2,n,n+6)$," *Mandalika Mathematics Education Journal*, vol. 4, p. 46, 2022, doi: <http://dx.doi.org/10.29303/jm.v4i1.1763>.
- [3] Z. Amri and K. A. Sugeng, "Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf Ilalang," *Indonesia Journal of Education and Mathematical Science*, vol. 1, no. 1, pp. 1–7, 2020, doi: 10.30596/ijems.v1i1.2956.
- [4] A. Afriantini, H. Helmi, and F. Fran, "Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah Pada Graf Dan Penerapannya," *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 4, pp. 773–782, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i4.36037.

- [5] G. Chartrand, D. Erwin, P. Zhang, and M. Bohemica, "Rainbow Connection in Graphs," *Mathematica Bohemica*, vol. 133, no. 1, pp. 85–98, 2008, [Online]. Available: <http://eudml.org/doc/32579>.
- [6] K. A. Mamonto, N. I. Yahya, N. Nurwan, L. Yahya, D. Wungguli, and L. O. Nashar, "Bilangan Terhubung Titik Pelangi Kuat Graf Octa-Chain (OCm)," *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 10, no. 1, pp. 131–139, 2022, doi: 10.34312/euler.v10i1.15177.
- [7] D. Lestari and I. K. Budayasa, "Bilangan Keterhubungan Pelangi Pada Pewarnaan-Sisi Graf," *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 8, no. 1, pp. 25–34, 2020, doi: 10.26740/mathunesa.v8n1.p25-34.
- [8] K. N. Humolungo, S. Ismail, I. K. Hasan, and N. I. Yahya, "Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Antiprisma (APm) dan Graf Llengkap (K4)," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 11, no. 2, p. 112, 2022, doi: 10.25077/jmua.11.2.112-123.2022.
- [9] I. S. Kumala, "Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf lemon," *Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 39–48, 2019, doi: <https://doi.org/10.26594/jmpm.v4i1.1618>.
- [10] S. K. Vaidya and D. D. Bantva, "The $L(2,1)$ -Labeling of Some Middle Graphs," *Journal of Applied Computer Science & Mathematics*, vol. 4, no. 9, pp. 104–107, 2010.
- [11] N. K. K. Y. Fransiskus Fran, "Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Bayangan Dan Graf Middle Dari Graf Bintang," *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 9, no. 2, pp. 329–336, 2020, doi: 10.26418/bbimst.v9i2.39977.
- [12] K. Kim, "Italian, 2-Rainbow and Roman Domination Numbers in Middle Graphs," *RAIRO-Operations Research*, vol. 58, pp. 2045–2053, 2024, doi: 10.1051/ro/2024072 RAIRO.
- [13] F. Kazemnejad, B. Pahlavsay, E. Palezzato, and M. Torielli, "Total dominator coloring number of middle graphs," *Discrete Mathematics Algorithms and Applications*, vol. 15, no. 02, p. 2250076, 2023, doi: 10.1142/S1793830922500768.
- [14] D. Rahmawati, F. Fran, Yudhi, and D. Krisantoni, "Total rainbow connection number of n-Centipede graph and its line, square, and middle graph," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2268, no. 1, p. 40007, Sep. 2020, doi: 10.1063/5.0016815.
- [15] H. Helmi, B. G. Vilgalita, F. Fran, and D. R. Putra, "Rainbow vertex connection number of square, glue, middle and splitting graph of brush graph," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2268, no. 1, p. 40003, Sep. 2020, doi: 10.1063/5.0017092.