

Pemodelan Matematika Pada Kecanduan Alkohol

Jihan Fikri Rasyidah, Juhari*, and Abdul Aziz

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan dinamika penyebaran kecanduan alkohol menggunakan pendekatan matematika dengan memodifikasi model SED (Susceptible-Exposed-Dependent) dengan menambahkan kompartemen *Recovery* (R). Penambahan kompartemen ini memungkinkan analisis proses pemulihan pecandu dan kemungkinan kekambuhan. Model dianalisis menggunakan transformasi ke bentuk proporsi populasi, analisis titik kesetimbangan, perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0), analisis sensitivitas parameter, dan simulasi numerik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai $R_0 < 1$, yang menandakan bahwa sistem berada dalam kondisi stabil asimtotik lokal pada titik kesetimbangan bebas kecanduan. Analisis sensitivitas memperlihatkan bahwa parameter paling berpengaruh terhadap penyebaran kecanduan adalah tingkat interaksi individu rentan dengan individu terpapar (β_1). Simulasi numerik mendukung hasil teoritis dengan menunjukkan dominasi individu rentan dalam populasi jangka panjang, serta penurunan proporsi pecandu dan terpapar.

Kata Kunci: Kecanduan alkohol, model matematika, bilangan reproduksi dasar.

Abstract

This study aims to model the dynamics of alcohol addiction using a mathematical approach by modifying the SED (Susceptible-Exposed-Dependent) by adding a Recovery (R) compartment. This addition enables a more comprehensive analysis of the recovery process and potential relapse. The model was analyzed using population proportion transformation, equilibrium point analysis, basic reproduction number (R_0) calculation, parameter sensitivity analysis, and numerical simulation. The results indicate that the value of $R_0 < 1$, suggesting that the system is locally asymptotically stable at the addiction-free equilibrium point. The sensitivity analysis shows that the most influential parameter on the spread of addiction is the interaction rate between susceptible and exposed individuals (β_1). Numerical simulations support the theoretical analysis by showing that the proportion of addicts and exposed individuals decreases over time, while the proportion of susceptible individuals dominates in the long term.

Keywords: Alcohol addiction, mathematical model, basic reproduction number

Copyright © 2025 by Authors, Published by JRMM Group. This is an open access article under the CC BY-SA License (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>)

*Corresponding author. E-mail: juhari@uin-malang.ac.id

1 Pendahuluan

Model matematika digunakan untuk merepresentasikan permasalahan dalam bentuk persamaan diferensial, dengan tujuan menyederhanakan dan mempermudah pemahaman serta penyelesaiannya. [1] Model matematika dapat dikategorikan menjadi dua jenis: model dinamik dan model statik. Model disebut dinamik jika variabel kondisi bergantung pada variabel waktu, sedangkan model dikatakan statik jika variabel kondisi tidak bergantung pada waktu. [2].

Model matematika yang cukup dikenal adalah model SEIR (Suspected-Exposed-Infected-Recovery), yang merupakan pengembangan dari model SIR (Suspected-Infected-Recovery) [3]. Penelitian tentang penyebaran perilaku konsumsi alkohol di antara mahasiswa Kolombia menggunakan model matematika yang dikembangkan berdasarkan model SEI. Model ini berkembang menjadi model SEIR yang terbagi menjadi beberapa kelompok, yaitu individu yang rentan terhadap konsumsi alkohol (Susceptible), individu yang telah mulai mengonsumsi alkohol namun belum kecanduan (Exposed), dan individu yang kecanduan alkohol (Dependent) [4].

Kecanduan alkohol merupakan masalah kesehatan masyarakat yang serius di seluruh dunia. data dari Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) konsumsi alkohol berlebih menjadi salah satu faktor risiko utama yang berkontribusi terhadap lebih dari 3 juta kematian setiap tahunnya. Dampak negatif dari konsumsi alkohol tidak hanya memengaruhi kesehatan individu, tetapi juga menyebabkan berbagai masalah sosial, ekonomi, dan kriminalitas di masyarakat. Alkoholisme tidak hanya berdampak pada individu yang kecanduan, tetapi juga memberikan efek buruk pada keluarga dan komunitas di sekitarnya. [5] Dua studi penting telah mengembangkan model matematika untuk menganalisis penyebaran kecanduan alkohol. Satana dan Kassaye (2022) membagi populasi menjadi empat kompartemen: non-peminum, peminum berat, peminum dalam perawatan, dan peminum yang pulih. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas alkohol stabil jika $R_0 < 1$, serta simulasi numerik dengan metode ODE45 menegaskan pentingnya mengurangi interaksi dengan peminum berat dan meningkatkan akses perawatan. [6]

Sementara itu, [7] mengembangkan model PHTQ dengan kompartemen non-peminum (P), peminum berat (H), peminum dalam perawatan (T), dan mantan peminum (Q). Titik ekuilibrium bebas alkohol juga stabil untuk $R_0 < 1$, sedangkan nilai $R_0 > 1$ menghasilkan keadaan endemik. Simulasi menggunakan MATLAB menegaskan bahwa intervensi berupa peningkatan rehabilitasi dan pengurangan kontak dengan peminum berat sangat efektif dalam mengendalikan epidemi alkoholisme.

Berbeda dari studi-studi sebelumnya, penelitian ini memodifikasi model SED dengan menambahkan kompartemen Recovery, yang merepresentasikan individu yang berhasil pulih dari kecanduan alkohol. Penambahan ini memungkinkan analisis yang lebih realistis terhadap dinamika kecanduan, termasuk kemungkinan pemulihan dan transisi ulang ke status rentan. Model yang dimodifikasi juga dianalisis menggunakan pendekatan proporsi populasi agar lebih stabil terhadap perubahan ukuran populasi.

2 Metode

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Metode ini bertujuan memahami fenomena sosial berdasarkan pandangan atau pengalaman individu. Data diperoleh melalui studi literatur yang mendalam dan dianalisis untuk memahami dinamika kecanduan alkohol secara konseptual dan matematis. [8].

2.1 Modifikasi Model Matematika

Model SED (Susceptible–Exposed–Dependent) dimodifikasi dengan menambahkan kompartemen Recovery (R) untuk merepresentasikan individu yang telah pulih. Diagram kompartemen menggambarkan transisi:

$$S \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow R$$

2.1.1 Sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \mu - \beta_1 se - \beta_2 su - \mu s \\ \frac{de}{dt} &= \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e \\ \frac{du}{dt} &= \alpha e - \gamma u - \mu u \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma u - (\eta + \mu)r\end{aligned}$$

Dengan asumsi populasi total konstan, yaitu $N = s + e + u + r$.

2.1.2 Transformasi ke Bentuk Proporsi Populasi

Model ditransformasikan ke bentuk proporsi $s, e, u, r \in [0, 1]$, untuk menghindari ketergantungan terhadap nilai absolut populasi dan memudahkan analisis kestabilan serta simulasi numerik. [9]

2.2 Uji Validitas Model

Dilakukan melalui beberapa pendekatan:

1. Titik Kesetimbangan: Menentukan kondisi saat semua laju perubahan bernilai nol.
2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0): Dihitung menggunakan pendekatan *Next Generation Matrix* [10], dengan rumus:

$$R_0 = \frac{\beta_1 s^*}{\alpha + \mu} + \frac{\beta_2 s^* \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)}$$

3. Analisis Sensitivitas: Mengukur pengaruh parameter terhadap R_0 dengan rumus:

$$S_x = \frac{\partial R_0}{\partial x} \cdot \frac{x}{R_0}$$

4. Simulasi Numerik: Simulasi dilakukan untuk mengamati perilaku sistem dalam jangka waktu tertentu. Hasilnya menunjukkan bahwa peningkatan pemulihan dan pengurangan interaksi dengan pecandu dapat mengendalikan penyebaran kecanduan.

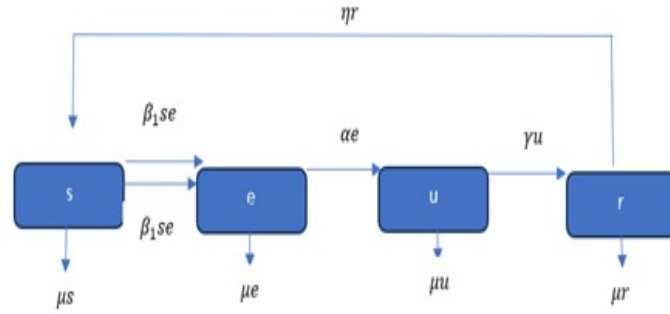
3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Modifikasi Model Matematika

Modifikasi dalam konteks model matematika merujuk pada upaya melakukan perubahan terhadap variabel serta persamaan diferensial agar lebih sesuai dengan tujuan penelitian. Penelitian ini memodifikasi model matematika [4] dengan menambahkan satu variabel baru yaitu *recovery* (r), yang merepresentasikan individu yang berhasil pulih dari kecanduan alkohol.

3.1.1 Diagram Kompartemen

Diagram kompartemen menggambarkan transisi antar kelompok populasi: dari individu rentan (s), menjadi terpapar (e), lalu menjadi pecandu (u), dan akhirnya pulih (r). Penambahan kompartemen r memungkinkan model memerhatikan proses pemulihan dan kekambuhan. Ini mencerminkan dinamika yang lebih realistis terhadap kecanduan alkohol.



Gambar 1: 3.1 Model Modifikasi Kecanduan Alkohol

3.1.2 Transformasi ke Bentuk Proporsi

Dalam pemodelan epidemiologi, sistem persamaan diferensial sering diubah ke bentuk proporsi untuk menghindari ketergantungan terhadap ukuran populasi absolut (N). Pendekatan ini dikenal sebagai *normalisasi populasi*. [9]

$s = \frac{S}{N}$: Proporsi individu rentan

$e = \frac{E}{N}$: Proporsi individu terpapar

$u = \frac{U}{N}$: Proporsi individu pecandu

$r = \frac{R}{N}$: Proporsi individu pulih

Dengan N sebagai populasi total yang dianggap konstan, maka:

$$s + e + u + r = 1$$

Aturan ini digunakan untuk mengubah sistem diferensial berbasis jumlah individu menjadi sistem berbasis proporsi. [11]

3.1.3 Penurunan Persamaan Individu Rentan (s)

Model awal dalam jumlah individu:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta_1 \frac{SE}{N} - \beta_2 \frac{SU}{N} - \mu S \quad (1)$$

Seluruh persamaan dibagi dengan N :

$$\frac{1}{N} \frac{dS}{dt} = \frac{\mu N - \beta_1 \frac{SE}{N} - \beta_2 \frac{SU}{N} - \mu S}{N} \quad (2)$$

Sehingga:

$$\frac{1}{N} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta_1 \frac{SE}{N^2} - \beta_2 \frac{SU}{N^2} - \mu \cdot \frac{S}{N} \quad (3)$$

Dengan definisi variabel proporsi:

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad u = \frac{U}{N}$$

Maka substitusi menjadi:

$$\frac{1}{N} \frac{dS}{dt} = \mu - \beta_1 \frac{(sN)(eN)}{N^2} - \beta_2 \frac{(sN)(uN)}{N^2} - \mu s \quad (4)$$

$$= \mu - \beta_1 se - \beta_2 su - \mu s \quad (5)$$

Karena $s = S/N$ dan N konstan, maka:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dS}{dt}$$

Sehingga:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta_1 se - \beta_2 su - \mu s$$

Transformasi ini menghindari ketergantungan pada ukuran populasi mutlak, sehingga lebih mudah digunakan dalam analisis kestabilan sistem [9]

3.1.4 Penurunan Persamaan Individu Terpapar (s)

Model awal:

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 \frac{SE}{N} + \beta_2 \frac{SU}{N} - \alpha E - \mu E$$

Dibagi dengan N :

$$\frac{1}{N} \frac{dE}{dt} = \beta_1 \frac{SE}{N^2} + \beta_2 \frac{SU}{N^2} - \alpha \frac{E}{N} - \mu \frac{E}{N}$$

Substitusi proporsi:

$$\frac{1}{N} \frac{dE}{dt} = \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e$$

Karena $e = E/N$ dan N konstan:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dE}{dt}$$

Sehingga:

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e$$

Transformasi ini memastikan bahwa model lebih relevan dalam skenario di mana total populasi tetap konstan. [12]

3.1.5 Penurunan Persamaan Individu Pecandu (u)

Model awal:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha E - \gamma U - \mu U$$

Dibagi dengan N :

$$\frac{1}{N} \frac{dU}{dt} = \alpha \frac{E}{N} - \gamma \frac{U}{N} - \mu \frac{U}{N}$$

Dengan definisi proporsi:

$$\frac{1}{N} \frac{dU}{dt} = \alpha e - \gamma u - \mu u$$

Karena $u = U/N$ dan N konstan:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dU}{dt}$$

Sehingga:

$$\frac{du}{dt} = \alpha e - \gamma u - \mu u$$

Transformasi ini banyak diterapkan dalam model epidemiologi untuk menyederhanakan analisis dinamika populasi. [13]

3.1.5 Penurunan Persamaan Individu Pulih (r)

Model awal:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma U - (\eta + \mu)R$$

Dibagi dengan N :

$$\frac{1}{N} \frac{dR}{dt} = \gamma \frac{U}{N} - (\eta + \mu) \frac{R}{N}$$

Dengan substitusi proporsi:

$$\frac{1}{N} \frac{dR}{dt} = \gamma u - (\eta + \mu)r$$

Karena $r = R/N$ dan N konstan:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dR}{dt}$$

Sehingga:

$$\frac{dr}{dt} = \gamma u - (\eta + \mu)r$$

3.1.6 Model Dalam Bentuk Proporsi Populasi Total

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta_1 se - \beta_2 su - \mu s \quad (6)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e \quad (7)$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha e - \gamma u - \mu u \quad (8)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma u - (\eta + \mu)r \quad (9)$$

Dengan model matematika di atas, analisis dapat dilakukan tanpa perlu mempertimbangkan jumlah absolut individu dalam populasi, melainkan berdasarkan proporsi setiap kompartemen dalam populasi total.

3.1.7 Definisi Variabel dan Parameter

Variabel yang terkait dalam pembentukan diagram kompartemen diambil dari beberapa asumsi yang telah dibentuk serta menggunakan nilai parameter yang bersumber dari beberapa rujukan yang telah dikaji oleh peneliti. Berikut akan dipaparkan definisi dari variabel yang terkait dengan model matematika kecanduan Alkohol.

Tabel 1: Tabel 4.1 Definisi Variabel Modifikasi Model Kecanduan Alkohol

Variabel	Keterangan
$s(t)$	Kelompok individu yang rentan terhadap kecanduan alkohol tetapi belum mengkonsumsinya
$e(t)$	Kelompok individu yang telah mulai mengonsumsi alkohol tetapi belum sepenuhnya kecanduan
$u(t)$	Kelompok individu yang sudah mengalami kecanduan alkohol
$r(t)$	Kelompok individu yang telah berhasil pulih dari kecanduan alkohol melalui rehabilitasi

Tabel 2: Tabel 4.2 Nilai Parameter Kecanduan Alkohol [4]

Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan
β_1	Tingkat penularan kecanduan alkohol dari individu rentan ke individu terpapar	0,33	$\frac{1}{\text{tahun}}$
β_2	Tingkat penularan kecanduan alkohol dari individu rentan ke individu pecandu	0,3	$\frac{1}{\text{tahun}}$
μ	Tingkat kematian alami dalam populasi	0,3	$\frac{1}{\text{tahun}}$
α	Tingkat individu terpapar yang berpindah menjadi pecandu	0,2	$\frac{1}{\text{tahun}}$
γ	Tingkat pemulihan individu dari kecanduan	0,09	$\frac{1}{\text{tahun}}$
η	Faktor tambahan yang mempengaruhi pemulihan individu	0,03	$\frac{1}{\text{tahun}}$

3.2 Uji Validitas Model Matematika

3.2.1 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan diperoleh dengan mencari kondisi ketika semua laju perubahan dalam sistem menjadi nol, yaitu:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta_1 se - \beta_2 su - \mu s = 0 \quad (10)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e = 0 \quad (11)$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha e - \gamma u - \mu u = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma u - (\eta + \mu)r = 0 \quad (13)$$

1. Titik Keseimbangan Bebas Kecanduan

Keseimbangan bebas kecanduan terjadi ketika tidak terdapat individu dalam kompartemen e (terpapar), u (pecandu), dan r (pulih). Dengan demikian, diasumsikan:

$$e^* = 0, \quad u^* = 0, \quad r^* = 0$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam sistem, kita peroleh:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta_1 s \cdot 0 - \beta_2 s \cdot 0 - \mu s = 0 \quad (14)$$

$$\Rightarrow \mu - \mu s = 0 \quad (15)$$

$$\Rightarrow \mu = \mu s \quad (16)$$

$$\Rightarrow s^* = \frac{\mu}{\mu} = 1 \quad (17)$$

Verifikasi untuk kompartemen e :

$$\frac{de}{dt} = \beta_1 se + \beta_2 su - \alpha e - \mu e = 0$$

Substitusi $s^* = 1$, $e^* = 0$, $u^* = 0$:

$$\beta_1(1)(0) + \beta_2(1)(0) - \alpha(0) - \mu(0) = 0 \Rightarrow e^* = 0 \text{ adalah solusi yang valid}$$

Verifikasi untuk kompartemen u :

$$\frac{du}{dt} = \alpha e - \gamma u - \mu u = 0$$

Substitusi $e^* = 0, u^* = 0$:

$$\alpha(0) - \gamma(0) - \mu(0) = 0 \Rightarrow u^* = 0 \text{ valid}$$

Verifikasi untuk kompartemen r :

$$\frac{dr}{dt} = \gamma u - (\eta + \mu)r = 0$$

Substitusi $u^* = 0, r^* = 0$:

$$\gamma(0) - (\eta + \mu)(0) = 0 \Rightarrow r^* = 0 \text{ valid}$$

Maka, titik kesetimbangan bebas kecanduan adalah:

$$(s^*, e^*, u^*, r^*) = (1, 0, 0, 0)$$

2. Titik Kesetimbangan Kecanduan

Kesetimbangan kecanduan adalah keadaan di mana kondisi kecanduan tetap ada dalam populasi dalam jangka panjang, tanpa punah atau meledak menjadi wabah. Pada titik ini, jumlah individu dalam setiap kategori (rentan, terpapar, pecandu, dan pulih) mencapai nilai konstan yang ditentukan oleh keseimbangan antara tingkat penularan, pemulihan, dan faktor lain dalam sistem. Secara matematis, titik ini diperoleh dari solusi selain titik kesetimbangan bebas kecanduan, dengan asumsi bahwa $R_0 > 1$.

Diketahui persamaan keseimbangan untuk u^* :

$$\alpha e^* = (\gamma + \mu)u^* \Rightarrow u^* = \frac{\alpha e^*}{\gamma + \mu}$$

Dari persamaan keseimbangan untuk r^* :

$$\gamma u^* = (\eta + \mu)r^* \Rightarrow r^* = \frac{\gamma}{\eta + \mu}u^* = \frac{\gamma \alpha e^*}{(\eta + \mu)(\gamma + \mu)}$$

Dari persamaan keseimbangan untuk s^* :

$$\begin{aligned} \mu - \beta_1 s^* e^* - \beta_2 s^* u^* - \mu s^* &= 0 \Rightarrow \mu - \mu s^* = \beta_1 s^* e^* + \beta_2 s^* u^* \\ s^* (\mu + \beta_1 e^* + \beta_2 u^*) &= \mu \Rightarrow s^* = \frac{\mu}{\mu + \beta_1 e^* + \beta_2 u^*} \end{aligned}$$

Substitusi u^* ke dalam s^* :

$$s^* = \frac{\mu}{\mu + \beta_1 e^* + \frac{\beta_2 \alpha e^*}{\gamma + \mu}} = \frac{\mu}{\mu + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu} \right) e^*}$$

Dari persamaan keseimbangan untuk e^* :

$$\beta_1 s^* e^* + \beta_2 s^* u^* = (\alpha + \mu)e^*$$

Substitusi u^* :

$$s^* \left(\beta_1 e^* + \frac{\beta_2 \alpha e^*}{\gamma + \mu} \right) = (\alpha + \mu)e^*$$

Substitusi s^* :

$$\frac{\mu}{\mu + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu}\right) e^*} \cdot \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu}\right) e^* = (\alpha + \mu) e^*$$

Selesaikan untuk e^* :

$$\mu \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu}\right) e^* = (\alpha + \mu) e^* \left(\mu + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu}\right) e^*\right)$$

Maka, setelah penyederhanaan diperoleh:

$$e^* = \frac{\mu \left(\beta_1 + \frac{\beta_2(\gamma + \mu)}{\alpha}\right) - \alpha - \mu}{(\alpha + \mu) \left(\beta_1 + \frac{\beta_2(\gamma + \mu)}{\alpha}\right)}$$

Sehingga, titik kesetimbangan kecanduan adalah:

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\mu}{\mu + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \alpha}{\gamma + \mu}\right) e^*} \\ e^* &= \frac{\mu \left(\beta_1 + \frac{\beta_2(\gamma + \mu)}{\alpha}\right) - \alpha - \mu}{(\alpha + \mu) \left(\beta_1 + \frac{\beta_2(\gamma + \mu)}{\alpha}\right)} \\ u^* &= \frac{\alpha e^*}{\gamma + \mu} \\ r^* &= \frac{\gamma \alpha e^*}{(\eta + \mu)(\gamma + \mu)} \end{aligned}$$

3.2.2 Analisis Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar, R_0 , adalah jumlah rata-rata individu baru yang terdampak langsung oleh satu individu dalam populasi sepenuhnya rentan tanpa intervensi [10]. Untuk model berikut:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \beta_1 s e + \beta_2 s u - \alpha e - \mu e, \\ \frac{du}{dt} &= \alpha e - \gamma u - \mu u, \end{aligned}$$

ditentukan matriks transmisi dan transisi:

$$F = \begin{bmatrix} \beta_1 s^* & \beta_2 s^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \alpha + \mu & 0 \\ -\alpha & \gamma + \mu \end{bmatrix}.$$

Invers matriks V adalah:

$$V^{-1} = \frac{1}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ \alpha & \alpha + \mu \end{bmatrix}.$$

Perkalian FV^{-1} menghasilkan:

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 s^*}{\alpha + \mu} + \frac{\beta_2 s^* \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{\beta_2 s^*}{\gamma + \mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen terbesar (spektral radius) dari FV^{-1} adalah:

$$R_0 = \frac{\beta_1 s^*}{\alpha + \mu} + \frac{\beta_2 s^* \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)}.$$

Dengan substitusi parameter:

$$\beta_1 = 0,33, \quad \beta_2 = 0,3, \quad \alpha = 0,2, \quad \mu = 0,3, \quad \gamma = 0,09, \quad s^* = 1,$$

diperoleh:

$$R_0 = \frac{0,33}{0,5} + \frac{0,3 \times 0,2}{0,5 \times 0,39} = 0,66 + 0,3077 = 0,9677.$$

Karena $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas kecanduan bersifat stabil secara asimtotik lokal [14]. Artinya, jumlah pecandu akan menurun seiring waktu.

3.2.2 Analisis Sensitivitas Parameter

Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh relatif parameter terhadap R_0 . Persamaan dasar:

$$R_0 = \frac{\beta_1 s}{\alpha + \mu} + \frac{\beta_2 s \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)}$$

Turunan parsial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0}{\partial \beta_1} &= \frac{s}{\alpha + \mu} = 2, \\ \frac{\partial R_0}{\partial \beta_2} &= \frac{s \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} \approx 1,0256, \\ \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} &= -\frac{\beta_1 s}{(\alpha + \mu)^2} + \frac{\beta_2 s (\gamma + \mu - \alpha)}{(\alpha + \mu)^2 (\gamma + \mu)} \approx -0,7354, \\ \frac{\partial R_0}{\partial \gamma} &= -\frac{\beta_2 s \alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)^2} \approx -0,7887, \\ \frac{\partial R_0}{\partial \mu} &= -\frac{\beta_1 s}{(\alpha + \mu)^2} - \frac{\beta_2 s \alpha (\gamma + \mu + \alpha + \mu)}{(\alpha + \mu)^2 (\gamma + \mu)} \approx -2,7245. \end{aligned}$$

Koefisien sensitivitas dihitung dengan:

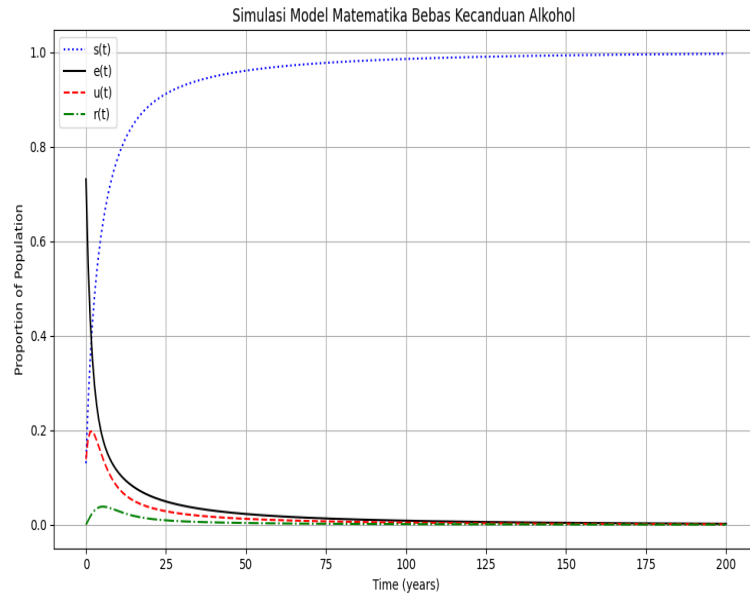
$$S_x = \frac{\partial R_0}{\partial x} \cdot \frac{x}{R_0}$$

Hasilnya:

$$\begin{aligned} S_{\beta_1} &\approx 0,6818 \quad (\text{pengaruh terbesar, parameter paling sensitif}), \\ S_{\beta_2} &\approx 0,3181, \quad S_{\alpha} \approx -0,1519, \quad S_{\gamma} \approx -0,0733, \quad S_{\mu} \approx -0,8447. \end{aligned}$$

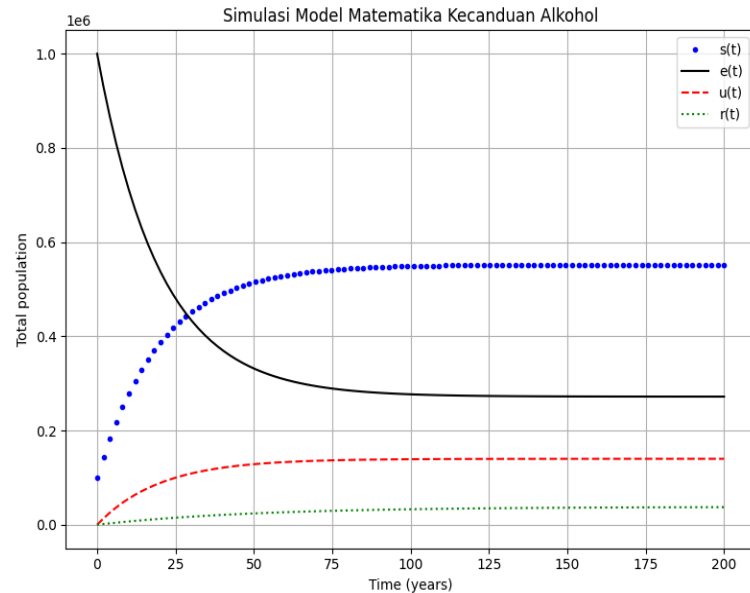
3.2.3 Simulasi Model Numerik

Dalam penelitian ini, simulasi dilakukan untuk menggambarkan penyebaran kecanduan alkohol menggunakan modifikasi model matematika, yaitu model s , e , u , r yang mencakup individu yang telah melakukan penyembuhan dari kecanduan alkohol yang mereka alami. Pada simulasi ini, nilai parameter digunakan sesuai dengan Tabel ???. Kemudian dilakukan input model, nilai awal, serta parameter ke dalam program *Python*, sehingga diperoleh grafik dinamika populasi dalam setiap kompartemen sebagai berikut:



Gambar 2: Model Modifikasi Kecanduan Alkohol

Grafik menunjukkan perubahan proporsi populasi dalam empat kelompok utama (s , e , u , r) selama 200 tahun. Proporsi individu rentan meningkat dan mendekati satu, menandakan sebagian besar populasi tetap dalam kondisi rentan. Sebaliknya, proporsi individu terpapar, pecandu, dan pulih menurun drastis menuju nol. Hal ini mencerminkan bahwa transisi ke kecanduan dan pemulihan bersifat sementara, dan sistem cenderung menuju kondisi kesetimbangan di mana mayoritas populasi tetap dalam keadaan rentan.



Gambar 3: Simulasi Model Matematika Kecanduan Alkohol

Grafik menunjukkan dinamika proporsi populasi dalam empat kelompok (s , e , u , r) selama 200 tahun. Populasi rentan meningkat tajam dan stabil di nilai tertinggi, menunjukkan sebagian besar tetap dalam kondisi rentan. Populasi terpapar menurun dan stabil di tingkat sedang, sementara pecandu meningkat di awal lalu melandai pada proporsi kecil. Populasi pulih naik perlahan dan menetap di proporsi terendah, mencerminkan tingkat pemulihan yang rendah. Sistem cenderung mencapai kesetimbangan, dengan mayoritas populasi tetap rentan.

4. Kesimpulan

Model matematika kecanduan alkohol telah dimodifikasi dengan menambahkan kompartemen *Recovery* (R) ke dalam model SED untuk merepresentasikan proses pemulihan dan kekambuhan, serta ditransformasikan ke dalam bentuk proporsi populasi. Validitas model diuji melalui analisis titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar (R_0), sensitivitas parameter, dan simulasi numerik. Hasil menunjukkan bahwa $R_0 < 1$, yang mengindikasikan kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan bebas kecanduan. Parameter yang paling berpengaruh terhadap penyebaran kecanduan adalah laju interaksi individu rentan dengan individu terpapar. Simulasi numerik mendukung hasil teoritis, menunjukkan dominasi proporsi individu rentan dalam jangka panjang dan penurunan proporsi individu pecandu serta terpapar.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Jihan Fikri Rasyidah: Konseptualisasi, Metodologi, Penulisan–Draf Awal, Visualisasi, Analisis Formal.

Juhari: Supervisi, Penulisan–Telaah dan Penyuntingan, Administrasi Proyek.

Abdul Aziz: Validasi, Supervisi, Penulisan–Telaah dan Penyuntingan.

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Model ChatGPT versi 4 digunakan untuk membantu penyusunan draf awal, koreksi struktur kalimat, dan perumusan ulang beberapa bagian metodologi serta penyederhanaan hasil simulasi untuk keperluan penulisan.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan.

Pendanaan dan Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal. Penulis menyampaikan terima kasih kepada dosen pembimbing atas bimbingan akademik yang berharga selama proses penyusunan skripsi ini. Ucapan terima kasih juga ditujukan kepada pihak Program Studi Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang atas dukungan fasilitas selama proses penelitian berlangsung.

Ketersediaan Data

Data yang mendukung hasil penelitian ini tersedia atas permintaan yang wajar kepada penulis korespondensi dan tunduk pada perjanjian kerahasiaan.

Daftar Pustaka

- [1] R. Syam, S. Side, and C. S. Said, “Model SEIRS penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar,” *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, vol. 3, no. 1, pp. 11–19, 2020, Publisher: Department of Mathematics, FMIPA, Universitas Negeri Makassar. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [2] R. J. Iswanto, “Pemodelan matematika aplikasi dan terapannya,” *Yogyakarta: Graha Ilmu*, 2012.

- [3] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 115, no. 772, pp. 700–721, 1927. DOI: [10.1098/rspa.1927.0118](https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118).
- [4] E. Pérez, "Mathematical modeling of the spread of alcoholism among Colombian College Students," *Ingeniería y Ciencia*, vol. 16, no. 32, pp. 195–223, 2020. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [5] L. N. Hanifah, "Literature review: Factors affecting alcohol consumption and the impact of alcohol on health based on behavioral theory," *Media Gizi Kesmas*, vol. 12, no. 1, pp. 453–462, 2023, Corresponding author. DOI: [10.20473/mgk.v12i1.2023.453-462](https://doi.org/10.20473/mgk.v12i1.2023.453-462).
- [6] T. S. Satana and M. T. Kassaye, "Mathematical modeling and analysis of alcoholism epidemics: A case study in Ethiopia," 2022. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [7] P. Kunasegaran and A. Ali, "Analysis on mathematical model of alcohol consumption," in *Proceedings of Science and Mathematics*, vol. 17, 2023, pp. 154–165. [Available online](#).
- [8] Sugiyono, *Metode Penelitian*. Data Kualitatif, 2012, hal. 12.
- [9] P. Van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Mathematical biosciences*, vol. 180, no. 1-2, pp. 29–48, 2002, Publisher: Elsevier. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [10] O. Diekmann and J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*. John Wiley & Sons, 2000, vol. 5. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [11] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (Texts in Applied Mathematics), en. New York, NY: Springer New York, 2012, vol. 40. DOI: [10.1007/978-1-4614-1686-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1686-9). [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [12] N. Chitnis, J. M. Hyman, and J. M. Cushing, "Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model," en, *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 70, no. 5, pp. 1272–1296, Jul. 2008. DOI: [10.1007/s11538-008-9299-0](https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0). [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [13] S. Marino, I. B. Hogue, C. J. Ray, and D. E. Kirschner, "A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology," *Journal of theoretical biology*, vol. 254, no. 1, pp. 178–196, 2008, Publisher: Elsevier. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).
- [14] J. Giesecke, *Modern infectious disease epidemiology*. CRC Press, 2017. [Available online](#) (visited on 06/18/2025).