

Teorema Hahn-Banach untuk Fungsional Linier Terbatas

Rahmadita Widya Astuti¹,
Dian Maharani¹, and Abdul
Aziz¹

¹Program Studi Matematika, Fakultas
Sains dan Teknologi, Universitas Islam
Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang,
Indonesia

Article History

Received 23 Juni 2025

Revised 01 Januari 2026

Accepted 26 Februari 2026

Published 28 Februari 2026



Copyright © 2026 by Authors, Published by
JRMM Group. This is an open access
article under the CC BY-SA License.



Abstract. A linear functional f is a mapping from a vector space X to a field K , ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), that satisfies two properties, additivity and homogeneity. Among the various properties of linear functionals, one important property is boundedness. This research is to prove the boundedness property of linear functionals using the Hahn-Banach Theorem. The Hahn-Banach Theorem addresses the extension of linear functionals. Thus, the results of this research show that with the Hahn-Banach Theorem, every element $x_0 \neq 0$ in a normed space can be associated with a bounded linear functional $\tilde{f}$ such that $\tilde{f}(x_0) = 1$ and $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$. Furthermore, a linear functional defined on a real vector space can be extended to a complex vector space using the structure $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$, and it is proven that this extension satisfies $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$. This research is expected to be beneficial and serve as an additional reference.

Keywords: Hahn-Banach Theorem; Linear Functional; Bounded Linear Functional

Abstrak. Fungsional linier f merupakan pemetaan dari suatu ruang vektor X ke lapangan K , baik $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$, yang memenuhi dua sifat yakni aditivitas dan homogenitas. Adapun beberapa sifat lain dari fungsional linier, salah satunya yaitu sifat terbatas. Penelitian ini memiliki tujuan untuk membuktikan sifat fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach. Teorema Hahn-Banach merupakan teorema yang membahas mengenai perluasan fungsional linier. Dengan demikian, hasil penelitian ini telah menunjukkan bahwa dengan Teorema Hahn-Banach setiap elemen $x_0 \neq 0$ pada ruang bernorma dapat dihubungkan dengan suatu fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ yang memenuhi $\tilde{f}(x_0) = 1$ dan $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$. Kemudian fungsional linier yang didefinisikan dari fungsional riil dapat diperluas ke ruang vektor kompleks dengan struktur $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ dan terbukti memenuhi $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dan dapat menjadi referensi tambahan.

Kata kunci: Teorema Hahn-Banach; Fungsional Linier; fungsional linier terbatas.

1. Pendahuluan

Dalam matematika, setiap fungsi memiliki domain dan kodomain [1]. Jika suatu fungsi memiliki domain berupa ruang vektor X atas lapangan K , dan fungsi tersebut memetakan elemen dari X ke ruang vektor lain yang juga berada di atas lapangan K , dengan memenuhi syarat-syarat tertentu, maka fungsi tersebut disebut operator linier [2]. Adapun jika *range* dari operator linier tersebut adalah K baik ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), maka operator tersebut disebut fungsional linier [2]. Fungsional linier merupakan pemetaan linier dari suatu ruang vektor X ke lapangan K ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dengan memenuhi dua sifat, yaitu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk semua x dan y di ruang vektor X , dan $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$) dan $x \in X$ [3]. Beberapa fungsional linier memiliki sifat keterbatasan dan kekontinuan. Fungsional linier f dikatakan terbatas apabila terdapat suatu konstanta bilangan riil $C > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$ untuk semua x dalam ruang vektor X [2]. Fungsional linier f dalam ruang vektor bernorma dikatakan kontinu jika dan hanya jika f terbatas [2]. Sifat kontinu sangat penting dalam pembuktian teorema-teorema, seperti pada Teorema Hahn-Banach.

Salah satu topik bahasan terkait Teorema Hahn-Banach yaitu ruang dual. Dalam teori ruang dual, Teorema Hahn-Banach memastikan bahwa setiap fungsional linier kontinu yang didefinisikan pada subruang Y dari ruang norma X dapat diperluas ke seluruh X tanpa mengubah sifat linieritas dan kontinuitasnya. Pada ruang dual X^* , setiap elemen f disebut sebagai fungsional linier yang memenuhi kondisi tertentu, yaitu bersifat linier, kontinu, dan memenuhi batas $|f(x)| \leq C\|x\|$. Contohnya, pada ruang ℓ^2 , seperti

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dengan $(a_n) \in \ell^2$, merupakan elemen ruang dual yang memenuhi kondisi tersebut. Kondisi ini juga digunakan dalam banyak aspek, salah satunya dalam pembuktian Teorema Representasi Riesz [3]. Dalam Teorema Representasi Riesz, khususnya untuk ruang Hilbert, setiap fungsional linier terbatas pada ruang Hilbert H dapat direpresentasikan sebagai hasil kali dalam dua vektor, yaitu: $f(x) = \langle x, y \rangle$ untuk semua $x \in H$ di mana $y \in H$ [4].

Adapun beberapa penelitian terdahulu telah membahas penerapan Teorema Hahn-Banach dalam berbagai konteks. Misalnya, penelitian oleh Zedam (2012) membahas penerapan Teorema Hahn-Banach dalam konteks fungsional linier terbatas fuzzy. Dalam penelitian ini, Zedam membahas perluasan Teorema Hahn-Banach ke ruang bernorma linier fuzzy dan memberikan bukti bahwa jika f adalah fungsional linier terbatas fuzzy pada subruang tertutup tertentu, maka terdapat perluasan linier dari f ke seluruh ruang yang tetap terbatas dan mempertahankan nilai-nilai yang ditentukan pada subruang tersebut [5]. Penelitian lainnya oleh Kebiche dan Giordano (2024) membahas penerapan Teorema Hahn-Banach dalam konteks ruang Colombeau, yang merupakan salah satu pendekatan dalam teori fungsi tergeneralisasi. Penelitian ini berfokus pada perluasan fungsional linier dalam ruang yang bersifat nonlinier dengan mempertimbangkan struktur-wise. Selain itu, penelitian ini juga menunjukkan aplikasi Teorema Hahn-Banach dalam pemisahan himpunan cembung dalam ruang Colombeau [6].

Teorema Hahn-Banach adalah teorema perluasan untuk fungsional linier [2]. Teorema Hahn-Banach juga dapat digunakan dalam pembuktian sifat-sifat fungsional linier terbatas. Fungsional linier terbatas awalnya hanya terdefinisi pada sub-

ruang tertentu dari ruang bernorma [4]. Pada penelitian ini akan dijelaskan mengenai cara untuk memperluas fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

2. Konsep Dasar

Definisi 1

Ruang vektor atas lapangan K adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi oleh dua operasi, yakni penjumlahan $X \times X \rightarrow X$ yang dinotasikan sebagai $x + y$, dan perkalian skalar $K \times X \rightarrow X$ yang dinotasikan sebagai αx , yang memenuhi delapan aksioma sebagai berikut untuk semua $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in K$ [1].

- (V1) $x + y = y + x$
- (V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (V3) Terdapat bilangan tunggal $0 \in X$, sedemikian sehingga $x + 0 = x$
- (V4) Terdapat bilangan tunggal $-x \in X$, sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$
- (V5) $1x = x$
- (V6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- (V7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- (V8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Ruang vektor riil adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor

$$V \times V \rightarrow V,$$

dan perkalian skalar

$$\mathbb{R} \times X \rightarrow X,$$

yang memenuhi delapan aksioma ruang vektor dengan skalar diambil dari $\mathbb{R}$. Maka X disebut ruang vektor riil [7].

Definisi 2

Misalkan X adalah ruang vektor atas F , baik $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{C}$. Norma dari X adalah fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$ berlaku:

- (N1) $\|x\| \geq 0$
- (N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
- (N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ruang vektor X yang memiliki norma disebut *ruang bernorma* atau *ruang vektor bernorma* [2].

Definisi 3

Operator linier T adalah operator yang memiliki domain $D(T)$ dari T berupa ruang vektor dan range T terletak pada ruang vektor atas lapangan yang sama [2]. Untuk semua $x, y \in D(T)$ dan skalar α ,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Definisi 4

Misalkan domain $D(f)$ dari f adalah ruang vektor dengan lapangan K (baik $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{C}$) dan f adalah fungsional linier yang memetakan $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ atau $f : D(f) \rightarrow \mathbb{C}$ dengan memenuhi dua sifat berikut [8].

(F1) **Aditivitas**, untuk semua $x, y \in D(f)$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(F2) **Homogenitas**, untuk semua $x \in D(f)$ dan skalar α ,

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Definisi 5

Fungsional linier f adalah operator linier dengan domain $D(f)$ dalam ruang vektor X dan range dalam lapangan skalar K dari ruang vektor X , sehingga

$$f : D(f) \rightarrow K$$

di mana $K = \mathbb{R}$ jika X adalah ruang vektor real, dan $K = \mathbb{C}$ jika X adalah ruang vektor kompleks [2].

Definisi 6

Misalkan X dan Y adalah ruang bernorma dan $T : D(T) \rightarrow Y$ adalah operator linier, di mana $D(T) \subseteq X$ [2]. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil C sedemikian sehingga untuk semua $x \in D(T)$,

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Definisi 7

Fungsional linier terbatas f adalah operator linier terbatas dengan *range* dalam lapangan skalar $\mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$) dari ruang bernorma X , di mana domain $D(f)$ berada [2]. Fungsional linier f dikatakan *terbatas* jika terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga untuk semua $x \in D(f)$,

$$|f(x)| \leq C\|x\|.$$

Definisi 8

Misalkan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan *kontinu di titik* $c \in A$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$, berlaku

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Fungsi f dikatakan *kontinu di* A apabila f kontinu di setiap titik dalam domain A [9].

Definisi 9

Misalkan $f : D(f) \rightarrow Y$ adalah sebarang operator yang belum tentu linier, di mana $D(f) \subseteq X$ dan X, Y adalah ruang bernorma [2]. Fungsional f dikatakan *kontinu pada* $x_0 \in D(f)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon, \forall x \in D(f), \|x - x_0\| < \delta.$$

Definisi 10

Misalkan X adalah ruang vektor riil dan p adalah fungsional sublinier. Fungsi $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *fungsional sublinier* jika memenuhi dua sifat berikut [3]:

Untuk semua $\alpha \geq 0$ dan $x \in X$, berlaku:

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Untuk semua $x, y \in X$, berlaku:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Fungsional sublinier memiliki keterkaitan pada fungsional linier. Dalam bentuk umum Teorema Hahn-Banach, di mana fungsional linier terbatas dapat diperluas ke seluruh ruang tanpa melampaui nilai dari fungsional sublinier yang membatasi [10].

Definisi 11

Ruang dual X^* dari suatu ruang vektor X adalah himpunan semua fungsional linier dari X ke $\mathbb{F}$, baik ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) [11]. Misalkan X adalah ruang bernorma, maka himpunan semua fungsional linier terbatas dari X ke F baik ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) merupakan ruang dual yang dilambangkan dengan X^* [2].

Definisi 12

Misalkan X adalah ruang vektor riil, p adalah fungsional sublinier, dan Z adalah subruang dari X . Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dan memenuhi

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X,$$

yaitu $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X dan $\tilde{f}(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in Z$ [2].

Bukti

Keberadaan Perluasan Linier Maksimal. Akan dibuktikan, himpunan E yaitu himpunan semua perluasan linier g dari f yang memenuhi $g(x) \leq p(x)$ pada domainnya $D(g)$ dan lema Zorn menghasilkan elemen maksimal

i dari E . Misalkan E adalah himpunan semua perluasan linier g dari f yang memenuhi kondisi $g(x) \leq p(x)$, untuk semua $x \in D(g)$. Jelas bahwa, $E \neq \emptyset$ karena $f \in E$. Pada E , dapat mendefinisikan pengurutan parsial dengan $g \leq h$. Artinya bahwa h adalah perluasan dari g . Secara definisi, $D(h) \supset D(g)$ dan $h(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in D(g)$. Untuk setiap rantai $C \subset E$, maka $\hat{g}$ didefinisikan sebagai,

$$\hat{g}(x) = g(x) \quad \text{jika } x \in D(g) \text{ dan } g \in C.$$

$\hat{g}$ adalah fungsional linier yang domainnya didefinisikan sebagai,

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g).$$

Domain ini merupakan ruang vektor karena C adalah rantai. Untuk $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ dengan $g_1, g_2 \in C$, maka $g_1(x) = g_2(x)$ karena C adalah rantai, sehingga $g_1 \leq g_2$ atau $g_2 \leq g_1$. Jelas bahwa, $g \leq \hat{g}$ untuk semua $g \in C$. Dengan demikian, $\hat{g}$ adalah batas atas dari C . Karena $C \subset E$ bersifat sebarang, lema Zorn menyatakan bahwa E memiliki elemen maksimal $\tilde{f}$. Berdasarkan definisi E , elemen ini adalah perluasan linier dari f yang memenuhi syarat $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, untuk $x \in D(\tilde{f})$.

f terdefinisi pada seluruh ruang X. Akan ditunjukkan bahwa $D(\tilde{f})$ mencakup seluruh X . Misalkan hal ini salah, maka dipilih $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ dan mempertimbangkan subruang Y_1 dari X yang direntangkan oleh $D(\tilde{f})$ dan y_1 . Perhatikan bahwa $y_1 \neq 0$ karena $0 \in D(\tilde{f})$. Setiap $x \in Y_1$ dapat ditulis,

$$x = y + \alpha y_1,$$

untuk $y \in D(\tilde{f})$. Jika $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ dengan $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$, maka hal ini mengimplikasikan $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha)y_1$, di mana $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ sedangkan $y_1 \notin D(\tilde{f})$. Oleh karena itu, satu-satunya solusi adalah $y - \tilde{y} = 0$ dan $\beta - \alpha = 0$, hal ini telah membuktikan keunikan.

Fungsional g_1 di Y_1 didefinisikan,

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$$

di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier. Selain itu, untuk $\alpha = 0$ maka $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Dengan demikian, g_1 adalah perluasan yang tepat dari $\tilde{f}$, yaitu perluasan di mana $D(\tilde{f})$ adalah himpunan bagian yang tepat dari $D(g_1)$.

Akibatnya, jika membuktikan bahwa $g_1 \in E$ dengan menunjukkan bahwa,

$$g_1(x) \leq p(x)$$

untuk semua $x \in D(g_1)$. Ini akan bertentangan dengan sifat maksimal dari $\tilde{f}$, sehingga pernyataan $D(\tilde{f}) \neq X$ adalah salah dan $D(\tilde{f}) = X$ adalah benar.

Relasi tambahan. Akan ditunjukkan bahwa g_1 dengan nilai c yang sesuai dalam $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$, di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier yang memenuhi $g_1(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in D(g_1)$.

Perhatikan bahwa, sebarang y dan z dalam $D(\tilde{f})$. Dari persamaan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$, untuk $x \in D(\tilde{f})$ dan $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, untuk semua $x, y \in X$ diperoleh,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) &= \tilde{f}(y - z) \leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \leq p(y + y_1) + p(-y - z)\end{aligned}$$

kemudian memindahkan suku terakhir ke kiri dan suku $\tilde{f}(y)$ ke kanan, sehingga,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$$

di mana y_1 tetap.

Karena y tidak muncul di sisi kiri dan z tidak muncul di sisi kanan, ketaksamaan ini tetap berlaku jika mengambil supremum atas $z \in D(\tilde{f})$ di sisi kiri (disebut m_0) dan infimum atas $y \in D(\tilde{f})$ di sisi kanan (disebut m_1). Kemudian $m_0 \leq m_1$ dan untuk suatu c dengan $m_0 \leq c \leq m_1$ dari

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$$

di mana y_1 tetap, diperoleh,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c, \quad \forall z \in D(\tilde{f})$$

dan

$$c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \quad \forall y \in D(\tilde{f}).$$

Akan dibuktikan $g_1(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in D(g_1)$ terlebih dahulu untuk α negatif dalam $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$, di mana c adalah konstanta riil sebarang dan g_1 linier, lalu untuk α positif. Untuk $\alpha < 0$ menggunakan persamaan

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c, \quad \text{untuk semua } z \in D(\tilde{f}),$$

mengganti z dengan $\alpha^{-1}y$, yaitu,

$$-p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y) - \tilde{f}(\frac{1}{\alpha}y) \leq c.$$

Kemudian dikalikan dengan $-\alpha > 0$, diperoleh,

$$\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Dari

$$\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c$$

dan

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c,$$

dengan menggunakan $y + \alpha y_1 = x$ diperoleh ketaksamaan yang diinginkan,

$$\begin{aligned}g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c &\leq -\alpha p(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y) \\ &= p(\alpha y_1 + y) = p(x).\end{aligned}$$

Untuk $\alpha = 0$ maka $x \in D(\tilde{f})$ dan tidak ada yang perlu dibuktikan. Untuk $\alpha > 0$ menggunakan

$$c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \quad \forall y \in D(\tilde{f})$$

dengan y diganti $\alpha^{-1}y$ untuk memperoleh,

$$c \leq p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - \tilde{f}(\frac{1}{\alpha}y).$$

Dikalikan dengan $\alpha > 0$ diperoleh,

$$\alpha c \leq \alpha p(\frac{1}{\alpha}y + y_1) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y).$$

Dari

$$\alpha c \leq p(x) - \tilde{f}(y)$$

dan

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c,$$

maka,

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

□

Teorema 1

Misalkan X adalah ruang vektor riil atau kompleks, dan p adalah fungsional bernilai riil pada X yang bersifat subaditif, yaitu untuk semua $x, y \in X$ berlaku [2]:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

dan untuk setiap skalar α berlaku

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x).$$

Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dari X dan memenuhi

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Bukti

Ruang vektor riil. Jika X adalah ruang vektor riil, kemudian $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$ mengimplikasikan $f(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 5, terdapat perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X sehingga,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Dari hasil tersebut, $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ diperoleh,

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |1|p(x) = p(x),$$

yang berarti,

$$\tilde{f}(x) \geq -p(x).$$

Bersama dengan $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$, hal ini membuktikan bahwa $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$. □

Bukti

Ruang vektor kompleks. Misalkan X adalah ruang vektor kompleks. Maka Z juga merupakan ruang vektor kompleks. Oleh karena itu, f bernilai kompleks dan dapat ditulis,

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad x \in Z,$$

di mana f_1 dan f_2 bernilai riil. Untuk sementara, lihat X dan Z sebagai ruang vektor riil dan dinotasikan dengan X_r dan Z_r . Artinya, pembatasan perkalian skalar hanya pada bilangan riil (bukan kompleks).

Karena f linier pada Z , serta f_1 dan f_2 adalah bernilai riil, maka f_1 dan f_2 adalah fungsional linier pada Z_r . Selain itu, $f_1(x) \leq |f(x)|$ karena bagian riil dari sebuah bilangan kompleks tidak pernah melebihi nilai mutlaknya. Oleh karena itu, berdasarkan $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$,

$$f_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z_r.$$

Dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach 2.12, terdapat perluasan linier $\tilde{f}_1$ dari f_1 dari Z_r ke X_r , sehingga

$$\tilde{f}_1(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X_r.$$

Kemudian untuk f_2 , kembali ke Z dan menggunakan $f = f_1 + if_2$, maka untuk setiap $x \in Z$,

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Bagian asli di kedua sisi harus sama:

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad x \in Z.$$

Jika untuk semua $x \in X$ ditetapkan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix), \quad x \in X.$$

Dilihat dari sifat $f_2(x) = -f_1(ix)$ untuk $x \in Z$, bahwa $\tilde{f}(x) = f(x)$ pada Z . Hal ini menunjukkan bahwa $\tilde{f}$ adalah perluasan dari f dari Z ke X . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada ruang vektor kompleks X , dan $\tilde{f}$ memenuhi $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pada X .

Perhatikan bahwa, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$ untuk $x \in X$, dan sifat linier dari $\tilde{f}_1$ pada ruang vektor riil X_r . Di sini $a + ib$ dengan a dan b bilangan riil adalah sebarang skalar kompleks:

$$\begin{aligned} \tilde{f}((a + ib)x) &= \tilde{f}_1(ax + ibx) - i\tilde{f}_1(iax - bx) \\ &= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\ &= (a + ib)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)] \\ &= (a + ib)\tilde{f}(x). \end{aligned}$$

Kemudian akan dibuktikan $\tilde{f}$ memenuhi $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ pada X . Untuk sebarang x sehingga $\tilde{f}(x) = 0$, ini berlaku karena $p(x) \geq 0$ dengan sifat $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ untuk semua $x, y \in X$ dan $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.

Jika x sedemikian rupa sehingga $\tilde{f}(x) \neq 0$, maka dapat ditulis menggunakan bentuk polar dari bilangan kompleks,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= |\tilde{f}(x)|e^{i\theta}, \quad \text{sehingga} \\ |\tilde{f}(x)| &= \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(e^{-i\theta}x). \end{aligned}$$

Karena $|\tilde{f}(x)|$ adalah bilangan riil, ekspresi terakhir juga riil dan sama dengan bagian riilnya. Oleh karena itu, berdasarkan sifat $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x)| &= \tilde{f}(e^{-i\theta}x) \\ &= \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 2

Misalkan f adalah fungsional linier terbatas pada suatu subruang Z dari ruang bernorma X . Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X yang merupakan perluasan dari f ke X dan memiliki norma yang sama, yaitu [2]:

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z,$$

di mana

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|}, \quad \text{dan} \quad \|f\|_Z = \sup_{x \in Z, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

Bukti

Jika $Z = \{0\}$, maka $f = 0$, dan perluasannya adalah $\tilde{f} = 0$. Misalkan $Z \neq \{0\}$. Akan dibuktikan menggunakan Teorema 1, oleh karena itu terlebih dahulu menemukan fungsi p yang sesuai. Untuk semua $x \in Z$, maka

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|.$$

Hal ini berbentuk seperti $|f(x)| \leq p(x)$, untuk semua $x \in Z$, di mana

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|.$$

Perhatikan bahwa p didefinisikan pada seluruh X . Selain itu, p memenuhi sifat $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ untuk semua $x, y \in X$, karena dengan ketaksamaan segitiga,

$$p(x + y) = \|f\|_Z \|x + y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

Fungsi p juga memenuhi sifat $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pada X , karena

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha|p(x).$$

Dengan demikian, Teorema 1 dapat diterapkan dan menyimpulkan bahwa ada fungsional linier $\tilde{f}$ pada X yang merupakan perluasan dari f dan memenuhi,

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Dengan mengambil supremum untuk semua $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$, diperoleh ketaksamaan:

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z.$$

Karena norma tidak dapat berkurang dalam perluasan, maka terdapat $\|\tilde{f}\|_X \geq \|f\|_Z$. Dengan demikian, diperoleh sifat

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z,$$

dan Teorema terbukti. $\square$

Teorema 3

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x_0 \neq 0$ adalah suatu elemen dari X . Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X , sehingga [2]:

$$\|\tilde{f}\| = 1 \quad \text{dan} \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Bukti

Subruang Z dari X , yang memuat semua elemen $x = \alpha x_0$ di mana α adalah sebuah skalar. Pada Z didefinisikan sebuah fungsional linier f dengan

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

Fungsional f terbatas dan memiliki norma $\|f\| = 1$ karena

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

Teorema 2 mengimplikasikan bahwa f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X , dengan norma $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. Dari definisi f dalam

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|,$$

dapat dilihat bahwa

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

$\square$

3. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yaitu menggunakan metode tinjauan literatur, yang bertujuan untuk memahami secara mendalam dan menafsirkan konsep serta fenomena yang diteliti. Dalam penelitian kualitatif, salah satu teknik yang sering digunakan adalah studi pustaka. Studi pustaka melibatkan pengumpulan data melalui pembacaan dan analisis sumber-sumber tertulis, seperti buku, jurnal, artikel ilmiah, dan sumber tertulis lainnya.

Studi ini dilaksanakan dengan melakukan pengumpulan data yang relevan dengan topik yang sedang diteliti, yakni melalui buku, jurnal, dan artikel. Dalam penelitian ini, peneliti memanfaatkan sejumlah referensi untuk menentukan topik. Kemudian, menentukan rumusan masalah

dan menentukan tujuan serta manfaat dari penelitian ini. Berikut tahapan-tahapan penelitian kualitatif:

1. Memahami dan mengkaji jurnal atau buku referensi utama.
2. Mencari sumber atau referensi lain yang relevan dengan topik.
3. Membuktikan fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

4. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibuktikan mengenai sifat-sifat fungsional linier terbatas menggunakan Teorema Hahn-Banach.

4.1. Sifat-Sifat Fungsional Linier Terbatas

Dalam Teorema Hahn-Banach, fungsional linier selain terdefinisi dalam ruang vektor atas lapangan bilangan riil, juga dapat terdefinisi pada ruang vektor atas lapangan bilangan kompleks [2]. Misalkan X adalah ruang vektor kompleks, sehingga $Z \subseteq X$ juga merupakan ruang vektor kompleks. Oleh karena itu, f adalah fungsional linier bernilai kompleks yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \text{untuk setiap } x \in Z,$$

di mana f_1 dan f_2 bernilai riil. Kemudian, dengan menggunakan $f = f_1 + if_2$, untuk setiap $x \in Z$, diperoleh

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Sehingga,

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad x \in Z,$$

dan apabila untuk semua $x \in X$ ditetapkan,

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix).$$

Proposition 1

Misalkan X adalah ruang vektor kompleks, dan $\tilde{f}$ adalah suatu fungsional linier pada X , jika untuk semua $x \in X$, didefinisikan [2]:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix), \quad (1)$$

maka berlaku

$$\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x). \quad (2)$$

Bukti

Akan ditunjukkan $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X . Berdasarkan sifat (1) untuk setiap $x, y \in X$, maka

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+y) &= \tilde{f}_1(x+y) - i\tilde{f}_1(i(x+y)) \\ &= \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i(\tilde{f}_1(ix) + \tilde{f}_1(iy)) \\ &= (\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)) + (\tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(iy)) \\ &= \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\tilde{f}$ memenuhi sifat aditivitas. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\tilde{f}$ memenuhi sifat ho-

mogenitas, yaitu:

Misalkan $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$, dan $\alpha = a + ib$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha x) &= \tilde{f}_1(\alpha x) - i\tilde{f}_1(i\alpha x) \\ &= \tilde{f}_1((a + ib)x) - i\tilde{f}_1(i(a + ib)x) \\ &= \alpha\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[\alpha\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\ &= (\alpha\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix)) - i(\alpha\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)) \\ &= (\alpha\tilde{f}_1(x) + ib\tilde{f}_1(x)) - (b\tilde{f}_1(ix) - ia\tilde{f}_1(x)) \\ &= (a + ib)\tilde{f}_1(x) - i(a + ib)\tilde{f}_1(ix) \\ &= \alpha(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)) \\ &= \alpha\tilde{f}(x)\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\tilde{f}$ juga memenuhi sifat homogenitas. Karena sifat aditivitas dan homogenitas terpenuhi, maka $\tilde{f}$ adalah fungsional linier.

Akan ditunjukkan $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(ix) &= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(i(ix)) \\ &= \tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(-x) \\ &= \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_1(x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}i\tilde{f}(x) &= i(\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)) \\ &= i\tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(ix)\end{aligned}$$

Maka,

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_1(x) = i\tilde{f}(x)$$

□

Proposition 2

Misalkan X adalah ruang bernorma, dan misalkan $x_0 \in X$ dengan $x_0 \neq 0$. Berdasarkan asumsi Teorema 2.20, maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f} : X \rightarrow K$, dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga [2]:

$$\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$$

$$\tilde{f}(x_0) = 1$$

Bukti

Misalkan diambil subruang $Z \subset X$ dengan $Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in K\}$, $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Kemudian didefinisikan fungsional linier f pada Z dengan,

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha$$

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in K\}$ adalah ruang bernorma. Untuk setiap $x, y \in Z$ dan $\lambda \in K$ berlaku:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$ maka,

$$\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\| \geq 0$$

Karena $|\alpha| \geq 0$ dan $\|x_0\| > 0$ (sebab $x_0 \neq 0$) maka $\|x\| \geq 0$.

Syarat (N1) terpenuhi.

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Jika $\|x\| = 0$, maka

$$|\alpha| \cdot \|x_0\| = 0$$

Karena $\|x_0\| > 0$, ini berakibat $|\alpha| = 0$, sehingga $\alpha = 0$ dan $x = \alpha x_0 = 0$.

Jika $x = 0$, maka

$$\|x\| = |0| \cdot \|x_0\| = 0$$

Syarat (N2) terpenuhi.

$$(N3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Misalkan $x = \alpha x_0$ dan $\lambda x = \lambda \alpha x_0 = (\lambda \alpha) x_0$, maka

$$\|\lambda x\| = |\lambda \alpha| \cdot \|x_0\| = |\lambda| \cdot |\alpha| \cdot \|x_0\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Syarat (N3) terpenuhi.

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Misalkan $x = \alpha x_0$, $y = \beta x_0$, $x + y = (\alpha + \beta)x_0$, $\|x + y\| = |\alpha + \beta| \cdot \|x_0\|$,

$$\|x + y\| \leq (|\alpha| + |\beta|) \cdot \|x_0\| = \|x\| + \|y\|$$

Syarat (N4) terpenuhi.

Karena syarat (N1) sampai (N4) terpenuhi, maka fungsi $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$, untuk $x = \alpha x_0 \in Z$, adalah norma pada ruang Z .

Untuk sebarang $x, y \in Z$ dan skalar $\alpha \in K$, akan diperiksa f bersifat linier.

a) Ambil sebarang $x = ax_0 \in Z$ dan $y = bx_0 \in Z$, maka

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f((a + b)x_0) \\ &= f(ax_0) + f(bx_0) = f(x) + f(y)\end{aligned}$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat aditivitas.

b) Ambil sebarang $x = bx_0 \in Z$ dan $\alpha \in K$, maka

$$f(\alpha x) = f((\alpha b)x_0) = \alpha f(bx_0) = \alpha f(x)$$

Dengan demikian, f memenuhi sifat homogenitas.

Karena f memenuhi sifat aditivitas dan homogenitas, maka f adalah fungsional linier.

Akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsional linier terbatas. Berdasarkan definisi, fungsional linier f dikatakan terbatas apabila terdapat suatu konstanta bilangan riil $C > 0$ sedemikian sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$, untuk semua $x \in Z$.

Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$, $f(x) = \alpha$ dan $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$ maka $|f(x)| = |\alpha|$ dan

$$|\alpha| = \frac{\|x\|}{\|x_0\|}, \quad \text{kemudian disubstitusikan sehingga,}$$

$$|f(x)| = |\alpha| = \frac{\|x\|}{\|x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|} \cdot \|x\|$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\|x_0\|} \cdot \|x\|$$

Dengan demikian, terbukti bahwa f adalah fungsional linier terbatas dengan $C = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\|\tilde{f}\| = \|x_0\|^{-1}$ dan $\tilde{f}(x_0) = 1$. Ambil $x = \alpha x_0$, $f(x) = \alpha$, dan $\|x\| = |\alpha| \cdot \|x_0\|$. Maka berdasarkan definisi fungsional linier terbatas, norma dari f didefinisikan sebagai,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in Z \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|\alpha|}{|\alpha| \cdot \|x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|} = \|x_0\|^{-1}$$

Berdasarkan Teorema Hahn-Banach 2.15, setiap fungsional linier terbatas f yang didefinisikan pada subruang $Z \subset X$ dapat diperluas menjadi fungsional linier terbatas $\tilde{f} : X \rightarrow K$ dengan $\|\tilde{f}\| = \|f\| = \frac{1}{\|x_0\|}$. Karena $\tilde{f}$ memperluas f dan $f(x_0) = 1$, maka

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1.$$

□

4.2. Kekontinuan dan Keterbatasan Fungsional Linier

Teorema 4

Misalkan $f : D(f) \rightarrow K$ (dengan $K = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah fungsional linier, di mana $D(f)$ merupakan domain dari ruang bernorma X . Maka f bersifat kontinu jika dan hanya jika f terbatas, yaitu terdapat konstanta bilangan riil $C > 0$ sehingga [2]:

$$|f(x)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(f).$$

Bukti

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika f terbatas, maka f kontinu. Misalkan $f \neq 0$, diasumsikan f adalah fungsional linier terbatas dan ambil sebarang $x_0 \in D(f)$. Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka untuk setiap $x \in D(f)$ dengan $\|x - x_0\| < \delta$, di mana $\delta = \varepsilon/C$ berlaku,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| < C \cdot \delta = \varepsilon.$$

Karena $x_0 \in D(f)$ dipilih sebarang, maka f kontinu.

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika f kontinu, maka f terbatas. Diambil sebarang $y \in D(f)$ dengan $y \neq 0$, karena f kontinu di sebarang titik $x_0 \in D(f)$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga, untuk $x \in D(f)$ dengan

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y,$$

maka $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon$, untuk semua $x \in D(f)$ berlaku $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &= \|f(x - x_0)\| \\ &= \left\| f\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right) \right\| \\ &= \frac{\delta}{\|y\|} \|f(y)\|. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{\delta}{\|y\|} \|f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Dengan demikian,

$$\|f(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|.$$

y dapat ditulis $\|f(y)\| \leq C\|y\|$. Jadi, f terbatas dengan konstanta $C = \varepsilon/\delta$.

Dari pembuktian dua sisi tersebut, maka telah terbukti bahwa fungsional linier f kontinu jika dan hanya jika f terbatas. □

4.3. Fungsional Sublinier pada Fungsional Linier

Proposition 3

Misalkan p fungsional bernilai riil pada ruang vektor X yang bersifat subaditif dan untuk semua $x, y \in X$ memenuhi sifat-sifat berikut[2]:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

Untuk setiap skalar α memenuhi,

$$p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$$

Sehingga untuk setiap $x_0 \in X$, terdapat sebuah fungsional linier $\tilde{f}$ pada X sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$,

1. $\tilde{f}(x_0) = p(x_0)$
2. $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Bukti

Misalkan $Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah subruang dari X . f_0 didefinisikan sebagai $f_0 : Z \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga,

$$f_0(\alpha x_0) := \alpha p(x_0), \quad \text{untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Akan ditunjukkan bahwa $f_0(\alpha x_0) \leq p(\alpha x_0)$ untuk semua $x \in Z$. Misalkan $x = \alpha x_0 \in Z$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0)$ dan

$$p(x) = p(\alpha x_0) = |\alpha|p(x_0).$$

Karena p adalah homogen positif, maka:

- Jika $\alpha \geq 0$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0) = |\alpha|p(x_0) = p(x)$
- Jika $\alpha < 0$, maka $f_0(x) = \alpha p(x_0) = -|\alpha|p(x_0) = -p(x)$, dan $p(x) = |\alpha|p(x_0)$

Jadi, untuk semua $x \in Z$ berlaku $f_0(x) = -p(x) \Rightarrow f_0(x) \leq p(x)$.

Karena f_0 adalah fungsional linier pada subruang $Z \subset X$, p adalah fungsional sublinier, dan $f_0(x) \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$, maka menggunakan Teorema Hahn-Banach untuk memperluas suatu fungsional linier f di seluruh ruang X . Sehingga, dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach, terdapat perluasan $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ yang linier dan memenuhi,

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 \quad \text{dan} \quad \tilde{f}(x) \leq p(x) \forall x \in X,$$

dan berlaku

$$\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}_0(x_0) = p(x_0).$$

Kemudian, akan dibuktikan $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$. Jika $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ dan $\tilde{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, maka

$$-\tilde{f}(x) \leq p(x) \Rightarrow -p(x) \leq \tilde{f}(x)$$

sehingga

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x).$$

Dengan demikian, telah dibuktikan bahwa untuk setiap $x_0 \in X$, jika p adalah fungsional sublinier, maka ada fungsional linier $\tilde{f}$ pada X sehingga:

$$\tilde{f}(x_0) = p(x_0)$$

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

□

Proposition 4

Jika X dalam Teorema 1 adalah ruang bernorma dan $p(x) \leq k\|x\|$ untuk $k > 0$, maka $\|\tilde{f}\| \leq k$ [2].

Bukti

Diketahui X adalah ruang bernorma, $p(x) \leq k\|x\|$ untuk suatu konstanta $k > 0$, f adalah fungsional linier yang terdefinisi pada subruang $Z \subset X$, $|f(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in Z$, dan $\tilde{f}$ adalah perluasan linier dari f ke seluruh X yang memenuhi $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ untuk semua $x \in X$.

Akan ditunjukkan bahwa $\|\tilde{f}\| \leq k$ adalah norm dari fungsional linier $\tilde{f}$ yang dibatasi oleh konstanta k . Berdasarkan Teorema Hahn-Banach, perluasan $\tilde{f}$ dari f memenuhi:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Asumsikan $p(x) \leq k\|x\|$, diperoleh:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) \leq k\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Dari definisi norm dari fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada ruang bernorma X , bahwa:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)|.$$

Karena untuk setiap x dengan $\|x\| = 1$ berlaku $|\tilde{f}(x)| \leq k$, maka:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \leq k.$$

Dari hasil di atas, telah ditunjukkan bahwa norma dari fungsional linier hasil perluasan $\tilde{f}$ tetap terbatas oleh k , yaitu:

$$\|\tilde{f}\| \leq k.$$

□

4.4. Konstruksi Teorema Hahn-Banach

Teorema 5: Perluasan Fungsional Linier

Misalkan X adalah ruang vektor riil dan p adalah fungsional sublinier pada X . Misalkan f adalah fungsional linier yang didefinisikan pada subruang Z dari X dan memenuhi,

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Maka f memiliki perluasan linier $\tilde{f}$ dari Z ke X yang memenuhi,

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X,$$

yaitu $\tilde{f}$ adalah fungsional linier pada X dan $\tilde{f}(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in Z$ [2].

Teorema 6: Fungsional Linier Terbatas

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x_0 \neq 0$ adalah suatu elemen dari X . Maka terdapat fungsional linier terbatas $\tilde{f}$ pada X , sehingga [2]:

$$\|\tilde{f}\| = 1 \quad \text{dan} \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Dari Teorema 5 yang akan dikonstruksikan ke Teorema 6, maka akan ditunjukkan:

- $\tilde{f}$ yang linier di seluruh X
- $\tilde{f}$ terbatas dan kontinu terhadap norm
- $\tilde{f}$ memenuhi $\|\tilde{f}\| = 1$ dan $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$

Diberikan $x_0 \in X$, didefinisikan subruang Z sebagai himpunan semua vektor yang berupa kelipatan skalar dari x_0 , yaitu

$$Z = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Kemudian didefinisikan fungsional $f \in Z$ yaitu

$$f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|, \quad \text{untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Fungsional sublinier p , yaitu $p(x) = \|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Perhatikan bahwa,

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Diambil $x = \alpha x_0 \in Z$, maka:

- Jika $\alpha > 0$,
 $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = p(\alpha x_0)$

- Jika $\alpha = 0$,
 $f(0) = 0 = p(0)$
- Jika $\alpha < 0$,
 $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| < |\alpha| \|x_0\| = p(\alpha x_0)$

Dengan demikian, untuk semua $x \in Z$, maka $f(x) \leq p(x)$.

Kemudian menerapkan Teorema 5 bahwa terdapat perluasan linier $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ di mana:

1. $\tilde{f}$ linier di seluruh X
2. $\tilde{f}(x) \leq p(x) = \|x\|$, untuk semua $x \in X$
3. $\tilde{f}(x) = f(x)$, untuk semua $x \in Z$. Sehingga,

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$$

Karena $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ dan $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|$, untuk setiap $x \in X$, maka:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \neq 1} \frac{|\tilde{f}(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

Sehingga,

$$\|\tilde{f}\| = 1$$

Dengan demikian, $\tilde{f}$ adalah fungsional linier terbatas dengan

$$\|\tilde{f}\| = 1, \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan sifat-sifat fungsional linier sebagai berikut:

1. Fungsional linier yang didefinisikan dari fungsional riil dapat diperluas ke ruang vektor kompleks dengan struktur $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$, dan terbukti memenuhi $\tilde{f}(ix) = i\tilde{f}(x)$.
2. Dengan menggunakan Teorema Hahn-Banach, setiap elemen $x_0 \neq 0$ pada ruang bernorma dapat dihubungkan dengan suatu fungsional linier terbatas f yang memenuhi $f(x_0) = 1$ dan $\|f\| = \|x_0\|^{-1}$.
3. Fungsional linier f bersifat kontinu jika dan hanya jika f terbatas.
4. Untuk setiap fungsional sublinier p , terdapat fungsional linier f yang mendekati atau dibatasi oleh p , dengan $|f(x)| \leq p(x)$.
5. Perluasan fungsional linier $\tilde{f}$ melalui Teorema Hahn-Banach tetap memiliki norma yang dibatasi oleh konstanta k , selama fungsi sublinier p memenuhi $p(x) \leq k\|x\|$.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Rahmadita Widya Astuti: Konseptualisasi, Metodologi, Investigasi, Penulisan–Draf Awal, Visualisasi. **Dian Maharani:** Supervisi, Penulisan–Telaah dan Penyuntingan, Kurasi Data, Administrasi Proyek. **Abdul Aziz:** Supervisi, Validasi, Penulisan–Telaah dan Penyuntingan.

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Model ChatGPT versi 4 digunakan untuk membantu penyusunan draf awal, koreksi struktur kalimat, dan penyeselarasan terminologi matematika dalam penulisan naskah.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan.

Pendanaan dan Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang atas dukungan fasilitas dan bimbingan dalam proses penyelesaian penelitian ini.

Ketersediaan Data

Data dalam penelitian ini berupa hasil studi literatur dan tidak mengandung data primer atau sekunder yang dapat diakses secara publik. Oleh karena itu, tidak ada data yang tersedia untuk dibagikan. Informasi lebih lanjut dapat diperoleh dari penulis korespondensi atas permintaan yang wajar.

Daftar Pustaka

- [1] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed. Maryland: Pearson, 2012.
- [2] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Mesir: Wiley, 1978.
- [3] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 8th ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2018.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed. New York, NY: Springer, 1990.
- [5] L. Zedam, “An application of hahn-banach theorem to fuzzy bounded linear functionals,” *Journal of Fuzzy Mathematics*, vol. 20, no. 1, pp. 123–13, 2012.
- [6] D. E. Kebiche and P. Giordano, *The hahn-banach theorem in spaces of nonlinear generalized functions*, Diakses dari <https://arxiv.org/abs/2410.08679>, 2024.
- [7] B. Kolman and D. R. Hill, *Elementary Linear Algebra with Applications*, 9th ed. United States of America: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York, NY: Springer, 2010.
- [9] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 4th ed. United States of America: Wiley, 2011.
- [10] W. Rudin, *Functional Analysis*. Singapura: McGraw-Hill Book, 1991.
- [11] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4th ed. Switzerland: Springer, 2025.