

Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul

Aisyah Dhifa Az-Zahra¹,
 Mohammad Nafie Jauhari¹,
 and Juhari¹

¹Program Studi Matematika, Fakultas
 Sains dan Teknologi, Universitas Islam
 Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
 Indonesia

Article History

Received 17 Desember 2025

Revised 25 Januari 2026

Accepted 26 Februari 2026

Published 28 Februari 2026



Copyright © 2026 by Authors, Published by
 JRMM Group. This is an open access
 article under the CC BY-SA License.



Abstract. A module is a nonempty set equipped with scalar multiplication by elements of a ring. The zero divisors of a module are defined as all elements of the module that arise from the multiplication of the module by its annihilator. The set of zero divisors can be represented in the form of a graph, known as the zero divisor graph of a module, where the vertices correspond to zero divisors and two distinct vertices are adjacent if their product is zero. The chromatic number is defined as the minimum number of colors required to color all vertices of a graph. The aim of this study is to determine a general formula for the zero divisor graph of a module. In this research, the modules considered are $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, and $\mathbb{Z}_{4p}$ over the ring $\mathbb{Z}$, where p and q are prime numbers. The results indicate that the chromatic number of the zero divisor graph of the modules $\mathbb{Z}_{pq}$ and $\mathbb{Z}_{4p}$ is 2, whereas the chromatic number of the zero divisor graph of the module $\mathbb{Z}_{p^2}$ is $p - 1$.

Keywords: Chromatic Number; Zero Divisor Graph; Module

Abstrak. Modul merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar oleh elemen-elemen dari suatu ring. Pembagi nol pada suatu modul didefinisikan sebagai seluruh elemen modul yang merupakan hasil perkalian annihilator dengan modul tersebut. Himpunan pembagi nol dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang disebut sebagai graf pembagi nol atas modul, yaitu graf yang titik-titiknya merupakan elemen pembagi nol, dan dua titik berbeda saling terhubung apabila hasil perkalian keduanya adalah nol. Bilangan kromatik titik didefinisikan sebagai jumlah minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai seluruh titik pada suatu graf sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang memiliki warna yang sama. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan rumus umum graf pembagi nol atas modul. Pada penelitian ini, modul yang digunakan adalah modul $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$ atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p dan q merupakan bilangan prima. Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{4p}$ adalah 2, sedangkan bilangan kromatik titik graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah $p - 1$.

Kata kunci: Bilangan Kromatik Titik; Graf Pembagi Nol; Modul.

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang matematika yang mempelajari hubungan antar objek yang direpresentasikan dalam bentuk titik dan sisi. Secara matematis, graf G dapat dituliskan sebagai $G = (V(G), E(G))$ di mana himpunan titik dilambangkan dengan $V(G)$, yaitu himpunan tak kosong yang berisi semua titik pada graf G , sedangkan himpunan sisi dilambangkan dengan $E(G)$, yaitu pasangan tak berurutan dari dua titik berbeda di $V(G)$ [1]. Salah satu konsep penting dalam teori graf adalah pewarnaan graf, khususnya bilangan kromatik titik, yang hingga kini masih terus dikembangkan dan memiliki banyak permasalahan terbuka. Kajian teori graf juga berkembang melalui keterkaitannya dengan struktur aljabar.

Beck [2] pertama kali memperkenalkan graf pembagi nol pada ring komutatif dalam konteks pewarnaan graf, yang kemudian dikembangkan oleh beberapa peneliti [3] [4] [5]. Konsep tersebut selanjutnya diperluas dari ring ke modul, yang merupakan generalisasi struktur aljabar yang dibangun atas ring. Modul memiliki peran penting dalam aljabar abstrak dan mencakup ruang vektor sebagai kasus khusus.

Pada penelitian ini, teori utama yang digunakan dalam membentuk struktur graf pembagi nol merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh Naghipour [6]. Menurut Naghipour, graf pembagi nol atas modul, yang dinotasikan dengan $\Gamma(M)$, didefinisikan sebagai graf tak berarah, yaitu graf yang tidak memperhatikan orientasi sisi. Himpunan titik dari graf tersebut adalah himpunan pembagi nol atas modul, yaitu $Z(M)$. Dua titik berbeda $v_i \neq 0$ dan $v_j \neq 0$ dengan $v_i, v_j \in Z(M)$

dikatakan saling terhubung apabila $v_i \in \text{ann}(v_j)M$ atau $v_j \in \text{ann}(v_i)M$. Penelitian tersebut menghasilkan berbagai teorema yang berkaitan dengan struktur graf pembagi nol atas modul secara umum.

Penelitian mengenai pembagi nol atas modul sebelumnya juga telah dilakukan oleh Behoodi [7], yang membahas generalisasi konsep pembagi nol atas modul ketika modul tersebut berimpit dengan ring, yaitu pada kasus $M = R$. Selanjutnya, Safeeyan [8] mengembangkan kajian pembagi nol atas modul dengan memfokuskan pada modul yang dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung dari submodul-submodulnya. Hingga saat ini, banyak peneliti yang masih mengembangkan teori terkait pembagi nol atas modul [9][10][11][12]. Naghipour [6] kemudian memperluas teori graf pembagi nol atas modul dengan menggunakan modul multiplikasi dan memperoleh sejumlah hasil yang berkaitan dengan diameter dan girth dari graf pembagi nol yang terbentuk.

Meskipun demikian, penelitian-penelitian sebelumnya masih terbatas pada pembahasan modul secara umum dan belum secara khusus mengkaji modul-modul tertentu. Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan modul-modul yang lebih spesifik, yaitu modul multiplikasi $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$, yang belum dibahas secara rinci dalam penelitian sebelumnya. Perbedaan struktur pada modul-modul tersebut akan memengaruhi bentuk graf pembagi nol yang dihasilkan.

Dengan memanfaatkan teori-teori yang telah dikembangkan dalam penelitian terdahulu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum bilangan kromatik titik dari graf pembagi nol atas modul $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$. Kajian ini di-

harapkan dapat memberikan kontribusi dalam memperkaya pemahaman mengenai hubungan antara struktur modul dan sifat-sifat graf pembagi nol yang dihasilkan.

2. Konsep Dasar

Bagian ini merangkum definisi dan teorema yang diperlukan untuk membangun graf pembagi nol atas modul serta menentukan bilangan kromatik titiknya pada pembahasan berikutnya.

Teorema 1

Kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{n}$ dapat diselesaikan hanya jika $d = \text{FPB}(a, n)$ membagi b atau dapat ditulis dengan $d \mid b$. Pada kasus ini, maka $ax \equiv b \pmod{n}$ memiliki d solusi. Jika a dan n relatif prima atau $d = 1$, maka kongruensi tersebut memiliki satu solusi [13].

Definisi 1

Misalkan $(R, +, \times)$ merupakan ring (tidak harus komutatif dan tidak harus memiliki elemen identitas). Suatu R -modul kiri atau modul kiri atas R adalah suatu himpunan M yang memenuhi aksioma berikut [14]:

1. Operasi biner $+$ pada M membentuk grup abel.
2. Pemetaan $R \times M \rightarrow M$ dinotasikan dengan $r \times m$ dan untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ memenuhi:
 - $(r + s) \times m = r \times m + s \times m$, untuk setiap $r, s \in R, m \in M$,
 - $(r \times s) \times m = r \times (s \times m)$, untuk setiap $r, s \in R, m \in M$,
 - $r \times (m + n) = r \times m + r \times n$, untuk setiap $r \in R, m, n \in M$,
 - $1 \times m = m$, untuk setiap $m \in M$.

Definisi 2

Misalkan M adalah modul atas ring R , maka annihilator dari elemen $m \in M$ dapat dituliskan sebagai [14]:

$$\text{ann}(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}.$$

Definisi 3

Misalkan M adalah modul atas ring R . Himpunan pembagi nol dari M adalah [6]:

$$Z(M) = \{m \in M \mid m \in \text{ann}(n)M \text{ atau } n \in \text{ann}(m)M, \text{ untuk suatu } n \neq 0 \in M\}$$

Definisi 4

Misalkan M adalah modul atas ring R . Graf pembagi nol atas M yang dinotasikan dengan $\Gamma(M)$ adalah graf

dengan himpunan titik $Z(M) - \{\bar{0}\}$ dengan dua titik berbeda u dan v terhubung langsung jika dan hanya jika $u \in \text{ann}(v)M$ atau $v \in \text{ann}(u)M$ [6].

Definisi 5

Pewarnaan titik pada graf adalah proses pemberian warna pada titik dengan aturan dua titik yang terhubung langsung tidak boleh memiliki warna yang sama [15].

Definisi 6

Misalkan G adalah graf. Bilangan kromatik titik dari G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga titik pada G dapat diwarnai dengan k warna [15].

Teorema 2

Misalkan G adalah graf tak kosong, graf G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$ [16].

Teorema 3

Bilangan kromatik titik pada graf lengkap K_n adalah n [17].

3. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan pendekatan studi literatur dan penalaran deduktif. Seluruh proses dilakukan dengan menelaah definisi, sifat, dan teorema yang berkaitan dengan modul atas ring $\mathbb{Z}$, annihilator, pembagi nol atas modul, serta konstruksi graf pembagi nol $\Gamma(M)$. Selanjutnya, teori pewarnaan graf digunakan untuk menentukan bilangan kromatik titik dari graf yang terbentuk.

Secara operasional, untuk setiap modul yang dikaji, yakni $\mathbb{Z}_{pq}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$, dan $\mathbb{Z}_{4p}$, terlebih dahulu ditentukan himpunan pembagi nolnya berdasarkan karakterisasi kongruensi dan sifat faktor prima pada modulus. Himpunan tersebut kemudian digunakan untuk membentuk himpunan titik $V(\Gamma(M))$ dan menetapkan keterhubungan antartitik sesuai definisi graf pembagi nol atas modul, sehingga diperoleh struktur graf $\Gamma(M)$ secara eksplisit. Setelah struktur graf diperoleh, pola umum graf diidentifikasi melalui penyusunan lemma dan pembuktian formal, misalnya dengan menunjukkan graf bersifat bipartisi lengkap atau isomorfik dengan graf lengkap tertentu. Terakhir, bilangan kromatik titik $\chi(\Gamma(M))$ ditentukan menggunakan hasil-hasil dasar teori graf yang relevan, sehingga diperoleh rumus umum bilangan kromatik titik untuk masing-masing modul yang ditinjau.

4. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan hasil analisis struktur graf pembagi nol atas modul yang ditinjau serta penentuan bilangan kromatik

titiknya. Pembahasan diawali dengan konstruksi graf pada modul Z_{pq} , kemudian dilanjutkan pada modul Z_{p^2} dan Z_{4p} untuk memperoleh pola umum yang terbentuk.

4.1. Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{pq}

Lema 1

Misalkan Z_{pq} adalah modul atas $\mathbb{Z}$, dengan p dan q adalah bilangan prima dan $p \neq q$. Maka, himpunan pembagi nol dari Z_{pq} adalah

$$Z(Z_{pq}) = \{\bar{0}, \bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1), \bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}.$$

Bukti

Diketahui Z_{pq} merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ dengan p, q adalah bilangan prima dan $p \neq q$. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in Z_{pq}$ merupakan pembagi nol dari Z_{pq} jika terdapat $y \neq 0 \in Z_{pq}$ sedemikian sehingga $x \in \text{ann}(y)M$ atau $y \in \text{ann}(x)M$, hal ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{pq}$. Jelas bahwa $\bar{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in Z_{pq}$ berlaku $\bar{0} \cdot y \equiv 0 \pmod{pq}$. Berdasarkan Teorema 1, $xy \equiv 0 \pmod{pq}$ akan memiliki solusi tak nol apabila $\text{FPB}(x, pq) > 1$. Sehingga, haruslah x merupakan kelipatan dari p atau kelipatan dari q . Dengan demikian,

$$Z(Z_{pq}) = \{\bar{0}, \bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1), \bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}.$$

□

Lema 2

Misalkan p, q adalah bilangan prima dan $p \neq q$, maka $\Gamma(Z_{pq})$ adalah graf bipartisi lengkap dengan partisi titik $A = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1)\}$ dan $B = \{\bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}$.

Bukti

Berdasarkan Lemma 1, maka himpunan titik dari $\Gamma(Z_{pq})$ adalah

$$V(\Gamma(Z_{pq})) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(q-1), \bar{q}, \dots, \bar{q}(p-1)\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa setiap titik di A akan saling terhubung langsung dengan semua titik di B . Misal $a = mp$ dan $b = nq$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$ dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Perhatikan bahwa

$$ab = (mp)(nq) = (mn)(pq) \equiv 0 \pmod{pq}$$

sehingga $mp \in \text{ann}(nq)M$ dan $nq \in \text{ann}(mp)M$. Oleh karena itu, seluruh elemen di himpunan A saling terhubung langsung dengan seluruh elemen di himpunan B . Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\{a, a'\} \notin E(\Gamma(Z_{pq}))$, $\forall a, a' \in A$. Misalkan $a = mp$ dan $a' = np$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan $aa' \not\equiv 0 \pmod{pq}$. Per-

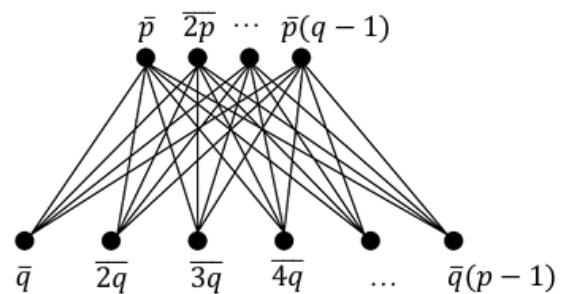
hatikan bahwa

$$aa' = (mp)(np) = mnp^2.$$

Andaikan $aa' \equiv 0 \pmod{pq}$ maka terdapat $t \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $aa' = tpq$. Diperoleh

$$mnp^2 = tpq \Leftrightarrow mnp = tq.$$

Agar persamaan tersebut benar, maka ruas kiri harus habis dibagi q . Namun, karena p dan q adalah bilangan prima yang berbeda, maka p tidak mengandung faktor prima q . Maka satu-satunya cara agar mnp habis dibagi q adalah jika mn dibagi q . Dalam hal ini, $mn \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ sehingga tidak ada m maupun n yang merupakan kelipatan q . Akibatnya, mn juga tidak habis dibagi q . Dengan demikian, mnp tidak habis dibagi q , sehingga tidak ada bilangan bulat t yang memenuhi $mnp = tq$. Sehingga $mnp^2 \neq tpq$ atau ekuivalen dengan $aa' \not\equiv 0 \pmod{pq}$. Jadi, pasangan titik dari himpunan yang sama tidak terhubung langsung.



Gambar 1: Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{pq}

Karena graf $\Gamma(Z_{pq})$ merupakan graf bipartisi lengkap, maka berdasarkan Teorema 2 bilangan kromatik titik graf $\Gamma(Z_{pq})$ adalah,

$$\chi(\Gamma(Z_{pq})) = 2.$$

□

4.2. Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{p^2}

Lema 3

Misalkan Z_{p^2} adalah modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Maka, himpunan pembagi nol atas modul Z_{p^2} adalah

$$Z(Z_{p^2}) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

Bukti

Diketahui Z_{p^2} merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in Z_{p^2}$ merupakan pembagi nol jika terdapat $y \neq 0 \in Z_{p^2}$ sedemikian sehingga $x \in \text{ann}(y)M$

atau $y \in \text{ann}(x)M$, hal ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol dari Z_{p^2} apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehingga $xy = 0$. Misal $x \in Z_{p^2}$ adalah suatu pembagi nol dari Z_{p^2} , maka terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{p^2}$. Jelas bahwa $\bar{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in Z_{p^2}$ berlaku $\bar{0} \cdot y \equiv 0 \pmod{pq}$. Berdasarkan Teorema 1, maka $xy \equiv 0 \pmod{p^2}$ memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika $\text{FPB}(x, p^2) > 1$ dan kondisi tersebut terpenuhi apabila x merupakan kelipatan dari p . Oleh karena itu,

$$Z(Z_{p^2}) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

□

Akibat 1

Himpunan titik pada $\Gamma(Z_{p^2})$ adalah

$$V(\Gamma(Z_{p^2})) = \{\bar{p}, \dots, \bar{p}(p-1)\}.$$

Lema 4

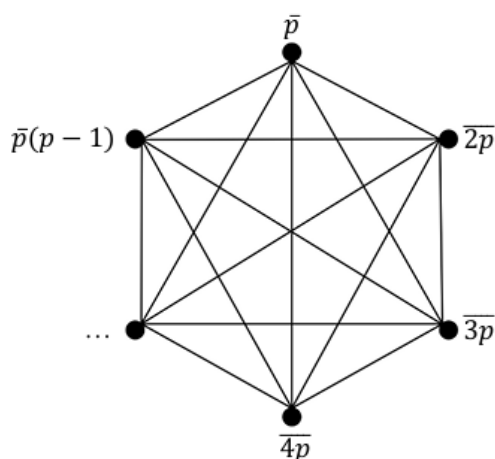
Misalkan p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka $\Gamma(Z_{p^2}) \cong K_{p-1}$.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa $\{u, v\} \in E(\Gamma(Z_{p^2}))$, $\forall u, v \in V(\Gamma(Z_{p^2}))$ dan $u \neq v$. Misalkan $u = mp$ dan $v = np$ dengan $u \neq v \in V(\Gamma(Z_{p^2}))$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa

$$uv = (mp)(np) = (mn)p^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

sehingga $mp \in \text{ann}(np)M$ dan $(np) \in \text{ann}(mp)M$. Oleh karena itu, $\{u, v\} \in E(\Gamma(Z_{p^2}))$. Jadi, seluruh titik pada $\Gamma(Z_{p^2})$ saling terhubung langsung. Dengan demikian, $\Gamma(Z_{p^2})$ adalah graf lengkap yang berorde $p-1$.



Gambar 2: Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{p^2}

Berdasarkan Teorema 3, karena $\Gamma(Z_{(p^2)}) \cong K_{(p-1)}$ maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik $\Gamma(Z_{(p^2)})$ adalah $p-1$ atau dapat dituliskan sebagai,

$$\chi(\Gamma(Z_{(p^2)})) = p-1.$$

□

4.3. Bilangan Kromatik Titik Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{4p}

Lema 5

Misalkan Z_{4p} adalah modul atas ring $\mathbb{Z}$, dengan p adalah bilangan prima. Maka, himpunan pembagi nol atas modul Z_{4p} adalah

$$Z(Z_{4p}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1), \bar{p}, \bar{3p}\}.$$

Bukti

Diketahui Z_{4p} merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ dengan p adalah bilangan prima. Berdasarkan definisi pembagi nol atas modul, $x \in Z_{4p}$ merupakan pembagi nol jika terdapat $y \neq 0 \in Z_{4p}$ sedemikian sehingga $x \in \text{ann}(y)M$ atau $y \in \text{ann}(x)M$, hal ini ekuivalen dengan pernyataan bahwa x merupakan pembagi nol dari Z_{4p} apabila terdapat $y \neq 0$ sedemikian sehingga $xy = 0$. Misalkan $x \in Z_{4p}$ adalah suatu pembagi nol, maka terdapat $y \neq 0 \in Z_{4p}$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{4p}$. Jelas bahwa $\bar{0}$ merupakan pembagi nol karena untuk setiap $y \neq 0 \in Z_{4p}$ berlaku $\bar{0} \cdot y \equiv 0 \pmod{pq}$. Berdasarkan Teorema 1, maka $xy \equiv 0 \pmod{4p}$ akan memiliki solusi tak nol apabila $\text{FPB}(x, 4p) > 1$. Perhatikan bahwa,

1. Untuk $x \in \{p, 3p\}$, terdapat $y = 4n$ dengan $n = 1, 2, \dots, p-1$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{4p}$, maka $p \in Z(Z_{4p})$.
2. Untuk $x = 2p$, terdapat $y = 2$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{4p}$, maka $2p \in Z(Z_{4p})$.
3. Untuk $x \in \{2, 4, \dots, 2(p-1)\} \setminus \{2p\}$, terdapat $y = 2p$ sedemikian sehingga $xy \equiv 0 \pmod{4p}$, oleh karena itu $\{2, 4, \dots, 2(p-1)\} \setminus \{2p\} \subseteq Z(Z_{4p})$.
4. Untuk setiap x lainnya, diperoleh $\text{FPB}(x, 4p) = 1$ karena hanya memiliki solusi tunggal $y = 0$. Dengan demikian, x bukan merupakan pembagi nol.

Berdasarkan poin 1 sampai 4 diperoleh

$$Z(Z_{4p}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1), \bar{p}, \bar{3p}\}.$$

□

Lema 6

Misalkan p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka $\Gamma(Z_{4p})$ adalah graf bipartisi dengan partisi titik $A = \{\bar{p}, \bar{2p}, \bar{3p}\}$ dan $B = \{\bar{2}, \dots, \bar{2}(2p-1)\}$.

Bukti

Untuk membuktikan $\Gamma(Z_{4p})$ merupakan graf bipartisi, maka akan ditunjukkan bahwa $\{a, a'\} \notin E(\Gamma(Z_{4p}))$, $\forall a \in A, a' \in A$ dan $\{b, b'\} \notin E(\Gamma(Z_{4p}))$, $\forall b \in B, b' \in B$. Andaikan $\{a, a'\} \in E(\Gamma(Z_{4p}))$, maka $aa' \equiv 0 \pmod{4p}$. Artinya, terdapat bilangan bulat s sedemikian sehingga $aa' = 4ps$. Perhatikan bahwa,

$$(2p)(p) = 4ps \Leftrightarrow 2p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = 2s.$$

Karena p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka tidak ada yang memenuhi s sedemikian sehingga $p = 2s$. Oleh karena itu, $(2p)(p) \not\equiv 0 \pmod{4p}$. Perhatikan bahwa,

$$(3p)(p) = 4ps \Leftrightarrow 3p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}s.$$

Karena p adalah bilangan bulat, maka $\frac{4}{3}s$ juga harus bilangan bulat, sehingga s yang memenuhi adalah $3r$ dengan $r \in \mathbb{Z}$, sehingga

$$p = \frac{4}{3}s \Leftrightarrow p = \frac{4}{3}(3r) \Leftrightarrow p = 4r.$$

Karena p adalah bilangan prima, maka tidak ada r yang memenuhi sedemikian sehingga $p = 4r$. Oleh karena itu, $(3p)(p) \not\equiv 0 \pmod{4p}$. Perhatikan bahwa,

$$(2p)(3p) = 4ps \Leftrightarrow 6p^2 = 4ps \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}s.$$

Karena p adalah bilangan bulat, maka $\frac{2}{3}s$ juga harus bilangan bulat, sehingga s yang memenuhi adalah $3r$ dengan $r \in \mathbb{Z}$. Diperoleh

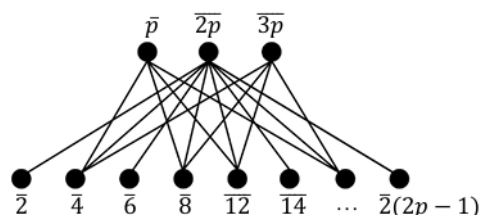
$$p = \frac{2}{3}s \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}(3r) \Leftrightarrow p = 2r.$$

Karena p adalah bilangan prima dan $p > 2$, maka tidak ada r yang memenuhi sedemikian sehingga $p = 2r$. Oleh karena itu, $(3p)(p) \not\equiv 0 \pmod{4p}$. Berdasarkan analisis tersebut, karena tidak ada $a \in A$ dan $a' \in A$ sedemikian sehingga $aa' \equiv 0 \pmod{4p}$ maka tidak ada titik dalam A yang terhubung langsung.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\{b, b'\} \notin E(\Gamma(Z_{4p}))$, $\forall b \in B, b' \in B$. Misalkan $b = 2k$ dan $b' = 2l$ dengan $k, l \in \{1, 2, \dots, 2p-1\}$ dan $k, l \neq p$. Andaikan $\{b, b'\} \in E(\Gamma(Z_{4p}))$, maka $bb' \equiv 0 \pmod{4p}$ sehingga terdapat $t \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$4kl = 4pt \Leftrightarrow kl = pt.$$

Agar persamaan tersebut benar, maka ruas kiri harus habis dibagi p . Namun, karena p adalah bilangan prima dan $k, l \in \{1, 2, \dots, 2p-1\}$ dengan $kl \neq p$ maka tidak ada faktor p pada k maupun l . Akibatnya, hasil kali kl juga tidak habis dibagi p . Dengan demikian, tidak ada bilangan bulat t yang memenuhi $kl = tp$. Oleh karena itu, $bb' \not\equiv 0 \pmod{4p}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada dua titik berbeda dalam himpunan B yang saling terhubung langsung.



Gambar 3: Pola Graf Pembagi Nol Atas Modul Z_{4p}

Karena pola graf $\Gamma(Z_{4p})$ merupakan graf bipartisi, maka berdasarkan Teorema 2 bilangan kromatik titik graf $\Gamma(Z_{4p})$ adalah,

$$\chi(\Gamma(Z_{4p})) = 2.$$

□

5. Kesimpulan

Berdasarkan konstruksi graf pembagi nol atas modul serta analisis pewarnaan titik yang dilakukan, diperoleh bahwa untuk bilangan prima p dan q dengan $p \neq q$ berlaku $\chi(\Gamma(Z_{pq})) = 2$. Untuk $p > 2$, graf $\Gamma(Z_{p^2})$ isomorfik dengan graf lengkap K_{p-1} sehingga $\chi(\Gamma(Z_{p^2})) = p-1$. Selain itu, untuk $p > 2$ graf $\Gamma(Z_{4p})$ bersifat bipartisi, sehingga bilangan kromatik titiknya adalah $\chi(\Gamma(Z_{4p})) = 2$.

Daftar Pustaka

- [1] A. Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, *Teori Graf: Topik Dasar Untuk Tugas Akhir / Skripsi*. Malang, Indonesia: Uin-Maliki Press, 2009.
- [2] I. Beck, "Coloring of commutative rings," *Journal of Algebra*, vol. 116, no. 1, pp. 208–226, 1988. DOI: [10.1016/0021-8693\(88\)90202-5](https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90202-5).
- [3] D. F. Anderson and P. S. Livingston, "The zero-divisor graph of a commutative ring," *Journal of Algebra*, vol. 217, no. 2, pp. 434–447, 1999. DOI: [10.1006/jabr.1998.7840](https://doi.org/10.1006/jabr.1998.7840).
- [4] D. D. Anderson and M. Naseer, "Beck's coloring of a commutative ring," *Journal of Algebra*, vol. 159, no. 2, pp. 500–514, 1993. DOI: [10.1006/jabr.1993.1171](https://doi.org/10.1006/jabr.1993.1171). Available online.
- [5] N. Zaid, N. H. Sarmin, and S. M. S. Khasraw, "The applications of zero divisors of some finite rings of matrices in probability and graph theory," *Researchgate*, vol. 83, no. 1, pp. 127–132, 2024. DOI: [10.11113/jurnalteknologi.v83.14936](https://doi.org/10.11113/jurnalteknologi.v83.14936). Available online.
- [6] A. R. Naghipour, "The zero-divisor graph of a module," *Journal Of Algebraic Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 155–171, 2017. DOI: [10.22044/Jas.2017.858](https://doi.org/10.22044/Jas.2017.858).
- [7] M. Behboodi, "Zero divisor graphs for modules over commutative rings," *Journal of Commutative Algebra*, vol. 4, no. 2, pp. 175–197, 2012. DOI: [10.1216/JCA-2012-4-2-175](https://doi.org/10.1216/JCA-2012-4-2-175).
- [8] S. Safaeeyan, M. Baziar, and E. Momtahan, "A generalization of the zero-divisor graph for modules," *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 51, no. 1, pp. 87–98, 2014. DOI: [10.4134/JKMS.2014.51.1.087](https://doi.org/10.4134/JKMS.2014.51.1.087).
- [9] M. Afkhami, E. Estaji, K. Khashyarmanesh, and M. R. Khorsandi, "Zero-divisor graphs of modules via module homomorphisms," *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 1, pp. 1–11, 2015.
- [10] M. Aijaz, S. Pirzada, and A. Somasundaram, "Zero-divisor graphs of unitary r-modules over commutative rings," *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, vol. 19, no. 1, pp. 69–73, 2022. DOI: [10.1080/09728600.2022.2058895](https://doi.org/10.1080/09728600.2022.2058895). Available online.

- [11] S. Babaeia, S. Payrovi, and E. Sengelen Sevim, “A submodule-based zero divisor graph for modules,” *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, vol. 14, no. 1, pp. 147–157, 2019. DOI: [10.7508/ijmsi.2019.01.013](https://doi.org/10.7508/ijmsi.2019.01.013).
- [12] M. BAZIAR, E. MOMTAHAN, and S. SAFAEEYAN, “A zero-divisor graph for modules with respect to their (first) dual,” *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 125–151, 2013. DOI: [10.1142/S0219498812501514](https://doi.org/10.1142/S0219498812501514).
- [13] W. H. Irawan, N. Hijriyah, and A. R. Habibi, *Pengantar Teori Bilangan*. Uin-Maliki Press, 2014.
- [14] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, Third Edition. John Wiley & Sons, 2004.
- [15] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & Digraphs: Fifth Edition*. CRC Taylor & Francis Group, 2011.
- [16] M. Abdy, R. Syam, and T. Tina, “Bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf dual dari graf roda,” *Journal Of Mathematics Computations And Statistics*, vol. 4, no. 2, p. 95, 2021. DOI: [10.35580/jmathcos.V4i2.24443](https://doi.org/10.35580/jmathcos.V4i2.24443).
- [17] M. Behzad, G. Chartrand, and J. K. Cooper, “The colour numbers of complete graphs,” *Journal Of The London Mathematical Society*, vol. S1-42, no. 1, pp. 226–228, 1967. DOI: [10.1112/jlms/s1-42.1.226](https://doi.org/10.1112/jlms/s1-42.1.226).