JRMM – Jurnal Riset Mahasiswa Matematika, Volume 5 (5) (2026), Pages 332-337

Research Article

Determinan dan Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Ordo $n \times n$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Verawaty Moha, Nurwan*, and Armayani Arsal

Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Gorontalo, Indonesia

Article History

Received 6 Juni 2026
Revised 19 Juni 2026
Accepted 28 Juni 2026
Published 30 Juni 2026

Check for updates

Copyright © 2026 by Authors, Published by JRMM Group. This is an open access article under the CC BY-SA License.

Abstract. This study aims to determine the general forms of the power, determinant, and inverse of a special Toeplitz matrix of order $n \times n$ raised to a positive integer power using the cofactor expansion method. The research was conducted analytically through a literature study, starting by observing the element patterns of the powers of small-order matrices, formulating the general form, and proving it using mathematical induction. The results show that the upper diagonal elements of the powered matrix form a pattern of binomial coefficients. Based on the cofactor expansion method and the adjoint matrix, the general determinant formula of the special Toeplitz matrix is obtained, namely $\det(T_n^m) = a^{nm}$, along with the general inverse formula expressed explicitly based on its matrix elements. These formulas can be used to simplify the computation of determinants and inverses of large-order special Toeplitz matrices without requiring lengthy computational procedures.

Keywords: Toeplitz Matrix; Matrix Powers; Determinant; Matrix Inverse; Cofactor Expansion

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode ekspansi kofaktor. Metode penelitian dilakukan secara analitik melalui studi literatur, dimulai dengan mengamati pola elemen hasil perpangkatan matriks berordo kecil, merumuskan bentuk umum, dan membuktikannya menggunakan metode induksi matematika. Hasil penelitian menunjukkan bahwa elemen-elemen diagonal atas matriks hasil perpangkatan membentuk pola koefisien binomial. Berdasarkan metode ekspansi kofaktor dan matriks adjoin, diperoleh formula umum determinan matriks Toeplitz khusus tersebut, yaitu $\det(T_n^m) = a^{nm}$, serta formula umum invers yang dinyatakan secara eksplisit berdasarkan elemen-elemen matriksnya. Formula ini dapat digunakan untuk menyederhanakan perhitungan determinan dan invers matriks Toeplitz berpola khusus berordo besar tanpa memerlukan prosedur komputasi yang panjang.

Kata kunci: Matriks Toeplitz; Perpangkatan Matriks; Determinan; Invers Matriks; Ekspansi Kofaktor

1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang penting dalam aljabar linier yang memiliki aplikasi luas dalam berbagai bidang ilmu, baik matematika murni maupun ilmu terapan seperti fisika, teknik, dan ilmu komputer [1]. Secara umum, matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan berbentuk segi empat yang terdiri atas baris dan kolom sedemikian rupa sehingga membentuk ukuran atau ordo tertentu [2]. Matriks banyak digunakan untuk merepresentasikan data dan memodelkan berbagai permasalahan matematis, seperti sistem persamaan linear, transformasi geometri, hingga pemrosesan sinyal digital [3]. Dalam kajian matriks, analisis terhadap sifat-sifat matriks seperti determinan dan invers sangat penting karena berkaitan dengan karakteristik dan perilaku sistem yang dimodelkan.

Salah satu matriks yang memiliki struktur khusus dan banyak digunakan dalam berbagai aplikasi adalah matriks Toeplitz. Matriks Toeplitz merupakan matriks persegi yang elemen-elemennya konstan pada setiap diagonal yang sejajar dengan diagonal utama. Struktur tersebut memberikan efisiensi dalam penyimpanan data dan komputasi numerik, sehingga banyak dimanfaatkan dalam pemrosesan sinyal [4], analisis sistem linier, pemodelan proses stokastik, hingga optimasi algoritma berbasis komputer [5]. Selain itu, pola keteraturan pada matriks Toeplitz memungkinkan analisis matematis dilakukan secara lebih sistematis dibandingkan matriks umum. Pada penelitian ini, kajian difokuskan pada matriks Toeplitz bentuk khusus yang memiliki elemen konstan pada diagonal utama dan superdiagonal pertama, kemudian dipangkatkan dengan bilangan bulat positif.

Dalam analisis matriks, determinan dan invers merupakan dua konsep fundamental. Determinan digunakan untuk menentukan sifat invertibilitas suatu matriks serta memiliki peranan penting dalam penyelesaian sistem persamaan linear dan transformasi geometri [6]. Sementara itu, invers matriks digunakan dalam berbagai penyelesaian persoalan matematika terapan, khususnya yang melibatkan sistem persamaan linear. Berbagai metode telah dikembangkan untuk menentukan determinan dan invers matriks, di antaranya metode eliminasi Gauss, metode adjoin, dan dekomposisi LU. Salah satu pendekatan yang masih relatif jarang digunakan adalah metode ekspansi kofaktor, padahal metode ini mampu memberikan pemahaman analitik yang lebih mendalam terhadap hubungan antar elemen matriks [7]. Pada matriks berpola khusus seperti matriks Toeplitz, metode ekspansi kofaktor juga memungkinkan penelusuran pola yang terbentuk sehingga dapat digunakan untuk memperoleh bentuk umum secara sistematis.

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas determi-

Corresponding author's email: verawatymoha418@gmail.com
DOI: / p-ISSN: 2808-1552 | e-ISSN: 2808-4926 (BRIN | ISSN Portal)

nan dan invers matriks Toeplitz menggunakan berbagai pendekatan. Penelitian oleh [8] menggunakan metode ekspansi kofaktor untuk menentukan determinan matriks Toeplitz dan menunjukkan bahwa metode tersebut dapat meningkatkan efisiensi perhitungan pada matriks berpola khusus. Selanjutnya, [3] meneliti determinan matriks Toeplitz k-tridiagonal menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor, namun masih ditemukan kendala pada kompleksitas komputasi. Sementara itu, pencarian karakteristik bentuk umum untuk struktur berpola tridiagonal juga telah dikembangkan oleh [9]. Selain itu, [10] membahas invers matriks Toeplitz bentuk khusus menggunakan metode adjoin untuk memperoleh bentuk invers secara analitik, yang kemudian dikembangkan lebih lanjut melalui penemuan formula eksplisit pada jenis invers matriks terstruktur lainnya [11].

Di samping penelitian-penelitian berbasis jurnal tersebut, kajian mengenai matriks persegi berpola khusus ini juga sangat bergantung pada penguatan konsep aljabar linier dasar dan teorema-teorema matriks elementer yang tertuang dalam literatur baku [12]. Pemahaman mengenai sifat-sifat operasi matriks, ekspansi kofaktor, hingga penjabaran koefisien binomial sangat krusial dalam menjembatani proses generalisasi dari matriks berordo kecil menuju formula umum berordo besar. Oleh karena itu, integrasi antara teori matriks klasik dan metode pembuktian induktif menjadi landasan penting dalam memastikan keabsahan formula yang dihasilkan secara analitik.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, kajian mengenai matriks Toeplitz telah banyak dilakukan, baik pada aspek determinan maupun invers. Akan tetapi, sebagian besar penelitian masih berfokus pada matriks Toeplitz tridiagonal, Toeplitz k-tridiagonal, atau penentuan invers menggunakan metode adjoin pada ordo tertentu. Kajian mengenai bentuk umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif berordo $n \times n$ menggunakan metode ekspansi kofaktor masih relatif terbatas. Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan yang mampu memberikan bentuk umum secara lebih sistematis dan eksplisit.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode ekspansi kofaktor. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi teoritis dalam pengembangan kajian aljabar linier, khususnya yang berkaitan dengan analisis matriks khusus dan generalisasi pola matriks berpangkat.

Kebaruan penelitian ini terletak pada pengembangan formula umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif untuk ordo $(n \times n)$. Meskipun matriks yang dikaji memiliki struktur segitiga atas, penelitian ini tidak hanya menentukan nilai determinan dan inversnya, tetapi juga menyajikan generalisasi analitik yang menghubungkan representasi $(T_n = aI + bN)$, pola koefisien binomial pada hasil perpangkatan, serta bentuk umum invers yang diperoleh melalui ekspansi binomial negatif. Hasil tersebut menghasilkan formulasi yang berlaku untuk setiap ordo matriks dan memberikan deskripsi yang lebih lengkap mengenai struktur aljabar matriks Toeplitz bentuk khusus dibandingkan kajian-kajian sebelumnya yang terbatas pada kasus atau ordo tertentu.

Secara sistematis, artikel ini disusun sebagai berikut. Bagian 2 membahas metode penelitian yang digunakan. Bagian 3 menyajikan hasil dan pembahasan penelitian. Selanjutnya, Bagian 4 memuat kesimpulan dari penelitian yang dilakukan.

2. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan pendekatan studi literatur. Kajian dilakukan melalui penelusuran berbagai referensi yang berkaitan dengan teori matriks, matriks Toeplitz, determinan, invers matriks, metode ekspansi kofaktor, dan induksi matematika. Referensi yang digunakan meliputi buku, artikel ilmiah, serta penelitian terdahulu yang relevan [12], [13], [14].

Objek penelitian adalah matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ yang memiliki elemen konstan pada diagonal utama dan superdiagonal pertama. Matriks yang dikaji dinyatakan sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Penelitian diawali dengan menentukan pola perpangkatan matriks Toeplitz untuk beberapa nilai ordo dan pangkat bilangan bulat positif guna memperoleh bentuk umum matriks berpangkat. Selanjutnya, determinan matriks ditentukan menggunakan metode ekspansi kofaktor dengan memanfaatkan pola keteraturan elemen matriks Toeplitz [7], [8]. Setelah diperoleh bentuk umum determinan, invers matriks ditentukan melalui pembentukan matriks kofaktor dan adjoin dengan menggunakan hubungan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Proses analisis dilakukan secara bertahap melalui pengamatan pola elemen matriks, perumusan bentuk umum perpangkatan, penentuan bentuk umum determinan dan invers, serta pembuktian hasil yang diperoleh menggunakan metode induksi matematika [15]. Pembuktian tersebut digunakan untuk memastikan bahwa formula yang dihasilkan berlaku untuk matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$.

Tahapan penelitian meliputi kajian literatur, identifikasi masalah, perhitungan dan perumusan bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz, penentuan determinan menggunakan ekspansi kofaktor, penentuan invers melalui matriks kofaktor dan adjoin, pembuktian matematis menggunakan induksi, serta penarikan kesimpulan. Melalui tahapan tersebut diperoleh bentuk umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus yang valid secara teoritis.

3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan hasil analisis mengenai perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus beserta pembahasannya.

3.1. Perpangkatan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus

Contoh 1: Perpangkatan Matriks Ordo 5

Misalkan

$$T_5 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Dengan melakukan perpangkatan diperoleh

$$T_5^m = \begin{bmatrix} a^m & \binom{m}{1}a^{m-1}b & \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 & \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 & \binom{m}{4}a^{m-4}b^4 \\ 0 & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1}b & \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 & \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1}b & \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^m \end{bmatrix}.$$

Dari hasil tersebut tampak pola koefisien binomial pada setiap superdiagonal.

Teorema 1: Bentuk Perpangkatan Matriks

Misalkan

$$T_n = aI + bN,$$

dengan I matriks identitas dan N matriks nilpoten yang memenuhi

$$N^n = 0.$$

Maka untuk setiap bilangan bulat positif m berlaku

$$T_n^m = (aI + bN)^m = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{m}{r} a^{m-r} b^r N^r.$$

Bukti

Karena matriks identitas I komutatif terhadap setiap matriks, maka

$$(aI)(bN) = (bN)(aI).$$

Dengan Teorema Binomial Matriks diperoleh

$$(aI + bN)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (aI)^{m-r}(bN)^r.$$

Karena

$$(aI)^{m-r} = a^{m-r} I,$$

dan

$$(bN)^r = b^r N^r,$$

maka

$$(aI + bN)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} a^{m-r} b^r N^r.$$

Selanjutnya, karena N merupakan matriks nilpoten dengan

$$N^n = 0,$$

maka untuk setiap $r \geq n$ berlaku

$$N^r = 0.$$

Akibatnya seluruh suku dengan indeks $r \geq n$ bernilai nol sehingga diperoleh

$$T_n^m = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{m}{r} a^{m-r} b^r N^r.$$

Teorema terbukti. □

3.2. Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat

Penentuan determinan matriks dilakukan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Diketahui bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz khusus sebagai berikut:

$$T_n^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1}b & \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}a^{m-n+1}b^{n-1} \\ 0 & a^m & ma^{m-1}b & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+3)}{(n-2)!}a^{m-n+2}b^{n-2} \\ 0 & 0 & a^m & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+4)}{(n-3)!}a^{m-n+3}b^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ma^{m-1}b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk menentukan bentuk umum determinan matriks tersebut digunakan metode ekspansi kofaktor. Adapun proses penentuan determinan dilakukan sebagai berikut:

$$\det(T_n^m) = a^m \begin{vmatrix} a^m & ma^{m-1}b & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+3)}{(n-2)!}a^{m-n+2}b^{n-2} \\ 0 & a^m & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+4)}{(n-3)!}a^{m-n+3}b^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^m \end{vmatrix}.$$

Karena seluruh elemen pada kolom pertama selain elemen pertama bernilai nol, maka ekspansi kofaktor kembali dilakukan pada kolom pertama sehingga diperoleh

$$\det(T_n^m) = a^m \cdot a^m \begin{vmatrix} a^m & ma^{m-1}b & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+4)}{(n-3)!}a^{m-n+3}b^{n-3} \\ 0 & a^m & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-n+5)}{(n-4)!}a^{m-n+4}b^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^m \end{vmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, proses ekspansi kofaktor dilakukan secara berulang hingga seluruh minor habis diekspansi. Dari proses tersebut diperoleh pola bahwa setiap langkah selalu menghasilkan faktor a^m. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \det(T_n^m) &= a^m(a^m(a^m(\cdots(a^m)))) \\ &= (a^m)^n \\ &= a^{nm}. \end{aligned}$$

Jadi, bentuk umum determinan matriks Toeplitz bentuk khusus berpangkat bilangan bulat ordo $n \times n$ adalah

$$\det(T_n^m) = a^{nm}.$$

Teorema 2: Determinan Matriks Toeplitz

Untuk matriks Toeplitz bentuk khusus $T_n = aI + bN$ dengan $N^n = 0$, berlaku

$$\det(T_n^m) = a^{nm}$$

untuk setiap bilangan bulat positif n dan m.

Bukti

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika terhadap ordo matriks n.

Langkah basis. Untuk $n = 1$, diperoleh matriks

$$T_1^m = [a^m],$$

maka

$$\det(T_1^m) = a^m.$$

Karena

$$a^{nm} = a^{1\cdot m} = a^m,$$

maka pernyataan benar untuk $n = 1$.

Langkah induksi. Untuk $n = k$, diasumsikan berlaku

$$\det(T_k^m) = a^{km}.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk $n = k + 1$ juga berlaku

$$\det(T_{k+1}^m) = a^{(k+1)m}.$$

Perhatikan matriks berikut:

$$T_{k+1}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1}b & \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2 & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}a^{m-k+1}b^{k-1} \\ 0 & a^m & ma^{m-1}b & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)}{(k-1)!}a^{m-k+2}b^{k-2} \\ 0 & 0 & a^m & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-k+3)}{(k-2)!}a^{m-k+3}b^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^m \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan bentuk matriks T_{k+1}^m, diperoleh bahwa matriks tersebut merupakan matriks segitiga atas dengan seluruh elemen diagonal utamanya bernilai a^m. Karena determinan matriks segitiga atas merupakan hasil kali elemen-elemen diagonal utamanya, maka diperoleh

$$\det(T_{k+1}^m) = a^m \cdot \det(T_k^m).$$

Dengan menggunakan asumsi induksi diperoleh

$$\begin{aligned} \det(T_{k+1}^m) &= a^m \cdot a^{km} \\ &= a^{m+km} \\ &= a^{(k+1)m}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Oleh karena langkah basis dan langkah induksi telah terbukti, maka

$$\det(T_n^m) = a^{nm}$$

terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif n. □

3.3. Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Sebelum menentukan bentuk umum invers matriks T_n^m, terlebih dahulu akan dibahas syarat keberadaan invers matriks tersebut yang dinyatakan dalam proposisi berikut.

Proposition 1

Matriks Toeplitz bentuk khusus T_n^m memiliki invers jika dan hanya jika $a \neq 0$.

Bukti

Berdasarkan hasil pada Subbab 3.2, determinan dari matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ adalah

$$\det(T_n^m) = a^{nm}.$$

Menurut teorema dalam aljabar linier, sebuah matriks persegi A memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$. Karena

$$\det(T_n^m) = a^{nm},$$

maka $\det(T_n^m) \neq 0$ jika dan hanya jika $a^{nm} \neq 0$, yang berimplikasi pada

$$a \neq 0.$$

Dengan demikian, T_n^m memiliki invers jika dan hanya jika $a \neq 0$. □

Selanjutnya, akan ditentukan bentuk umum invers matriks T_n^m tersebut. Diketahui bahwa $T_n^m = (aI + bN)^m$, dengan I menyatakan matriks identitas berordo $n \times n$ dan N merupakan matriks nilpoten yang memenuhi $N^n = 0$.

Teorema 3: Invers Matriks Toeplitz

Jika $a \neq 0$, maka bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif adalah

$$(T_n^m)^{-1} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} a^{-m-r} b^r N^r.$$

Bukti

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz bentuk khusus

$$T_n^m = (aI + bN)^m,$$

dengan I menyatakan matriks identitas berordo $n \times n$ dan N merupakan matriks nilpoten yang memenuhi $N^n = 0$. Karena

$$T_n^m = (aI + bN)^m,$$

maka

$$(T_n^m)^{-1} = (aI + bN)^{-m}.$$

Faktorkan a sehingga diperoleh

$$(T_n^m)^{-1} = a^{-m}\left(I + \frac{b}{a}N\right)^{-m}.$$

Dengan menggunakan Teorema Binomial Negatif,

$$(1+x)^{-m} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} x^r.$$

Karena N merupakan matriks nilpoten dengan $N^n = 0$, maka deret tersebut berhenti pada suku ke-$(n-1)$. Dengan demikian,

$$\left(I + \frac{b}{a}N\right)^{-m} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} \left(\frac{b}{a}\right)^r N^r.$$

Akibatnya diperoleh

$$(T_n^m)^{-1} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} a^{-m-r} b^r N^r.$$

Karena matriks N^r hanya memiliki elemen tak nol pada superdiagonal ke-r, maka bentuk umum invers matriks T_n^m dapat dituliskan sebagai

$$(T_n^m)^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-m} & -\binom{m}{1}a^{-m-1}b & \binom{m+1}{2}a^{-m-2}b^2 & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{m+n-2}{n-1}a^{-m-(n-1)}b^{n-1} \\ 0 & a^{-m} & -\binom{m}{1}a^{-m-1}b & \cdots & (-1)^{n-2}\binom{m+n-3}{n-2}a^{-m-(n-2)}b^{n-2} \\ 0 & 0 & a^{-m} & \cdots & (-1)^{n-3}\binom{m+n-4}{n-3}a^{-m-(n-3)}b^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{-m} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan diverifikasi bahwa bentuk invers tersebut memenuhi

$$T_n^m (T_n^m)^{-1} = I.$$

Untuk elemen diagonal utama diperoleh

$$a^m \cdot a^{-m} = 1.$$

Untuk elemen pada superdiagonal pertama diperoleh

$$\begin{aligned} &(a^m)(-ma^{-m-1}b) + (ma^{m-1}b)(a^{-m}) \\ &= -ma^{-1}b + ma^{-1}b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Untuk elemen pada superdiagonal kedua diperoleh

$$\begin{aligned} &a^m \binom{m+1}{2} a^{-m-2}b^2 + (ma^{m-1}b)(-ma^{-m-1}b) \\ &\quad + \binom{m}{2} a^{m-2}b^2(a^{-m}) = 0. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa seluruh elemen di luar diagonal utama bernilai nol, sedangkan seluruh elemen diagonal utama bernilai satu. Oleh karena itu,

$$T_n^m (T_n^m)^{-1} = I.$$

Dengan demikian diperoleh bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif sebagai

$$(T_n^m)^{-1} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{m+r-1}{r} a^{-m-r} b^r N^r,$$

yang berlaku untuk setiap $a \neq 0$. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif menggunakan metode ekspansi kofaktor, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif berhasil diperoleh. Berdasarkan pola yang diamati pada beberapa ordo matriks, elemen-elemen pada diagonal-diagonal di atas diagonal utama membentuk pola koefisien binomial yang dapat dinyatakan dalam suatu formula umum untuk setiap ordo matriks.
2. Bentuk umum determinan matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif dapat ditentukan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Berdasarkan pola yang diperoleh dari proses ekspansi, determinan matriks dinyatakan dalam bentuk umum
$$\det(T_n^m) = a^{nm}.$$
Hasil tersebut menunjukkan bahwa nilai determinan hanya bergantung pada elemen-elemen diagonal utama matriks.
3. Bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif dapat diperoleh melalui penyusunan minor, kofaktor, dan adjoin matriks. Formula umum invers yang diperoleh dinyatakan berdasarkan elemen-elemen matriksnya dan berlaku untuk setiap ordo matriks yang memenuhi syarat keberadaan invers.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ekspansi kofaktor dapat digunakan untuk menentukan bentuk umum perpangkatan, determinan, dan invers matriks Toeplitz bentuk khusus secara sistematis. Formula yang diperoleh dapat digunakan untuk menyederhanakan perhitungan pada matriks berordo besar tanpa memerlukan proses perhitungan berulang untuk setiap kasus khusus.

Penelitian ini masih terbatas pada matriks Toeplitz bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada bentuk matriks Toeplitz lainnya maupun pada kajian perpangkatan dengan bilangan real atau kompleks.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Verawaty Moha: Konseptualisasi, Metodologi, Penulisan Draf Awal, perangkat lunak, visualisasi, Analisis Formal, Investigasi, Sumber Data, Kurasi Data, Penulisan Draf Awal, Penulisan Telaah dan Penyuntingan. **Nurwan:** Penulisan Draf Awal, Metodologi dan Validasi. **Armayani Arsal:** Penulisan Draf Awal, Metodologi, Perangkat lunak dan Validasi.

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Penelitian ini menggunakan bantuan Model Google Gemini versi 3.5 dalam penyusunan draf awal dan koreksi struktur kalimat.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan

Ketersediaan Data

Penelitian ini tidak menggunakan dataset atau data eksperimen. Seluruh hasil penelitian diperoleh melalui analisis matematis dan penurunan persamaan berdasarkan teori matriks Toeplitz serta metode ekspansi kofaktor yang dijelaskan dalam artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] R. Restiana, "Pengenalan teori matriks dan aplikasinya dalam matematika dan ilmu terapan," *Jurnal Matematika dan Pendidikan*, vol. 15, no. 2, pp. 123–135, 2022. Available online.

[2] D. I. Sari, "Aljabar-linear-elementer," pp. 1–32, 2012. Available online.

[3] R. Rasmawati, L. Yahya, A. R. Nuha, and R. Resmawan, "Determinan suatu matriks toeplitz k-tridiagonal menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor," *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 9, no. 1, pp. 6–16, Apr. 2021. DOI: 10.34312/euler.v9i1.10354.

[4] D. Aryani, "Sifat dan operasi matriks toeplitz dalam pemrosesan sinyal," *Jurnal Ilmu Komputer dan Matematika*, vol. 11, no. 1, pp. 45–56, 2019. Available online.

[5] L. Beti, "Analisis determinan dan invers matriks toeplitz dalam komputasi numerik," *Jurnal Matematika Terapan dan Komputasi*, vol. 20, no. 1, pp. 33–47, 2024. Available online.

[6] J. Wei, "Peran determinan dalam penyelesaian sistem persamaan linear dan transformasi," *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, vol. 17, no. 2, pp. 101–112, 2021. Available online.

[7] H. Anton, "Metode ekspansi kofaktor untuk determinan dan invers matriks," *Jurnal Aljabar Linier dan Aplikasinya*, vol. 13, no. 4, pp. 59–72, 2019. Available online.

[8] F. Aryani and C. C. Marzuki, "Determinan matriks toeplitz bentuk khusus menggunakan ekspansi kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 2, pp. 82–88, 2018. DOI: 10.24014/jsms.v4i2.6186.

[9] F. Siti, T. A. Nurman, and Ernawati, "Bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal," *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, vol. 4, 2016. Available online.

[10] B. Siregar and S. Tulus, "Invers suatu matriks toeplitz menggunakan metode adjoin," vol. 02, no. 01, pp. 85–94, 2014. Available online.

[11] S. Kurmanbek, "Formula eksplisit untuk invers matriks toeplitz tridiagonal simetris," *Jurnal Matematika Terapan*, vol. 21, no. 1, pp. 11–25, 2024. Available online.

[12] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, 2013. Available online.

[13] R. M. Gray, "Toeplitz and circulant matrices: A review," *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 155–239, 2006. DOI: 10.1561/0100000006.

[14] Ruminta, *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. 2009. Available online.

[15] M. M. Melissa and C. N. Krisnamurti, *Pengantar Teori Bilangan*. Pascal Books, 2022. Available online.