Artikel Penelitian

Dimensi dari Hasil Kali Dua Subgrup Normal dalam Grup Dihedral D_{2n}

Ahmad Rizal Afandi*

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Riwayat Artikel

Diterima 16 Juni 2026
Direvisi 19 Juli 2026
Disetujui 12 Agustus 2026
Diterbitkan 30 Agustus 2026

Check for updates

Hak cipta © 2026 oleh Penulis, diterbitkan oleh JRMM Group. Artikel ini tersedia secara terbuka berdasarkan Lisensi CC BY-SA.

Abstract. This study aims to formulate the relationship between the dimensions of the product of two normal subgroups, the sum of the dimensions of each normal subgroup, and the dimension of their intersection in a dihedral group D_{2n}. The dimension of a group is defined as the minimum number of conjugacy classes required to generate the group. This study is a qualitative study using a literature review approach. The research stages include classifying normal subgroups of D_{2n}, determining the conjugacy classes of each normal subgroup, calculating their dimensions, and then formulating the relationship between the dimensions of the product and the intersection of pairs of normal subgroups. The results show that for odd n, every normal subgroup of D_{2n} has dimension one, so a relationship $\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$ can be established that holds for all pairs of normal subgroups. For even n, a normal subgroup may have dimension one or two depending on the structure of its conjugacy class, and pairs of normal subgroups containing reflection elements were found that do not satisfy this relation, so this relation cannot be generalized to all dihedral groups D_{2n} with even n.

Keywords: group dimension; dihedral group; subgroup product; conjugacy class; normal subgroup

Abstrak. Penelitian ini bertujuan merumuskan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi masing-masing subgrup normal, dan dimensi irisan keduanya pada grup dihedral D_{2n}. Dimensi grup didefinisikan sebagai banyaknya minimal kelas konjugasi yang diperlukan untuk membangun suatu grup. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Tahapan penelitian meliputi klasifikasi subgrup normal dari D_{2n}, penentuan kelas konjugasi setiap subgrup normal, perhitungan dimensinya, kemudian perumusan hubungan dimensi pada hasil kali dan irisan pasangan subgrup normal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk n ganjil, setiap subgrup normal dari D_{2n} berdimensi satu, sehingga dapat dibangun hubungan $\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$ yang berlaku untuk semua pasangan subgrup normal. Untuk n genap, subgrup normal dapat berdimensi satu atau dua bergantung pada struktur kelas konjugasinya, dan ditemukan pasangan subgrup normal yang memuat elemen refleksi yang tidak memenuhi hubungan tersebut, sehingga hubungan ini tidak dapat digeneralisasi untuk seluruh grup dihedral D_{2n} dengan n genap.

Kata kunci: dimensi grup; grup dihedral; hasil kali subgrup; kelas konjugasi; subgrup normal

1. Pendahuluan

Struktur aljabar merupakan bagian penting dalam matematika modern karena menjadi landasan bagi berbagai bidang seperti teori bilangan, geometri, kriptografi, dan komputasi [1–3]. Dalam cabang aljabar linear, konsep dimensi menjadi salah satu ide utama yang digunakan untuk mengukur banyaknya derajat kebebasan suatu ruang vektor [4]. Untuk dua subruang U dan W dari suatu ruang vektor, berlaku hubungan dimensi klasik:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Tian (2019) memperluas teori ini dengan menyediakan ekspresi rank-matriks untuk menghitung dimensi jumlah dan irisan beberapa subruang linear secara serentak menggunakan Moore–Penrose inverse [5].

Dalam teori grup, dimensi tidak muncul secara otomatis karena grup tidak memiliki struktur ruang vektor secara umum [6, 7]. Namun, Kaplan dan Lev (2003) memperkenalkan konsep dimensi untuk grup berhingga berdasarkan kelas konjugasi, mendefinisikan dimensi dari grup G, dinotasikan $\dim(G)$, sebagai banyaknya minimal kelas konjugasi yang dapat membangun grup itu sendiri [8]. Konsep ini menggeneralisasi gagasan basis dan dimensi dalam aljabar linear ke konteks grup berhingga [9]. Kholilurrohman (2022) kemudian meneliti dimensi grup dihedral D_{2n} secara eksplisit, membuktikan bahwa $\dim(D_{2n}) = 1$ untuk n ganjil dan $\dim(D_{2n}) = 2$ untuk n genap, serta menetapkan ketaksamaan $\dim(N) \leq \dim(D_{2n})$ untuk setiap subgrup normal N [10].

Grup dihedral D_{2n} merupakan objek yang menarik karena merupakan grup tak-komutatif yang struktur subgrup normal dan kelas konjugasinya telah diklasifikasikan secara lengkap oleh Tarnauceanu (2015) [11]. Kajian terkait kelas konjugasi dalam subgrup normal grup berhingga juga telah dikembangkan oleh Beltrán, Felipe, dan Melchor (2024) [12] serta Akhlaghi dkk. (2012) [13]. Di sisi lain, kajian topologi graf yang bersumber dari kelas konjugasi grup dihedral juga telah diteliti oleh Abdussakir dkk. (2017) [14]. Meskipun demikian, kajian mengenai hubungan dimensi yang melibatkan hasil kali dua subgrup normal dalam D_{2n} belum pernah diteliti sebelumnya.

Penelitian ini bertujuan untuk: (1) menentukan dimensi dari setiap subgrup normal D_{2n} dan (2) merumuskan hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal (N_1, N_2), dimensi N_1, dimensi N_2, serta dimensi irisan $N_1 \cap N_2$ untuk setiap pasangan subgrup normal N_1 dan N_2 dalam D_{2n}.

Kebaruan penelitian ini terletak pada perumusan hubungan dimensi baru untuk hasil kali subgrup normal dalam grup dihedral, beserta pembuktian bahwa hubungan tersebut berlaku untuk semua pasangan subgrup normal ketika n ganjil, namun tidak selalu berlaku ketika n genap akibat perbedaan struktur kelas konjugasi pada kedua kasus tersebut. Bagian 2 menyajikan landasan teori. Bagian 3 menjelaskan metode penelitian. Bagian 4 memuat hasil dan pembahasan. Bagian 5 menutup dengan kesimpulan.

2. Konsep Dasar

Bagian ini memuat definisi dan hasil-hasil klasik yang diperlukan untuk mendukung hasil utama penelitian. Semua grup yang dibahas merupakan grup berhingga.

2.1. Grup dan Subgrup Normal

Kajian dimensi pada hasil kali dua subgrup normal memerlukan pemahaman tentang struktur grup, subgrup, dan sifat kenormalan. Oleh karena itu, subbab ini menyajikan definisi dasar serta teorema mengenai hasil kali dan irisan subgrup normal. Konsep-konsep tersebut digunakan untuk memastikan bahwa hasil kali dan irisan yang dibahas pada bagian hasil tetap merupakan subgrup normal.

*Email penulis korespondensi: ahmadrizalafandi2003@gmail.com
DOI: https://doi.org/10.18860/JRMM.v5i6.43861 / p-ISSN: 2808-1552 | e-ISSN: 2808-4926

Definisi 1: Grup

Himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$. Himpunan $(G, *)$ disebut grup jika memenuhi sifat ketertutupan, asosiatif, memiliki elemen identitas e, dan setiap elemen memiliki invers [3, 6, 15].

Definisi 2: Subgrup

Diberikan $(G, *)$ merupakan suatu grup, $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Himpunan H disebut subgrup dari G, jika $(H, *)$ merupakan grup. Himpunan H subgrup dari grup G diberi notasi $H \leq G$[2].

Definisi 3: Hasil Kali Subgrup

Untuk subgrup $H, K \leq G$, hasil kali $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$ [1, 16].

Teorema 1

Jika H dan K merupakan subgrup dari grup G, HK merupakan sebuah subgrup dari G jika dan hanya jika $HK = KH$ [1, 4].

Bukti

Pertama, asumsikan bahwa $HK = KH$ dan misalkan $a, b \in HK$. Kita buktikan $ab^{-1} \in HK$ sehingga HK adalah subgrup. Misalkan $a = h_1k_1$ dan $b = h_2k_2$ untuk suatu $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$. Maka $b^{-1} = k_2^{-1}h_2^{-1}$, sehingga $ab^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$. Misalkan $k_3 = k_1k_2^{-1} \in K$ dan $h_3 = h_2^{-1}$. Jadi $ab^{-1} = h_1k_3h_3$. Karena $HK = KH$, maka diperoleh $k_3h_3 = h_4k_4$ untuk suatu $h_4 \in H$, $k_4 \in K$. Dengan demikian $ab^{-1} = h_1h_4k_4 \in HK$.
Sebaliknya, asumsikan bahwa HK adalah subgrup dari G. Karena $K \leq HK$ dan $H \leq HK$, berdasarkan sifat ketertutupan subgrup, $KH \subseteq HK$. Untuk menunjukkan kebalikannya, misalkan $hk \in HK$. Karena HK diasumsikan sebagai subgrup, tuliskan $hk = a^{-1}$, untuk suatu $a \in HK$. Jika $a = h_1k_1$, maka $hk = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH$. □

Definisi 4: Subgrup Normal

Subgrup N dari G disebut normal, ditulis $N \trianglelefteq G$, jika $aNa^{-1} = N$ untuk setiap $a \in G$, atau ekuivalen $aN = Na$ untuk setiap $a \in G$ [2, 7, 15].

Teorema 2

Misalkan N_1 dan N_2 merupakan subgrup normal di grup G, maka N_1N_2 merupakan subgrup normal di G.

Bukti

Membuktikan $N_1N_2 = N_2N_1$. Ambil sebarang $x = n_1n_2 \in N_1N_2$. Karena $N_1 \trianglelefteq G$, untuk $g = n_2$ diperoleh $n_2N_1n_2^{-1} = N_1$, sehingga $n_1n_2 \in n_2N_1$, yaitu terdapat $n_2' \in N_2$, $n_1' \in N_1$ dengan $n_1n_2 = n_2'n_1'$. Ini menunjukkan $N_1N_2 \subseteq N_2N_1$. Argumen simetris memberikan $N_2N_1 \subseteq N_1N_2$, sehingga $N_1N_2 = N_2N_1$, dan berdasarkan Teorema 1, N_1N_2 adalah subgrup.
Uji kenormalan. Ambil sebarang $z = gn_1n_2g^{-1}$. Karena $N_1, N_2 \trianglelefteq G$, maka $gn_1g^{-1} = n_1' \in N_1$ dan $gn_2g^{-1} = n_2' \in N_2$, sehingga $z = n_1'n_2' \in N_1N_2$. Karena berlaku untuk semua $g \in G$, terbukti $N_1N_2 \trianglelefteq G$. □

Teorema 3

Misalkan $(G, *)$ merupakan grup. Jika himpunan N_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah subgrup normal di G, maka $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ juga merupakan subgrup normal di G [3, 15, 16].

Bukti

Ambil sebarang $a, b \in \bigcap N_i$, maka $a, b \in N_i$ untuk setiap i. Karena setiap N_i subgrup normal, $ab^{-1} \in N_i$ untuk setiap i, sehingga $ab^{-1} \in \bigcap N_i$, membuktikan $\bigcap N_i$ adalah subgrup. Untuk kenormalan: jika $x \in \bigcap N_i$ dan $a \in G$, karena $N_i \trianglelefteq G$, berlaku $axa^{-1} \in N_i$ untuk setiap i, sehingga $axa^{-1} \in \bigcap N_i$. □

2.2. Grup Dihedral

Definisi 5: Grup Dihedral

Untuk $n \geq 3$, grup dihedral D_{2n} adalah grup simetri segi-n beraturan terhadap operasi komposisi, yang terdiri dari n rotasi dan n refleksi [1, 6, 7]:

$$D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = e,\ srs^{-1} = r^{-1} \rangle = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2$$

Klasifikasi lengkap subgrup normal D_{2n} diberikan oleh Tarnauceanu (2015) [11]:

- Untuk n **ganjil**: subgrup normal berbentuk $\langle r^d \rangle$ untuk $d \mid n$, dan D_{2n} sendiri.
- Untuk n **genap**: selain bentuk di atas, terdapat $\{e, r^{n/2}\}$, $\langle r^2 \rangle$, subgrup yang memuat refleksi indeks genap $\{e, r^2, \ldots, s, sr^2, \ldots, sr^{n-2}\}$, dan subgrup yang memuat refleksi indeks ganjil $\{e, r^2, \ldots, sr, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$.

2.3. Kelas Konjugasi dan Dimensi Grup

Definisi 6: Subgrup yang Dibangun

Misalkan G adalah grup dan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adalah subhimpunan dari G. Subgrup yang dibangun oleh X adalah $\langle X \rangle = \{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \mid x_i \in X,\ a_i \in \mathbb{Z}\}$ [1].

Definisi 7: Kelas Konjugasi

Untuk $a \in G$, kelas konjugasi dari a adalah $[a] = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ [17].

Kelas-kelas konjugasi D_{2n} ditentukan sebagai berikut [2, 17]:

- Untuk n ganjil: $\{e\}$, $\{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, dan $\{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$.
- Untuk n genap: $\{e\}$, $\{r^{n/2}\}$, $\{r^k, r^{n-k}\}$ untuk $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, $\{s, sr^2, \ldots, sr^{n-2}\}$, dan $\{sr, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$.

Definisi 8: Dimensi Grup, Kaplan & Lev 2003

Dimensi dari grup berhingga G, dinotasikan $\dim(G)$, adalah banyaknya minimal kelas konjugasi yang dapat membangun G [8]. Secara serupa, dimensi subgrup N didefinisikan sebagai banyaknya minimal kelas konjugasi (dihitung dalam N) yang membangun N.

Teorema 4: Kholilurrohman, 2022 [10]

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ dengan n ganjil adalah satu.

Bukti

Untuk n ganjil, kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$ membangun D_{2n} karena $s \cdot sr = r$, sehingga $r, s \in \langle [s] \rangle = D_{2n}$. Karena D_{2n} dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi, maka $\dim(D_{2n}) = 1$. □

Teorema 5: Kholilurrohman, 2022 [10]

Dimensi dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$, dan n genap adalah dua.

Bukti

Untuk n genap, andaikan D_{2n} dibangun oleh satu kelas konjugasi yang memuat r dan s. Maka terdapat $g \in D_{2n}$ dengan $r = gsg^{-1}$. Untuk $g = s^i r^j$ $(i \in \{0, 1\})$, diperoleh kontradiksi; sehingga tidak ada satu kelas konjugasi yang membangun D_{2n}. Namun kelas-kelas $[r]$ dan $[s]$ bersama-sama membangun D_{2n}, sehingga $\dim(D_{2n}) = 2$. □

3. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Objek kajian berupa konsep-konsep teoretis dalam aljabar abstrak yang dianalisis melalui penalaran matematis dan pembuktian formal. Seluruh argumen diperoleh dari sumber tertulis yang relevan tanpa melibatkan eksperimen atau pengumpulan data empiris.

Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mengklasifikasikan semua subgrup normal dari D_{2n} untuk nilai representatif n ($n = 3, 5, 7$ untuk n ganjil; $n = 4, 6, 8$ untuk n genap) menggunakan klasifikasi Tarnauceanu [11].
2. Menentukan kelas konjugasi di dalam setiap subgrup normal dan menghitung dimensinya sesuai Definisi 7.
3. Untuk setiap pasangan (N_1, N_2) subgrup normal, menghitung hasil kali N_1N_2 dan irisan $N_1 \cap N_2$, kemudian menentukan dimensinya.
4. Membandingkan $\dim(N_1N_2)$ dengan $\dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$ untuk setiap pasangan.
5. Berdasarkan pola yang diperoleh, merumuskan dugaan dan membuktikan secara formal untuk kasus umum D_{2n} dengan n ganjil maupun n genap.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1. Dimensi Subgrup Normal dari D_{2n}

Menggunakan Definisi 7, dimensi setiap subgrup normal dari D_{2n} dihitung secara sistematis untuk kasus $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Contoh Kasus: D_6 ($n = 3$, n Ganjil)

Grup dihedral D_6 memiliki enam elemen:

$$D_6 = \{e,\ r,\ r^2,\ s,\ sr,\ sr^2\},$$

dengan relasi $r^3 = s^2 = e$ dan $srs^{-1} = r^{-1}$.

Karena $n = 3$ adalah bilangan ganjil, kelas-kelas konjugasi D_6 adalah:

$$C_1 = \{e\}, \quad C_2 = \{r, r^2\}, \quad C_3 = \{s, sr, sr^2\}.$$

Berdasarkan klasifikasi Tarnauceanu [11], subgrup normal D_6 ($n = 3$ ganjil) adalah:

$$N_1 = \{e\}, \quad N_2 = \langle r \rangle = \{e, r, r^2\}, \quad N_3 = D_6.$$

Dimensi setiap subgrup normal ditentukan sebagai berikut.

- $\dim(N_1) = 1$: $N_1 = \{e\}$ dibangun oleh kelas tunggal $C_1 = \{e\}$.
- $\dim(N_2) = 1$: $\langle r \rangle$ dibangun oleh satu kelas $C_2 = \{r, r^2\}$, sebab $r \in C_2$ menghasilkan $r^2 = r \cdot r$, sehingga $\langle C_2 \rangle = \langle r \rangle$.
- $\dim(N_3) = \dim(D_6) = 1$: kelas $C_3 = \{s, sr, sr^2\}$ membangun D_6; ambil $s, sr \in C_3$, maka $s \cdot sr = r$, sehingga $r, s \in \langle C_3 \rangle = D_6$.

Contoh Kasus: D_8 ($n = 4$, n Genap)

Berikut diberikan contoh perhitungan lengkap pada D_8 untuk memperlihatkan cara menentukan dimensi setiap subgrup normal.

Langkah 1: Struktur D_8. Grup dihedral D_8 memiliki $2n = 8$ elemen:

$$D_8 = \{e,\ r,\ r^2,\ r^3,\ s,\ sr,\ sr^2,\ sr^3\},$$

dengan relasi $r^4 = s^2 = e$ dan $srs^{-1} = r^{-1}$.

Langkah 2: Kelas konjugasi D_8. Karena $n = 4$ genap, kelas-kelas konjugasi D_8 adalah:

$$C_1 = \{e\}, \quad C_2 = \{r^2\}, \quad C_3 = \{r, r^3\},$$
$$C_4 = \{s, sr^2\}, \quad C_5 = \{sr, sr^3\}.$$

Langkah 3: Subgrup normal D_8. Berdasarkan klasifikasi Tarnauceanu [11], subgrup normal D_8 ($n = 4$ genap) adalah:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{e\}, \\ N_2 &= \{e, r^2\} = \langle r^2 \rangle, \\ N_3 &= \{e, r, r^2, r^3\} = \langle r \rangle, \\ N_4 &= \{e, r^2, s, sr^2\}, \\ N_5 &= \{e, r^2, sr, sr^3\}, \\ N_6 &= D_8. \end{aligned}$$

Langkah 4: Dimensi setiap subgrup normal.

- $\dim(N_1) = 1$: dibangun oleh $C_1 = \{e\}$.
- $\dim(N_2) = 1$: $N_2 = \{e, r^2\}$ dibangun oleh $C_2 = \{r^2\}$.
- $\dim(N_3) = 1$: $\langle r \rangle$ dibangun oleh $C_3 = \{r, r^3\}$; $r \in C_3$ dan $r^2 = r \cdot r$, $r^3 = (r^2) \cdot r$, sehingga $\langle C_3 \rangle = \langle r \rangle$.
- $\dim(N_4) = 2$: $N_4 = \{e, r^2, s, sr^2\}$ memuat elemen dari $C_2 = \{r^2\}$ dan $C_4 = \{s, sr^2\}$. Karena C_4 saja menghasilkan $\langle C_4 \rangle = \{e, s, sr^2, r^2\} = N_4$ (periksa: $s \cdot sr^2 = r^2$), maka N_4 cukup dibangun oleh *satu* kelas C_4, sehingga $\dim(N_4) = 1$.
- $\dim(N_5) = 1$: $N_5 = \{e, r^2, sr, sr^3\}$ dibangun oleh satu kelas $C_5 = \{sr, sr^3\}$; periksa: $sr \cdot sr^3 = r^{-3} \cdot r^3 \cdot r^{-3} \cdots$; lebih mudah: $sr \cdot sr^3 = (sr)(sr^3) = s(r \cdot s)r^3 = s(sr^{-1})r^3 = r^{-1}r^3 = r^2 \in N_5$, sehingga $\langle C_5 \rangle = N_5$.
- $\dim(N_6) = \dim(D_8) = 2$: berdasarkan Teorema 5.

Tabel 1: Dimensi Subgrup Normal dari D_{2n}

Subgrup Normal N	$\dim(N)$	**Grup Dihedral**
$\{e\}$	1	D_{2n} (semua n)
$\langle r^d\rangle$, $d \mid n$, n ganjil	1	D_{2n}, n ganjil
$\langle r^d\rangle$, $d \mid n$, n genap	1	D_{2n}, n genap
Subgrup berisi refleksi (n genap)	1 atau 2	D_{2n}, n genap
D_{2n}, n ganjil	1	D_{2n}, n ganjil
D_{2n}, n genap	2	D_{2n}, n genap

Catatan: Setelah diperiksa ulang, N_4 dan N_5 masing-masing dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi (C_4 dan C_5), sehingga $\dim(N_4) = \dim(N_5) = 1$. Adapun D_8 sendiri tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi, sehingga $\dim(D_8) = 2$.

Hasil-hasil utama dirangkum dalam Tabel 1.

Untuk n ganjil, setiap subgrup normal berupa subgrup trivial, subgrup rotasi siklik $\langle r^d\rangle$, atau D_{2n} sendiri. Dalam setiap kasus, subgrup dapat dibangun oleh tepat satu kelas konjugasi. Sebagai contoh pada D_6 ($n = 3$), kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ membangun seluruh grup karena $s \cdot sr = r$ sehingga $r, s \in \langle [s]\rangle = D_6$. Untuk subgrup rotasi $\langle r^d\rangle$, kelas $[r^d]$ langsung membangunnya.

Untuk n genap, subgrup rotasi tetap berdimensi 1. Namun, kelas konjugasi elemen refleksi terbagi menjadi dua kelas yang berbeda: $\{s, sr^2, sr^4, \ldots\}$ dan $\{sr, sr^3, sr^5, \ldots\}$. Subgrup normal yang memuat elemen refleksi dari kedua kelas tersebut tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi saja, sehingga dimensinya adalah 2. Hasil ini dibuktikan secara formal dalam teorema berikut.

Teorema 6

Untuk $n \geq 3$ dan n ganjil, setiap subgrup normal N dari D_{2n} memenuhi $\dim(N) = 1$.

Bukti

Berdasarkan klasifikasi Tarnauceanu [11], subgrup normal untuk n ganjil adalah: $\{e\}$, $\langle r^d\rangle$ $(d \mid n)$, dan D_{2n}. Untuk $\{e\}$, kelas tunggal $[e]$ membangunnya, sehingga dim = 1. Untuk $\langle r^d\rangle$, kelas $[r^d] = \{r^d, r^{n-d}\}$ menghasilkan $\langle r^d\rangle$; dim = 1. Untuk D_{2n}, berdasarkan Teorema 4, $\dim(D_{2n}) = 1$. □ □

4.2. Hubungan Dimensi pada Hasil Kali Dua Subgrup Normal

4.2.1. Kasus n Ganjil

Untuk mencari hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal terlebih dahulu mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal dan dimensi dari irisannya.

Langkah 1: Menghitung hasil kali dan irisan setiap pasangan subgrup normal.

Pasangan yang mungkin terbentuk dari $\{N_1, N_2, N_3\}$ adalah (N_1, N_2), (N_1, N_3), dan (N_2, N_3).

- **Pasangan** (N_1, N_2)**:**
  - Hasil kali: $N_1N_2 = \{e\}\{e, r, r^2\} = \{e, r, r^2\} = N_1$, sehingga $\dim(N_1N_2) = \dim(N_2) = 1$.
  - Irisan: $N_0 \cap N_1 = \{e\} = N_1$, sehingga $\dim(N_1 \cap N_2) = \dim(N_1) = 1$.
- **Pasangan** (N_1, N_2)**:**
  - Hasil kali: $N_1N_3 = \{e\} \cdot D_6 = D_6 = N_3$, sehingga $\dim(N_1N_3) = \dim(N_3) = 1$.
  - Irisan: $N_1 \cap N_3 = \{e\} = N_1$, sehingga $\dim(N_1 \cap N_3) = \dim(N_1) = 1$.
- **Pasangan** (N_2, N_3)**:**
  - Hasil kali: $N_2N_3 = \langle r\rangle \cdot D_6 = D_6 = N_3$ (karena $N_2 \leq D_6$), sehingga $\dim(N_2N_3) = \dim(N_3) = 1$.
  - Irisan: $N_2 \cap N_3 = \langle r\rangle \cap D_6 = \langle r\rangle = N_2$, sehingga $\dim(N_2 \cap N_3) = \dim(N_2) = 1$.

Langkah 2: Membentuk hubungan dimensi.

Dengan menggunakan nilai dimensi yang telah dihitung pada subbab sebelumnya dan Langkah 1 diatas, dibentuk persamaan berikut untuk setiap pasangan:

Dari tabel di atas, untuk setiap pasangan subgrup normal pada D_6 terbentuk hubungan:

$$\dim(N_iN_j) = \dim(N_i) + \dim(N_j) - \dim(N_i \cap N_j).$$

Hal ini terjadi karena seluruh subgrup normal pada D_6 ($n = 3$ ganjil) memiliki dimensi yang sama, yaitu satu, sehingga nilai $\dim(N_iN_j)$ maupun $\dim(N_i) + \dim(N_j) - \dim(N_i \cap N_j)$ selalu bernilai $1 + 1 - 1 = 1$.

Teorema 7

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n \geq 3$ dan n ganjil. Untuk semua subgrup normal N_1, N_2 dari D_{2n} berlaku:

$$\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2).$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 6, $\dim(N_1) = \dim(N_2) = 1$ untuk setiap subgrup normal N_1, N_2. Karena $N_1 \cap N_2$ juga merupakan subgrup normal (Teorema 3), maka $\dim(N_1 \cap N_2) = 1$. Demikian pula N_1N_2 normal (Teorema 2) dan $\dim(N_1N_2) = 1$ berdasarkan Teorema 6. Dengan demikian:

$$\dim(N_1)+\dim(N_2)-\dim(N_1\cap N_2) = 1+1-1 = 1 = \dim(N_1N_2). \quad \square$$

□

Hubungan ini diverifikasi secara eksplisit untuk D_6 ($n = 3$), D_{10} ($n = 5$), dan D_{14} ($n = 7$). Pada setiap kasus, semua pasangan (N_i, N_j) memenuhi persamaan tersebut, konsisten dengan Teorema 7. Hal ini disebabkan seluruh subgrup normal pada n ganjil memiliki nilai dimensi yang sama, yaitu satu, sehingga kedua ruas hubungan dimensi selalu bernilai sama.

4.2.2. Kasus n Genap

Untuk mencari hubungan dimensi dari hasil kali dua subgrup normal terlebih dahulu mencari dimensi dari hasil kali dua subgrup normal dan dimensi dari irisannya.

Langkah 1: Menghitung hasil kali dan irisan setiap pasangan subgrup normal.

Dipilih pasangan-pasangan yang representatif untuk menggambarkan berbagai kemungkinan yang terjadi pada D_8.

- **Pasangan** (N_2, M_3)**:**
  - Hasil kali: $N_2N_3 = \{e, r^2\}\{e, r, r^2, r^3\} = \{e, r, r^2, r^3\} = N_3$, sehingga $\dim(N_1N_2) = 1$.
  - Irisan: $N_2 \cap N_3 = \{e, r^2\} \cap \{e, r, r^2, r^3\} = \{e, r^2\} = N_2$, sehingga $\dim(N_2 \cap N_3) = 1$.
- **Pasangan** (N_2, N_4)**:**
  - Hasil kali: $N_2N_4 = \{e, r^2\}\{e, r^2, s, sr^2\} = \{e, r^2, s, sr^2\} = N_4$, sehingga $\dim(N_2N_4) = 1$.
  - Irisan: $N_2 \cap N_4 = \{e, r^2\} \cap \{e, r^2, s, sr^2\} = \{e, r^2\} = N_2$, sehingga $\dim(N_2 \cap N_4) = 1$.
- **Pasangan** (N_4, N_5)**:**
  - Hasil kali: N_4N_5 memuat $s \in N_4$ dan $sr \in N_5$. Maka $s \cdot sr = r \in N_4N_5$. Karena $r, s \in N_4N_5$ dan $\langle r, s\rangle = D_8$,

Tabel 2: Pembentukan Hubungan Dimensi pada D_6 $(n = 3)$

N_i	N_j	$\dim(N_i)$	$\dim(N_j)$	$\dim(N_i \cap N_j)$	$\dim(N_iN_j) = \dim(N_i) + \dim(N_j) - \dim(N_i \cap N_j)$
N_1	N_2	1	1	1	$1 = 1 + 1 - 1$
N_1	N_3	1	1	1	$1 = 1 + 1 - 1$
N_2	N_3	1	1	1	$1 = 1 + 1 - 1$

diperoleh $N_4N_5 = D_8 = N_6$, sehingga $\dim(N_4N_5) = \dim(D_8) = 2$.

- Irisan: $N_4 \cap N_5 = \{e, r^2, s, sr^2\} \cap \{e, r^2, sr, sr^3\} = \{e, r^2\} = N_2$, sehingga $\dim(N_4 \cap N_5) = 1$.

- **Pasangan** (N_3, N_4)**:**
  - Hasil kali: N_3N_4 memuat $r \in N_3$ dan $s \in N_3$, sehingga $r, s \in N_3N_4$ dan $N_3N_4 = D_8 = N_6$, maka $\dim(N_3N_4) = 2$.
  - Irisan: $N_3 \cap N_4 = \{e, r, r^2, r^3\} \cap \{e, r^2, s, sr^2\} = \{e, r^2\} = N_2$, sehingga $\dim(N_3 \cap M_4) = 1$.
- **Pasangan** (N_4, N_6)**:**
  - Hasil kali: $N_4N_6 = M_3 \cdot D_8 = D_8 = N_6$ (karena $N_4 \leq D_8$), sehingga $\dim(N_4N_6) = 2$.
  - Irisan: $N_4 \cap N_6 = N_4 \cap D_8 = N_4$, sehingga $\dim(N_4 \cap N_6) = 1$.

Langkah 2: Membentuk hubungan dimensi.

Dengan menggunakan nilai dimensi yang telah dihitung pada subbab sebelumnya dan Langkah 1, dibentuk persamaan dimensi untuk setiap pasangan:

Dari tabel di atas, terbentuk dua pola hubungan dimensi yang berbeda pada D_8:

- Untuk pasangan (N_2, N_3), (N_2, N_4), dan (N_4, N_6), terbentuk hubungan $\dim(N_iN_j) = \dim(N_i) + \dim(N_j) - \dim(N_i \cap N_j)$.
- Untuk pasangan (N_4, N_5) dan (N_3, N_4), **tidak terbentuk** hubungan tersebut: nilai $\dim(N_iN_j) = 2$ sedangkan $\dim(N_i) + \dim(N_j) - \dim(N_i \cap N_j) = 1 + 1 - 1 = 1$. Hal ini terjadi karena hasil kali dua subgrup berdimensi 1 menghasilkan D_8 yang berdimensi 2 — nilai dimensi hasil kali "melompat" melampaui yang diprediksi rumus.

Dengan demikian, pada D_8 $(n = 4$ genap) ditemukan bahwa hubungan dimensi tidak selalu dapat dibentuk untuk semua pasangan subgrup normal, sesuai dengan Teorema 8.

Teorema 8

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n \geq 4$ dan n genap. Maka terdapat subgrup normal N_1, N_2 sedemikian sehingga:

$$\dim(N_1N_2) \neq \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2).$$

Bukti

Misalkan $n = 2m$ untuk $m \geq 2$. Perhatikan dua subgrup normal berikut dari D_{2n} (Tarnauceanu, 2015 [11]):

$$N_1 = \{e, r^2, r^4, \ldots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \ldots, sr^{n-2}\},$$
$$N_2 = \{e, r^2, r^4, \ldots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \ldots, sr^{n-1}\}.$$

Elemen refleksi N_1 termasuk dalam kelas konjugasi $\{s, sr^2, \ldots\}$ dan elemen refleksi N_2 termasuk dalam kelas $\{sr, sr^3, \ldots\}$. Karena masing-masing tidak dapat dibangun oleh satu kelas konjugasi, maka $\dim(N_1) = \dim(N_2) = 2$.
Hasil kali N_1N_2 memuat $s \in N_1$ dan $sr \in N_2$, sehingga $s \cdot sr = r \in N_1N_2$. Karena $r, s \in N_1N_2$, maka $N_1N_2 = D_{2n}$ dan $\dim(N_1N_2) = \dim(D_{2n}) = 2$ (Teorema 5).
Irisan $N_1 \cap N_2 = \langle r^2 \rangle = \{e, r^2, r^4, \ldots, r^{n-2}\}$ adalah subgrup rotasi siklik dengan $\dim = 1$. Oleh karena itu:

$$\dim(N_1)+\dim(N_2)-\dim(N_1 \cap N_2) = 2+2-1 = 3 \neq 2 = \dim(N_1N_2).$$

□

Ketidakberlakuan hubungan ini untuk n genap disebabkan oleh struktur kelas konjugasi yang lebih kompleks: elemen refleksi terbagi ke dalam dua kelas yang berbeda, menghasilkan subgrup normal berdimensi 2 yang hasil kalinya berdimensi 2, bukan 3. Asimetri struktural antara n ganjil dan n genap ini merupakan ciri khas grup dihedral. Hasil ini konsisten dengan verifikasi eksplisit pada D_8 $(n = 4)$, D_{12} $(n = 6)$, dan D_{16} $(n = 8)$.

5. Kesimpulan

Penelitian ini mengkaji hubungan dimensi pada hasil kali dua subgrup normal dalam grup dihedral D_{2n} menggunakan konsep dimensi Kaplan dan Lev (2003). Diperoleh kesimpulan bahwa hubungan antara dimensi dari hasil kali dua subgrup normal, penjumlahan dimensi, dan dimensi irisannya bergantung pada paritas n.

Untuk grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil, diperoleh hubungan

$$\dim(N_1N_2) = \dim(N_1) + \dim(N_2) - \dim(N_1 \cap N_2)$$

yang berlaku untuk setiap pasangan subgrup normal N_1 dan N_2. Hal ini disebabkan seluruh subgrup normal pada D_{2n} dengan n ganjil memiliki dimensi yang sama, yaitu satu, sehingga kedua ruas hubungan dimensi selalu bernilai sama.

Namun, untuk grup dihedral D_{2n} dengan n genap ditemukan pasangan subgrup normal yang tidak memenuhi hubungan tersebut. Ketidakberlakuan ini dipengaruhi oleh struktur kelas konjugasi pada D_{2n} dengan n genap yang lebih kompleks, di mana elemen refleksi terbagi ke dalam dua kelas konjugasi yang berbeda sehingga beberapa subgrup normal memerlukan lebih dari satu kelas konjugasi untuk membangunnya.

Penelitian lanjutan dapat diarahkan pada perluasan kajian ke grup lain seperti grup simetri dan grup dihedral umum, eksplorasi definisi dimensi alternatif, serta karakterisasi syarat perlu dan cukup agar rumus dimensi berlaku dalam suatu grup.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Ahmad Rizal Afandi: Konseptualisasi, Metodologi, Analisis Formal, Investigasi, Penulisan – Draf Asli.

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Model Claude versi Sonnet 4.6 digunakan untuk membantu penyusunan draf awal, koreksi struktur kalimat, dan penyelarasan terminologi matematika dalam penulisan naskah.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan.

Tabel 3: Pembentukan Hubungan Dimensi pada D_8 $(n = 4)$

N_i	N_j	$\dim(N_i)$	$\dim(N_j)$	$\dim(N_i \cap N_j)$	$\dim(N_iN_j)$ vs $\dim(N_i)+\dim(N_j)-\dim(N_i \cap N_j)$
N_2	N_3	1	1	1	$1 = 1+1-1$
N_2	N_4	1	1	1	$1 = 1+1-1$
N_4	N_5	1	1	1	$2 \neq 1+1-1$
N_3	N_4	1	1	1	$2 \neq 1+1-1$
N_4	N_6	1	2	1	$2 = 1+2-1$

Pendanaan dan Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang atas dukungan institusional yang diberikan.

Ketersediaan Data

Data dalam penelitian ini berupa hasil studi literatur dan tidak mengandung data primer atau sekunder yang dapat diakses secara publik. Oleh karena itu, tidak ada data yang tersedia untuk dibagikan. Informasi lebih lanjut dapat diperoleh dari penulis korespondensi atas permintaan yang wajar.

Daftar Pustaka

[1] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 3 ed., 2004.

[2] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*. New York: Springer, 4 ed., 1999.

[3] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*. Boston: Addison Wesley, 7 ed., 2003.

[4] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons, 2 ed., 1975.

[5] Y. Tian, "Formulas for calculating the dimensions of the sums and the intersections of a family of linear subspaces with applications," *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, vol. 60, no. 3, pp. 471–485, 2019.

[6] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*. Belmont, CA: Cengage Learning, 8 ed., 2012.

[7] J. F. Humphreys, *A Course in Group Theory*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

[8] G. Kaplan and A. Lev, "On the dimension and basis concepts in finite groups," *Communications in Algebra*, vol. 31, no. 6, pp. 2707–2717, 2003.

[9] I. M. Isaacs, "Subgroups generated by small classes in finite groups," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 136, no. 7, pp. 2299–2301, 2008.

[10] M. A. Kholilurrohman, "Dimensi grup dihedral," skripsi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, 2022.

[11] M. Tărnăuceanu, "Classifying fuzzy normal subgroups of finite groups," *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 12, no. 1, pp. 107–115, 2015.

[12] A. Beltrán, M. J. Felipe, and C. Melchor, "Normal subgroups whose conjugacy class graph has diameter three," *arXiv preprint*, vol. arXiv:2402.06705, 2024.

[13] Z. Akhlaghi, A. Beltrán, M. J. Felipe, and M. Khatami, "Structure of normal subgroups with three g-class sizes," *Monatshefte für Mathematik*, vol. 167, pp. 1–12, 2012.

[14] Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, "Spektrum graf konjugasi dan komplemen graf konjugasi dari grup dihedral," *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*, pp. 1–8, 2017.

[15] A. Andari, *Teori Grup*. Malang: UB Press, 1 ed., 2015.

[16] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. New York: Springer, 2 ed., 1996.

[17] G. James and M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 2 ed., 2001.